Aula 5 – Probabilidade – conceitos básicos

Nesta aula, você aprenderá os conceitos de:

- experimento aleatório;
- espaço amostral;
- evento aleatório e também as operações que podem ser feitas com os eventos aleatórios.

Introdução

No nosso cotidiano, lidamos sempre com situações nas quais está presente a incerteza do resultado, embora, muitas vezes, os resultados possíveis sejam conhecidos. Por exemplo: o sexo de um embrião pode ser masculino ou feminino, mas só saberemos o resultado quando o experimento se concretizar, ou seja, quando o bebê nascer. Se estamos interessados na face voltada para cima quando jogamos um dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas só saberemos o resultado quando o experimento se completar, ou seja, quando o dado atingir a superfície sobre a qual foi lançado. É conveniente, então, dispormos de uma medida que exprima a incerteza presente em cada um destes acontecimentos. Tal medida é a *probabilidade*.

No estudo das distribuições de freqüências, vimos como essas são importantes para entendermos a variabilidade de um fenômeno aleatório. Por exemplo, se sorteamos uma amostra de empresas e analisamos a distribuição do número de empregados, sabemos que uma outra amostra forneceria resultados diferentes. No entanto, se sorteamos um grande número de amostras, esperamos que surja um determinado padrão que reflita a verdadeira distribuição da população de todas as empresas. Através de um modelo teórico, construído com base em suposições adequadas, podemos reproduzir a distribuição de freqüências quando o fenômeno é observado diretamente. Esses modelos são chamados *modelos probabilísticos* e eles serão estudados na segunda parte deste Módulo 2. A *probabilidade* é a ferramenta básica na construção de tais modelos e começaremos este módulo com o seu estudo.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Consideremos o lançamento de um dado. Queremos estudar a proporção de ocorrências das faces desse dado. O primeiro fato a observar é que existem apenas 6 resultados possíveis, as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. O segundo fato é uma suposição sobre o dado: em geral, é razoável supor que este seja equilibrado. Assim, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes e, portanto, essa proporção deve ser $\frac{1}{6}$. Nessas condições, nosso modelo probabilístico para o lançamento de um dado pode ser expresso da seguinte forma:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Freqüência teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Suponhamos que uma mulher esteja grávida de trigêmeos. Sabemos que cada bebê pode ser do sexo masculino (M) ou feminino (F). Então, as possibilidades para o sexo das três crianças são: HHH, HHM, HMH, MHH, MMH, MHM, HMM, MMM. Uma suposição razoável é que todos esses resultados sejam igualmente prováveis, o que equivale a dizer que cada bebê tem igual chance de ser do sexo masculino ou feminino. Então, cada resultado tem uma chance de $\frac{1}{8}$ de acontecer, e o modelo probabilístico para esse experimento seria

Sexo	HHH	HHM	HMH	MHH	MMH	MHM	HMM	MMM	Total
Freqüência teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Por outro lado, se só estamos interessados no número de meninas, esse mesmo experimento leva ao seguinte modelo probabilístico:

Meninas	0	1	2	3	Total
Freqüência teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Nesses exemplos, vemos que a especificação de um modelo probabilístico para um fenômeno casual depende da especificação dos *resultados possíveis* e das respectivas *probabilidades*. Vamos, então, estabelecer algumas definições antes de passarmos à definição propriamente dita de probabilidade.

Experimento aleatório

Um *experimento aleatório* é um processo que acusa variabilidade em seus resultados, isto é, repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados serão diferentes. Contrapondo aos experimentos aleatórios, temos os experimentos *determinísticos*, que são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos. Neste curso, estaremos interessados apenas nos experimentos aleatórios.

Espaço amostral

O *espaço amostral* de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Vamos denotar tal conjunto pela letra grega ômega maiúscula, Ω. Quando o espaço amostral é finito ou infinito enumerável, é chamado espaço amostral *discreto*. Caso contrário, isto é, quando Ω é não-enumerável, vamos chamá-lo de espaço amostral *contínuo*.

Eventos aleatórios

Os subconjuntos de Ω são chamados *eventos aleatórios*; já os elementos de Ω são chamados *eventos elementares*. A classe dos eventos aleatórios de um espaço amostral Ω, que denotaremos por $\mathcal{F}(\Omega)$, é o conjunto de todos os eventos (isto é, de todos os subconjuntos) do espaço amostral. A título de ilustração, consideremos um espaço amostral com três elementos: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. A classe dos eventos aleatórios é

$$\mathcal{F}(\Omega) = \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

Os eventos, sendo conjuntos, serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, enquanto os elementos de um evento serão representados por letras minúsculas.

