Aula 7 – Probabilidade

Nesta aula você aprenderá a definição de probabilidade, estudará os axiomas e propriedades de uma lei de probabilidade e fará revisão dos seguintes conceitos de análise combinatória:

- permutação;
- arranjo;
- combinação.

Definição clássica de probabilidade

Na aula passada, vimos que o espaço amostral para o experimento aleatório do lançamento de um dado é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vimos também que é usual supor que o dado seja equilibrado, o que equivale a dizer que todos os resultados são igualmente prováveis. Então, se jogarmos o dado várias vezes, aproximadamente um sexto das ocorrências resultará na face 3, bem como metade das repetições resultará em um número par. Estamos analisando a chance de ocorrência dos eventos $A =$ "face 3" e $B =$ "face par". O evento A é um evento elementar, enquanto o evento B é um subconjunto com 3 elementos, o que representaremos por $\#A = 1$ e $\#B = 3$. Essa é uma terminologia usual para representar o número de elementos de um conjunto, que lemos como "cardinalidade de A ou B". É intuitivo dizer que A ocorrerá $\frac{1}{6}$ das vezes, enquanto B ocorrerá $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ das vezes. Define-se, assim, a probabilidade de um evento A como a razão entre o número de elementos de A e o número de elementos de Ω. Vamos nos referir aos elementos de A − o evento de interesse − como sendo os "casos favoráveis", enquanto os elementos de Ω são os "casos possíveis", o que nos leva à seguinte definição.

Definição clássica de probabilidade

Seja A um evento de um espaço amostral Ω finito, cujos elementos são igualmente prováveis. Define-se a probabilidade do evento A como

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{7.1}$$

Naturalmente, nessa definição estamos supondo que $\#\Omega > 0$, ou seja, que Ω tenha algum elemento pois, se não tivesse, não teríamos o que estudar! Esta foi a primeira definição formal de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576). Vamos nos referir a ela como a *definição clássica de probabilidade.* Note que ela se baseia em duas hipóteses:

1. Há um número finito de eventos elementares, isto é, Ω é um conjunto finito.

2. Os eventos elementares são igualmente prováveis.

Embora essas hipóteses restrinjam o campo de aplicação da definição, veremos que ela é muito importante e vários exercícios serão resolvidos baseados nela.

Propriedades da definição clássica de probabilidade

A definição clássica de probabilidade satisfaz as seguintes propriedades básicas:

1. $\Pr(A) \geq 0 \quad$ para todo evento $A \subset \Omega$

   Demonstração:

   Como $\#A \geq 0$ e $\#\Omega > 0$, $\Pr(A)$ é a razão de dois números não-negativos, então, $\Pr(A) \geq 0$.

2. $\Pr(\Omega) = 1$.

   Demonstração:

   Por definição, $\Pr(\Omega) = \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$.

3. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

   Demonstração:

   Se A e B são mutuamente exclusivos, resulta que $A \cap B = \varnothing$. Neste caso, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$ (veja a **Figura 7.1**). Logo,

$$\Pr(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} = \Pr(A) + \Pr(B)$$

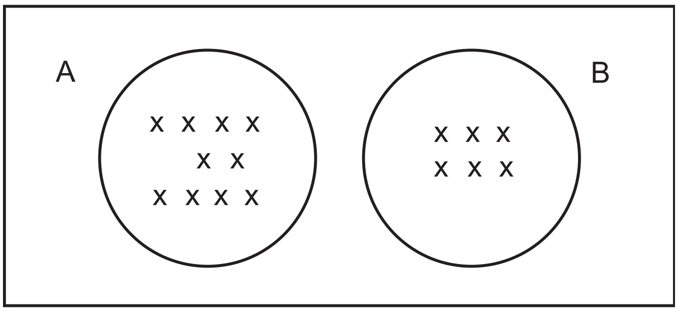

Figura 7.1: Cardinalidade da união de eventos mutuamente exclusivos.

4. $\Pr(\varnothing) = 0$

   Demonstração:

   Como $\#\varnothing = 0$, resulta que $\Pr(\varnothing) = \dfrac{\#\varnothing}{\#\Omega} = \dfrac{0}{\#\Omega} = 0$

   Essa propriedade pode ser obtida também utilizando-se apenas as 3 primeiras. Para isso, note que podemos escrever

   $$\Omega = \Omega \cup \varnothing$$

   Como Ω e $\varnothing$ são mutuamente exclusivos, podemos aplicar a Propriedade 3 para obter

   $$\Pr(\Omega) = \Pr(\Omega \cup \varnothing) = \Pr(\Omega) + \Pr(\varnothing)$$

   Mas

   $$\Pr(\Omega) = \Pr(\Omega) + \Pr(\varnothing) \Rightarrow \Pr(\varnothing) = \Pr(\Omega) - \Pr(\Omega) = 0$$

5. $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$

   Demonstração:

   Vimos na aula anterior que

   $$\Omega = A \cup \overline{A}$$

   Como A e $\overline{A}$ são mutuamente exclusivos, podemos aplicar a Propriedade 3 para obter que

   $$\Pr(\Omega) = \Pr(A) + \Pr(\overline{A})$$

   Mas, pela Propriedade 2, $\Pr(\Omega) = 1$. Logo,

   $$1 = \Pr(A) + \Pr(\overline{A}) \Rightarrow \Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

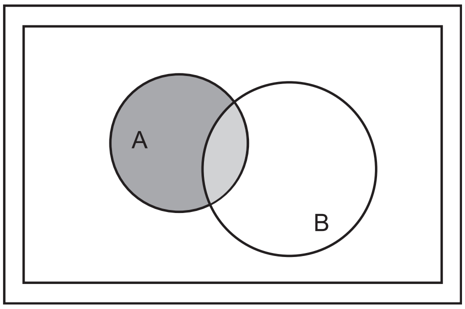

Figura 7.2: Diferença de dois eventos $A - B = A \cap \overline{B}$.

6. $\Pr(A - B) = \Pr(A \cap \overline{B}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$

   Demonstração:

   Veja a **Figura 7.2** para visualizar melhor esse resultado.

   Temos que
   $$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

   O primeiro termo é a parte sombreada mais escura, e o segundo termo é a parte sombreada mais clara. Podemos ver que essas duas partes não têm interseção. Logo, pela Propriedade 3, podemos escrever:

   $$\Pr(A) = \Pr(A - B) + \Pr(A \cap B) \Rightarrow \Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

   Volte à **Figura 7.2** para ver que o evento $B - A = B \cap \overline{A}$ corresponde à parte não sombreada da figura e que

   $$\Pr(B - A) = \Pr(B \cap \overline{A}) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

7. Para dois eventos A e B quaisquer, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

   Demonstração:

   Note que esse resultado generaliza a Propriedade 3 para dois eventos quaisquer, ou seja, não estamos exigindo que A e B sejam mutuamente exclusivos. Veja a **Figura 7.3.**

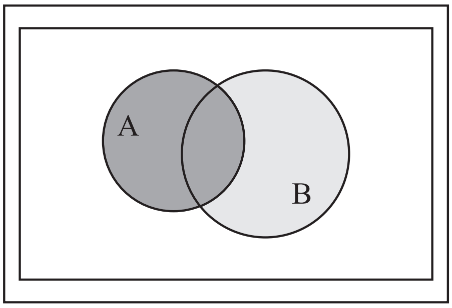

Figura 7.3: União de dois eventos quaisquer.

Toda a parte sombreada representa a união dos dois eventos, que pode ser decomposta nas duas partes com diferentes sombreamentos. A parte mais clara é $B - A$, e a parte mais escura é A, ou seja:

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

Como essas duas partes não têm intersecção, pela Propriedade 3, podemos escrever

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B - A)$$

Mas na Propriedade 6, vimos que $\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$. Substituindo, obtemos que

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(B - A) + \Pr(A) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

8. Se $A \subset B$ então $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

   Demonstração:

   Veja a **Figura 7.4**. Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$; essa é a parte sombreada da figura. Nesse caso, usando a Propriedade 6, temos que

   $$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \Pr(B) - \Pr(A)$$

   mas, pela Propriedade 1, a probabilidade de qualquer evento é não-negativa. Logo,

   $$\Pr(B - A) \geq 0 \Rightarrow \Pr(B) - \Pr(A) \geq 0 \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

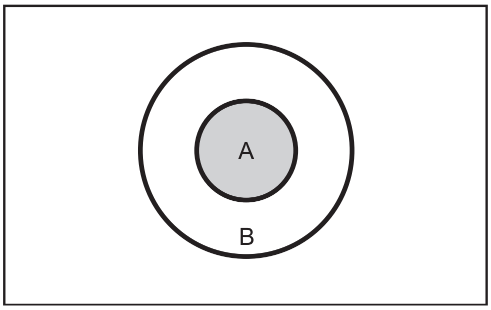

Figura 7.4: Ilustração da propriedade 8: $A \subset B$.