Exemplo 5.1

1. O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, uma vez que, em cada lançamento, mantidas as mesmas condições, não podemos prever qual das duas faces (cara ou coroa) cairá para cima. Por outro lado, se colocarmos uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água, o resultado será sempre 100^oC.

2. Consideremos o experimento aleatório "lançamento de um dado". O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sendo, portanto, um espaço discreto. Os eventos elementares são $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Outros eventos são: "face par"$= \{2, 4, 6\}$, "face ímpar" $= \{1, 3, 5\}$, "face ímpar menor que 5" $= \{1, 3\}$, etc.

3. Consideremos o lançamento simultâneo de duas moedas. Vamos representar por K a ocorrência de cara e por C a ocorrência de coroa. Um espaço amostral para esse experimento é $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$, que também é um espaço discreto. Os eventos simples são $\{KK\}$, $\{KC\}$, $\{CK\}$, $\{CC\}$ e um outro evento é "cara no primeiro lançamento" $= \{KC, KK\}$. Para esse mesmo experimento, se estamos interessados apenas no número de caras, o espaço amostral pode ser definido como $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

4. Seja o experimento que consiste em medir, em decibéis, diariamente, durante um mês, o nível de ruído na vizinhança da obra de construção do metrô em Ipanema. O espaço amostral associado a este experimento é formado pelos números reais positivos, sendo, portanto, um espaço amostral contínuo. Um evento: observar níveis superiores a 80 decibéis, representado pelo intervalo $(80, \infty)$, que corresponde a situações de muito barulho.

5. Uma urna contém 4 bolas, das quais 2 são brancas (numeradas de 1 a 2) e 2 são pretas (numeradas de 3 a 4). Duas bolas são retiradas dessa urna, sem reposição. Defina um espaço amostral apropriado para esse experimento e os seguintes eventos:

   A: a primeira bola é branca;
   B: a segunda bola é branca;
   C: ambas as bolas são brancas.

   Solução:

   Considerando a numeração das bolas, o espaço amostral pode ser definido como:

   $$\Omega = \{(i,\, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\}$$

   Mais especificamente:

   $$\Omega = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

   Os eventos são:

   $$A = \{(i, j) : i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\}$$

   ou mais especificamente

   $$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4)\}$$

$$B = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; i \neq j\}$$

ou

$$B = \{(2,1), (3,1), (4,1), (1,2), (3,2), (4,2)\}$$

$$C = \{(i,\ j) : i = 1, 2;\ j = 1, 2;\ i \neq j\}$$

ou

$$C = \{(1,2), (2,1)\}$$

6. Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das cores azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e liste os eventos:

   A: todas as cartas selecionadas são vermelhas.
   B: uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas.
   C: três diferentes cores ocorrem.
   D: todas as 4 cores ocorrem.

   Solução:

   Vamos denotar por A, V, P e B as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B;\ i = 1, 2, 3\}$$

$$A = \{(V, V, V)\}$$

$$B = \{(V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, A, V), (P, V, A)\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B;\ i = 1, 2, 3;\ x_1 \neq x_2 \neq x_3\}$$

   ou

$$C = \left\{ \begin{array}{c} (V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, A, V), (P, V, A), \\ (V, P, B), (V, B, P), (P, V, B), (P, B, V), (B, V, P), (B, P, V), \\ (V, A, B), (V, B, A), (A, B, V), (A, V, B), (B, A, V), (B, V, A), \\ (P, A, B), (P, B, A), (A, P, B), (A, B, P), (B, A, P), (B, P, A) \end{array} \right\}$$

   Como temos 4 cores diferentes e apenas 3 extrações, não é possível obter todas as cores; logo,

$$D = \varnothing$$

Operações com eventos aleatórios

Interseção

O evento *interseção* de dois eventos A e B é o evento que equivale à ocorrência simultânea de A e B (ver **Figura 5.1**). Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a interseção de dois eventos será representada por $A \cap B$.

Note que

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \underline{\textbf{e}} \quad x \in B \tag{5.1}$$

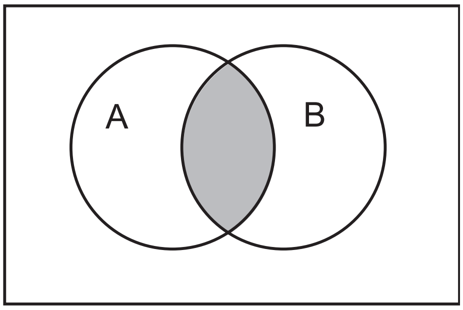

Figura 5.1: Interseção de dois eventos: $A \cap B$.