9. $\Pr(A) \leq 1$ para qualquer evento $A \subset \Omega$.

   Demonstração:

   Usando as Propriedades 8 e 2, temos que

$$A \subset \Omega \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(\Omega) = 1 \Rightarrow \Pr(A) \leq 1$$

Resumo das propriedades

Vamos apresentar os resultados vistos anteriormente para facilitar o seu estudo.

Propriedades da probabilidade

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

$$\Pr(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

Exemplos

1. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter face maior que 4?

   Solução:

   Sabemos que $\#\Omega = 6$ e também que o evento de interesse é $A = \{5, 6\}$. Logo, $\Pr(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

2. Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos 2 primeiros naipes são *vermelhas* e as dos dois últimos naipes, *pretas*. Em cada naipe, as cartas podem ser Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Estas três últimas são *figuras* que representam a realeza. Retirando-se ao acaso uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de que seja uma figura? Uma carta preta?

   Solução:

   Como há 52 cartas ao todo, $\#\Omega = 52$. Vamos denotar por F o evento "carta retirada é uma figura" e por P o evento "carta retirada é preta". Em cada um dos 4 naipes há três figuras. Logo, o número total de figuras é 4×3, ou seja, $\#F = 12$. Logo, a probabilidade de retirarmos uma figura é $\Pr(F) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$. Metade das cartas é de cor preta; logo, a probabilidade de que a carta seja preta é $\Pr(P) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$.

3. Um número é escolhido entre os 20 primeiros inteiros, 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o número escolhido seja (i) par? (ii) primo? (iii) quadrado perfeito?

   Solução:

   Vamos denotar por P o evento "número par", por R o evento "número primo" e por Q o evento "quadrado perfeito". Então, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; $P = \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; $Q = \{1, 4, 9, 16\}$. Logo, $\Pr(P) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$; $\Pr(R) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$; $\Pr(Q) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

4. Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 8 bolas verdes. Uma bola é escolhida ao acaso desta urna. Qual é a probabilidade de que (i) a bola não seja verde? (ii) a bola seja branca? (iii) a bola não seja nem branca nem verde?

Solução:

Temos um total de $6+2+8 = 16$ bolas. Logo, $\#\Omega = 16$. Vamos denotar por P, B, V os eventos bola preta, branca e verde, respectivamente.

(i) Queremos a probabilidade de $\overline{V}$, ou seja, do complementar de V. Vimos que $\Pr(\overline{V}) = 1 - \Pr(V) = 1 - \dfrac{8}{16} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\Pr(B) = \dfrac{\#B}{\#\Omega} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

(iii) Se a bola não é branca nem verde, ela tem que ser preta. Note que estamos pedindo $\Pr(\overline{B} \cap \overline{V})$. Pela lei de De Morgan e pelas Propriedades 3 e 4, temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{B} \cap \overline{V}) &= \Pr(\overline{B \cup V}) = 1 - \Pr(B \cup V) \\
&= 1 - [\Pr(B) + \Pr(V)] = 1 - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = \frac{6}{16} \\
&= \frac{3}{8} = \Pr(P)
\end{aligned}$$

5. Consideremos novamente o lançamento de dois dados. Vamos definir os seguintes eventos: $A =$ "soma das faces par", $B =$ "soma das faces maior que 9", $C =$ "soma das faces ímpar menor que 9". Vamos calcular a probabilidade de tais eventos. A visualização do espaço amostral desse experimento pode ser vista na tabela a seguir, na qual, para cada par possível de resultados, apresentamos também a soma das faces:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	$(1,1) \to 2$	$(1,2) \to 3$	$(1,3) \to 4$	$(1,4) \to 5$	$(1,5) \to 6$	$(1,6) \to 7$
	2	$(2,1) \to 3$	$(2,2) \to 4$	$(2,3) \to 5$	$(2,4) \to 6$	$(2,5) \to 7$	$(2,6) \to 8$
	3	$(3,1) \to 4$	$(3,2) \to 5$	$(3,3) \to 6$	$(3,4) \to 7$	$(3,5) \to 8$	$(3,6) \to 9$
	4	$(4,1) \to 5$	$(4,2) \to 6$	$(4,3) \to 7$	$(4,4) \to 8$	$(4,5) \to 9$	$(4,6) \to 10$
	5	$(5,1) \to 6$	$(5,2) \to 7$	$(5,3) \to 8$	$(5,4) \to 9$	$(5,5) \to 10$	$(5,6) \to 11$
	6	$(6,1) \to 7$	$(6,2) \to 8$	$(6,3) \to 9$	$(6,4) \to 10$	$(6,5) \to 11$	$(6,6) \to 12$