Exemplo 5.2

Consideremos o experimento "lançamento de dois dados" e os eventos A = "soma das faces é um número par" e B = "soma das faces é um número maior que 9". Calcule $A \cap B$.

Solução:

O espaço amostral desse experimento, que tem 36 elementos, é

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), \ldots, (6,6)\}$$

Para que um elemento pertença à interseção $A \cap B$, ele tem que pertencer simultaneamente ao evento A e ao evento B. O evento B é

$$B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Dos seus elementos, os únicos que pertencem ao evento A, isto é, que têm soma das faces par, são os eventos $(4,6), (5,5), (6,4)$ e $(6,6)$. Logo, $A \cap B = \{(4,6), (5,5), (6,4), (6,6)\}$. Note que não precisamos listar o evento A! Ele tem 18 elementos!

Exclusão

Dois eventos A e B são *mutuamente exclusivos* quando eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isto significa dizer que os eventos A e B não têm elementos em comum. Então, dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando sua interseção é o conjunto vazio, isto é, $A \cap B = \varnothing$ (ver **Figura 5.2**).

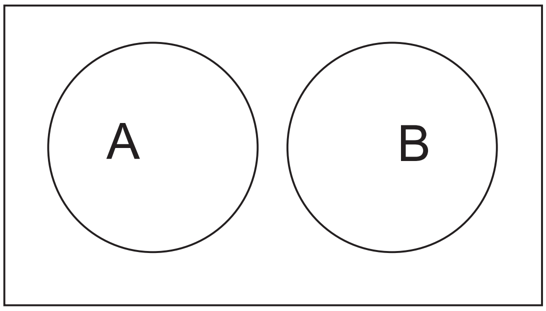

Figura 5.2: Eventos mutuamente exclusivos: $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 5.3

Consideremos novamente o experimento "lançamento de dois dados" e sejam os eventos $A =$ "soma das faces é ímpar" e $B =$ "duas faces iguais". Então, A e B são mutuamente exclusivos porque a soma de dois números iguais é sempre um número par!

União

A *união* de dois eventos A e B é o evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles. Note que isso significa que pode ocorrer apenas A, ou apenas B ou A e B simultaneamente. Esse evento será representado por $A \cup B$ (ver **Figura 5.3**).

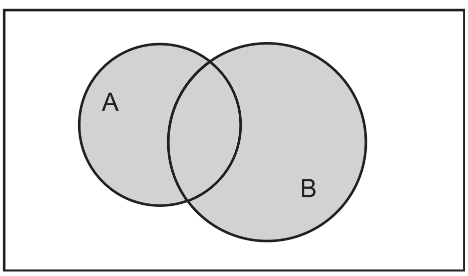

Figura 5.3: União de dois eventos: $A \cup B$.

Note que

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \underline{\textbf{ou}} \quad x \in B \tag{5.2}$$

Exemplo 5.4

Consideremos o experimento do lançamento de duas moedas, onde o espaço amostral é $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$. Sejam os eventos $A =$ "ocorrência de exatamente 1 cara" e $B =$ "duas faces iguais". Então $A = \{KC, CK\}$ e $B = \{CC, KK\}$; logo, $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$. Seja C o evento "pelo menos uma cara"; então $C = \{KC, CK, KK\}$ e $B \cup C = \Omega$ e $B \cap C \neq \varnothing$.

Complementar

O *complementar* de um evento A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é a negação de A. Então, o complementar de A é formado pelos elementos que não pertencem a A (ver **Figura 5.4**).

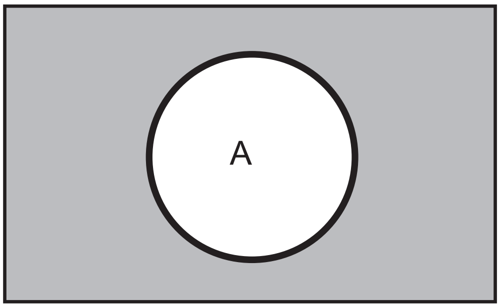

Figura 5.4: Complementar de um evento $A : \overline{A}$.

Note que

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \tag{5.3}$$

e também que

$$A \cup \overline{A} = \Omega \tag{5.4}$$

Exemplo 5.5

Consideremos o lançamento de um dado e seja $A =$ "face par". Então, $\overline{A}$ é o evento "face ímpar". Note que $A = \{2, 4, 6\}$ e $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ e $\Omega = A \cup \overline{A}$.

Diferença

A *diferença* entre dois eventos A e B, representada por $A - B$, ou equivalentemente, por $A \cap \overline{B}$, é o evento formado pelos pontos do espaço amostral que pertencem a A mas não pertencem a B (ver **Figura 5.5**).

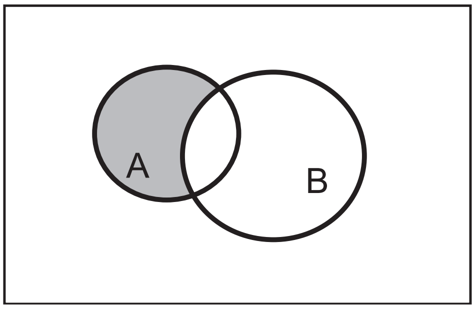

Figura 5.5: Diferença de dois conjuntos: $A - B = A \cap \overline{B}$.

Note que

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \mathbf{e} \quad x \notin B \tag{5.5}$$

e também

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \tag{5.6}$$

Além disso, $A - B \neq B - A$, conforme ilustrado na **Figura 5.6**.

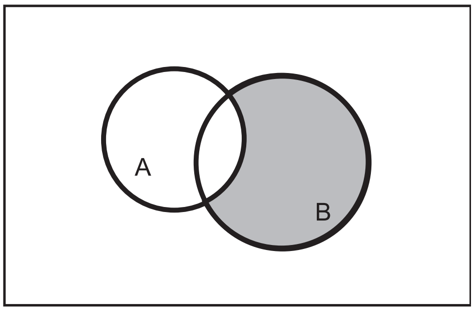

Figura 5.6: Diferença de dois conjuntos: $B - A = B \cap \overline{A}$.

Exemplo 5.6

Consideremos novamente o lançamento de dois dados e os eventos $A =$ "soma das faces é par" e $B =$ "soma das faces é maior que 9". Vamos considerar as duas diferenças, $A - B$ e $B - A$. Temos que

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5), \\ (4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6) \end{array} \right\}$$

e

$$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Logo,

$$A - B = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5), \\ (4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(6,2) \end{array} \right\}$$

$$B - A = \{(5,6),(6,5)\}$$

Partição de um espaço amostral

Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ forma uma *partição* do espaço amostral Ω se

1. os eventos A_i são disjuntos dois a dois, isto é, se $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall\, i \neq j$;
2. a união dos eventos A_i é o espaço amostral Ω, isto é, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Na **Figura 5.7** ilustra-se esse conceito.

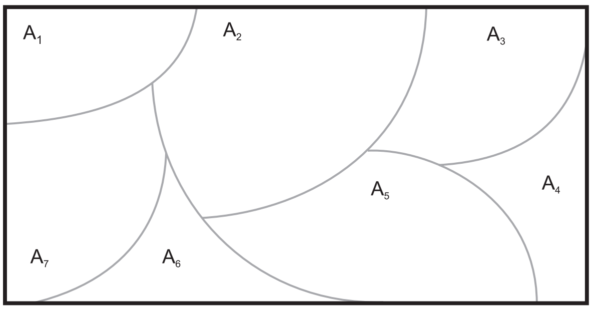

Figura 5.7: Partição do espaço amostral Ω.

Exemplo 5.7

No experimento "lançamento de um dado", os eventos A = "face par" e B = "face ímpar" formam uma partição do espaço amostral. Temos também que, qualquer que seja Ω, um evento A qualquer e seu complementar $\overline{A}$ formam uma partição, isto é, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Propriedades das operações

Sejam A, B, C eventos de um espaço amostral Ω. Então valem as seguintes propriedades.

1. Identidade

$$\begin{aligned} A \cap \varnothing &= \varnothing \\ A \cup \varnothing &= A \\ A \cap \Omega &= A \\ A \cup \Omega &= \Omega \end{aligned} \tag{5.7}$$

(Note que Ω é o equivalente do conjunto universal da teoria de conjuntos.)

2. Complementar

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \varnothing \\ \overline{\varnothing} &= \Omega \\ A \cap \overline{A} &= \varnothing \\ A \cup \overline{A} &= \Omega \end{aligned} \tag{5.8}$$

3. Idempotente

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \tag{5.9}$$

4. Comutativa

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \tag{5.10}$$

5. Associativa

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \tag{5.11}$$

6. Distributiva

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \tag{5.12}$$

A ilustração da primeira propriedade está na **Figura 5.8**. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade $A \cap (B \cup C)$: no diagrama à esquerda temos o evento A e no diagrama do centro temos o evento $B \cup C$. Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, o que resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento $A \cap (B \cup C)$. Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade $(A \cap B) \cup (A \cap C)$: no diagrama à esquerda temos o evento $A \cap B$ e no diagrama do centro, o evento $A \cap C$. Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

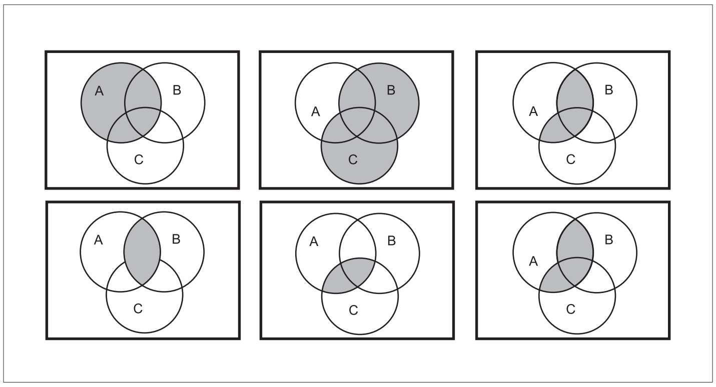

Figura 5.8: Ilustração da propriedade distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A ilustração da segunda propriedade está na **Figura 5.9**. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade $A \cup (B \cap C)$: no diagrama à esquerda temos o evento A e no diagrama do centro temos o evento $B \cap C$. Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento $A \cup (B \cap C)$. Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade $(A \cup B) \cap (A \cup C)$: no diagrama à esquerda temos o evento $A \cup B$ e no diagrama do centro, o evento $A \cup C$. Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, e isso resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

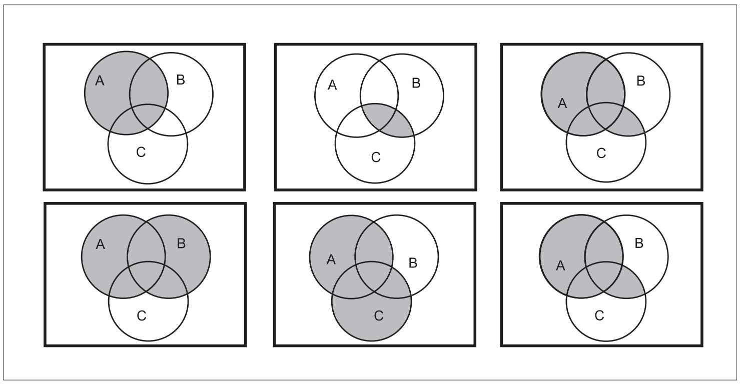

Figura 5.9: Ilustração da propriedade distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. Absorção

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \tag{5.13}$$

8. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Na primeira linha da **Figura 5.10** ilustra-se a primeira propriedade $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: no diagrama à esquerda temos $\overline{A \cap B}$; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente, $\overline{A}$ e $\overline{B}$; no diagrama à direita, temos $\overline{A} \cup \overline{B}$, que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Na segunda linha da **Figura 5.10** ilustra-se a segunda propriedade $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: no diagrama à esquerda temos $\overline{A \cup B}$; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente, $\overline{A}$ e $\overline{B}$; no diagrama à direita, temos $\overline{A} \cap \overline{B}$, que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

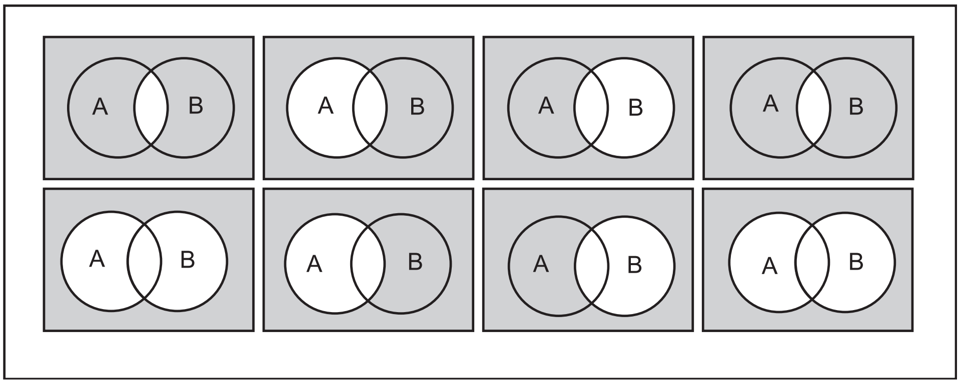

Figura 5.10: Ilustração das propriedades de De Morgan.

Exemplo 5.8

1. Sejam A, B, C três eventos de um espaço amostral. Exprima os eventos a seguir usando as operações de união, interseção e complementação:

   (a) somente A ocorre;

   (b) A, B e C ocorrem;

   (c) pelo menos um ocorre;

   (d) exatamente dois ocorrem.

   Solução:

   (a) O evento "somente A ocorre" significa que A ocorreu e B não ocorreu e C não ocorreu; em linguagem de conjunto:

   $$\text{Somente } A \text{ ocorre} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

   (b) O evento "A, B e C ocorrem" significa que os três eventos ocorreram; em linguagem de conjunto,

   $$A, B \text{ e } C \text{ ocorrem} = A \cap B \cap C$$

   (c) O evento "pelo menos um ocorre" significa que pode ter ocorrido apenas um, ou dois ou três; essa é a própria definição de união, ou seja, em linguagem de conjunto, temos que

   $$\text{pelo menos um ocorre} = A \cup B \cup C$$

   (d) Os dois que ocorrem podem ser A e B ou A e C ou B e C. Ocorrendo dois desses, o terceiro não pode ocorrer. Logo, em linguagem de conjunto temos que:

exatamente dois ocorrem $= \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$

2. Considere o lançamento de dois dados e defina os seguintes eventos:

$A =$ soma par
$B =$ soma ≥ 9
$C =$ máximo das faces é 6

Calcule $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $B \cap C$, $B - C$.

Solução:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1)\,,(1,3)\,,(1,5)\,,(2,2)\,,(2,4)\,,(2,6)\,,(3,1)\,,(3,3)\,,(3,5)\,, \\ (4,2)\,,(4,4)\,,(4,6)\,,(5,1)\,,(5,3)\,,(5,5)\,,(6,2)\,,(6,4)\,,(6,6) \end{array} \right\}$$

$$B = \{(3,6)\,,(4,5)\,,(4,6)\,,(5,4)\,,(5,5)\,,(5,6)\,,(6,3)\,,(6,4)\,,(6,5)\,,(6,6)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{c} (1,6)\,,(2,6)\,,(3,6)\,,(4,6)\,,(5,6)\,,(6,6)\,, \\ (6,1)\,,(6,2)\,,(6,3)\,,(6,4)\,,(6,5) \end{array} \right\}$$

$$A \cap B = \{(4,6)\,,(5,5)\,,(6,4)\,,(6,6)\}$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{c} (1,1)\,,(1,3)\,,(1,5)\,,(2,2)\,,(2,4)\,,(2,6)\,,(3,1)\,,(3,3)\,,(3,5)\,, \\ (4,2)\,,(4,4)\,,(4,6)\,,(5,1)\,,(5,3)\,,(5,5)\,,(6,2)\,,(6,4)\,,(6,6)\,, \\ (3,6)\,,(4,5)\,,(5,4)\,,(5,6)\,,(6,3)\,,(6,5) \end{array} \right\}$$

$$A - B = A \cap \overline{B} = \left\{ \begin{array}{c} (1,1)\,,(1,3)\,,(1,5)\,,(2,2)\,,(2,4)\,,(2,6)\,,(3,1)\,,(3,3)\,,(3,5)\,, \\ (4,2)\,,(4,4)\,,(5,1)\,,(5,3)\,,(6,2) \end{array} \right\}$$

$$B - A = B \cap \overline{A} = \{(3,6)\,,(4,5)\,,(5,4)\,,(5,6)\,,(6,3)\,,(6,5)\}$$

$$B \cap C = \{(3,6)\,,(4,6)\,,(5,6)\,,(6,3)\,,(6,4)\,,(6,5)\,,(6,6)\}$$

$$B - C = B \cap \overline{C} = \{(4,5)\,,(5,4)\,,(5,5)\}$$

Note que, de acordo com as propriedades já vistas,

$$\begin{aligned} (B \cap C) \cup (B - C) &= (B \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right) = \\ &= [(B \cap C) \cup B] \cap \left[(B \cap C) \cup \overline{C}\right] = [B] \cap \left[\overline{C} \cup (B \cap C)\right] \\ &= B \cap \left[\left(\overline{C} \cup B\right) \cap \left(\overline{C} \cup C\right)\right] = B \cap \left[\left(\overline{C} \cup B\right) \cap (\Omega)\right] \\ &= B \cap \left(\overline{C} \cup B\right) = \left(B \cap \overline{C}\right) \cup (B \cap B) \\ &= \left(B \cap \overline{C}\right) \cup B = B \end{aligned}$$

Resumo da Aula

Nesta aula você estudou os conceitos básicos para o estudo da probabilidade. Certifique-se de ter compreendido bem as seguintes definições:

- Experimento aleatório - processo que acusa variabilidade em seus resultados.
- Espaço amostral - conjunto dos resultados possíveis de um experimento aleatório.
- Evento aleatório - qualquer subconjunto de um espaço amostral.
- Você deve também compreender as seguintes operações com eventos aleatórios:

Interseção	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$	
União	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$	
Exclusão	$A \cap B = \varnothing$	
Complementar	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$	
Diferença	$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$	$A - B = A \cap \overline{B}$
Partição	$A_1, A_2, \ldots, A_n : A_i \cap A_j = \varnothing$ e $\bigcup_i A_i = \Omega$	

Exercícios

1. Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos $A =$ “faces iguais”; $B =$ “cara na primeira moeda”; $C =$ “coroa na segunda e terceira moedas”.

2. Considere os diagramas na **Figura 5.11**.

   (a) No diagrama (1), assinale a área correspondente a $A - B$

   (b) No diagrama (2), assinale a área correspondente a $\overline{A} \cap \overline{B}$

   (c) No diagrama (3), assinale a área correspondente a $(A \cup C) \cap B$

   (d) No diagrama (4), assinale a área correspondente a $(A \cup B) \cap C$

3. Na **Figura 5.12**, obtenha a expressão matemática para os eventos definidos por cada uma das áreas numeradas.

4. Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

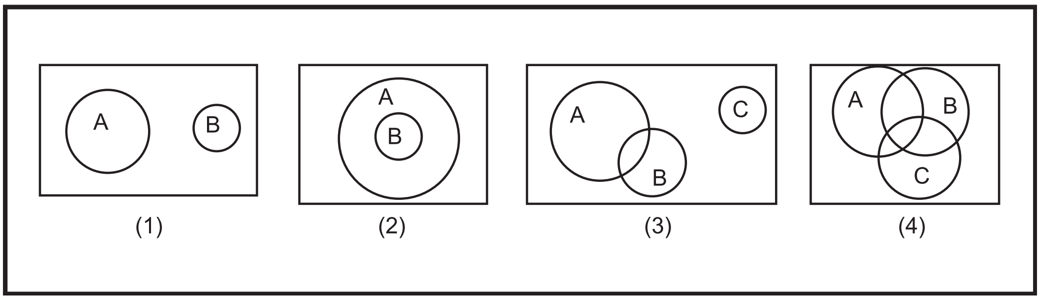

Figura 5.11: Exercício 5.2.

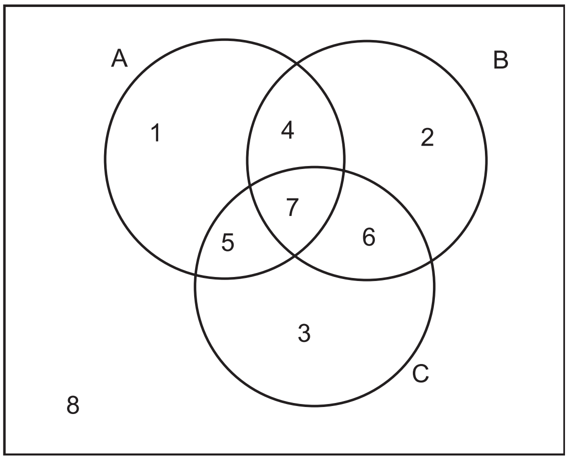

Figura 5.12: Exercício 5.3.

(a) Em uma pesquisa de mercado, conta-se o número de clientes do sexo masculino que entram em um supermercado no horário das 8 às 12 horas.

(b) Em um estudo de viabilidade de abertura de uma creche própria de uma grande empresa, fez-se um levantamento, por funcionário, do sexo dos filhos com menos de 5 anos de idade. O número máximo de filhos por funcionário é 4, e a informação relevante é o sexo dos filhos de cada funcionário.

(c) Em um teste de controle de qualidade da produção, mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.

(d) Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha até o último nome de mulher ser selecionado e anota-se o número de fichas selecionadas.

(e) Lança-se uma moeda até aparecer cara pela primeira vez e anota-se o número de lançamentos.

(f) Em uma urna, há 5 bolas identificadas pelas letras $\{A, B, C, D, E\}$.

Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.

(g) Mesmo enunciado anterior, mas as duas bolas são selecionadas simultaneamente.

5. Sejam A, B, C três eventos de um espaço amostral. Exprimir os eventos a seguir usando as operações de união, interseção e complementação:

   (a) exatamente um ocorre;

   (b) nenhum ocorre;

   (c) pelo menos dois ocorrem;

   (d) no máximo dois ocorrem.

Solução dos Exercícios

1. K = cara $\qquad C$ = coroa

   $\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$

   $A = \{KKK, CCC\}$

   $B = \{KKK, KKC, KCK, KCC\}$

   $C = \{KCC, CCC\}$

2. Veja a **Figura 5.13**.

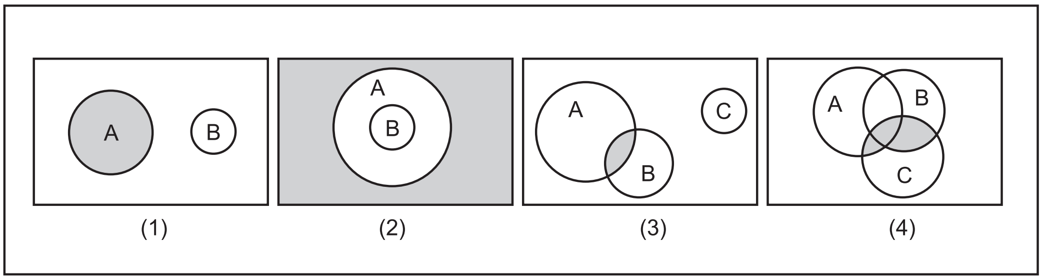

Figura 5.13: Solução do Exercício 5.2.

3. Área 1: são os elementos que pertencem apenas ao evento A:$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

   Área 2: são os elementos que pertencem apenas ao evento B:$\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

   Área 3: são os elementos que pertencem apenas ao evento C:$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

   Área 4: são os elementos que pertencem a A e a B, mas não a C:$A \cap B \cap \overline{C}$

Área 5: são os elementos que pertencem a A e a C, mas não a B:$A \cap \overline{B} \cap C$

Área 6: são os elementos que pertencem a B e a C, mas não a A:$\overline{A} \cap B \cap C$

Área 7: são os elementos que pertencem a A, a B e a C:$A \cap B \cap C$

Área 8: são os elementos que não pertencem nem a A, nem a B, nem a C: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

4. (a) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$

   (b) Representando por H e F os sexos masculino e feminino, respectivamente, podemos representar o espaço amostral como

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} H, F, HH, HF, FH, FF, \\ HHH, HHF, HFH, FHH, FFH, FHF, HFF, FFF, \\ FFFF, FFFH, FFHF, FHFF, HFFF, HHFF, \\ HFHF, HFFH, FFHH, FHFH, FHHF, \\ HHHF, HHFH, HFHH, FHHH, HHHH \end{array} \right\}$$

   Note que representamos aí os casais com um filho, dois filhos, três filhos e quatro filhos.

   (c) A lâmpada pode queimar logo ao ser ligada e, teoricamente, pode durar para sempre; logo, $\Omega = (0, \infty)$.

   (d) Como temos que sortear as 3 mulheres, serão necessários no mínimo 3 sorteios e, no pior dos casos, a última mulher será a última a ser sorteada. Como estamos interessados apenas no número de sorteios, o espaço amostral é $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   (e) Podemos obter cara logo no primeiro lançamento ou então no segundo ou no terceiro... Teoricamente, pode ser necessário lançar a moeda infinitas vezes. Logo, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$

   (f) $\Omega = \left\{ \begin{array}{c} AA, AB, AC, AD, AE, BA, BB, BC, BD, BE, CA, CB, CC, \\ CD, CE, DA, DB, DC, DD, DE, EA, EB, EC, ED, EE \end{array} \right\}$

   (g) $\Omega = \left\{ \begin{array}{c} AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, \\ DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED \end{array} \right\}$

5. (a) $\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$ - o primeiro termo corresponde ao evento "apenas A ocorre", o segundo ao evento "apenas B ocorre" e o terceiro ao evento "apenas C ocorre".

(b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

(c) "Pelo menos dois" significa, neste caso, 2 ou 3 ocorrem, ou seja:

$$\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup (A \cap B \cap C)$$

o primeiro termo corresponde à ocorrência de A e B, mas não de C; o segundo termo, ocorrência de B e C, mas não de A; o terceiro, ocorrência de A e C, mas não de B, e o quarto termo corresponde à ocorrência dos 3 simultaneamente.

(d) No máximo 2 significa ou nenhum ocorre, ou ocorre apenas um, ou ocorrem apenas 2. No caso de 3 eventos, a única possibilidade excluída é a ocorrência dos três simultaneamente, ou seja, $\overline{A \cap B \cap C}$.