Podemos ver que :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c}
(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)
\end{array} \right\} \Rightarrow \#\Omega = 36$$

$$A = \left\{ \begin{array}{c}
(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), \\
(3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), \\
(5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)
\end{array} \right\} \Rightarrow \#A = 18$$

$$B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow \#B = 6$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), \\ (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (6,1), \end{array} \right\} \Rightarrow \#C = 12$$

Logo,

$$\Pr(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad \Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad \Pr(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

6. Em uma urna há 4 bolas brancas e 3 bolas verdes. Duas bolas são retiradas dessa urna, seqüencialmente e sem reposição. Qual é a probabilidade de obtermos (i) 2 bolas brancas? (ii) 2 bolas verdes? (iii) 2 bolas de cores diferentes?

   Solução:

   Vamos indicar por B_1, B_2, B_3 e B_4 as quatro bolas brancas e por V_1, V_2 e V_3 as três bolas verdes. O espaço amostral para este experimento é

$$\Omega = \{(C_1, C_2); \quad C_1, C_2 = B_1, B_2, B_3, B_4, V_1, V_2, V_3; \quad C_1 \neq C_2\}$$

   A primeira bola pode ser qualquer uma; logo, há 7 bolas possíveis. Como a extração é sem reposição, para a segunda bola só há 6 possibilidades. Assim, o número total de pares é $7 \times 6 = 42$.

   (i) O evento $A =$ "2 bolas brancas" é

$$A = \left\{ \begin{array}{l} B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, \\ B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 \end{array} \right\}$$

   Logo, $\Pr(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

   (ii) O evento $B =$ "2 bolas verdes" é

$$B = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_1, V_2V_3, V_3V_1, V_3V_2\}$$

   Logo, $\Pr(B) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

   (iii) O evento $C =$ "bolas de cores diferentes" é o complementar do evento $D =$ "bolas de cores iguais". Por sua vez, $D = A \cup B$ e como A e B são mutuamente exclusivos, $\Pr(D) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.

   Logo, $\Pr(C) = 1 - \Pr(D) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

   Note o trabalho que dá listar todos os elementos de um evento!

É interessante notar o seguinte fato sobre a extração das bolas: em vez de fazermos extrações seqüenciais, podemos retirar 2 bolas simultaneamente. Em ambos os casos, as extrações são sem reposição, ou seja, a mesma bola não pode sair duas vezes. O que muda, então? Nas extrações simultâneas, não podemos diferenciar a ordem das bolas; por exemplo, os pares V_1V_2 e V_2V_1 são os mesmos. Dessa forma, a cardinalidade do espaço amostral fica reduzida por 2, que é 2!, número de maneiras de organizar as 2 bolas. Se fossem 3 bolas, ficaria reduzido por $3! = 6$. Para ajudar na compreensão dessa diferença, vamos listar o espaço amostral nos dois casos, bem como os eventos que estudamos.

Evento	Extrações seqüenciais	Evento	Extrações simultâneas
2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4,$ $B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4,$ $B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4,$ $B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3,$	2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4,$ $B_2B_3, B_2B_4,$ $B_3B_4,$
2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3,$ $V_2V_1, V_2V_3,$ $V_3V_1, V_3V_2,$	2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3,$ $V_2V_3,$
Branca e verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3,$ $B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3,$ $B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3,$ $B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3,$	Uma branca e uma verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3,$ $B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3,$ $B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3,$ B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3
Verde e branca	$V_1B_1, V_1B_2, V_1B_3, V_1B_4,$ $V_2B_1, V_2B_2, V_2B_3, V_2B_4,$ $V_3B_1, V_3B_2, V_3B_3, V_3B_4$		

Note que as probabilidades são as mesmas em ambos os casos:

	Pr(2 verdes)	Pr(2 brancas)	Pr(cores diferentes)
Extrações seqüenciais	$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	$\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$	$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$
Extrações simultâneas	$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$	$\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$	$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

7. Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um. Sorteando-se ao acaso um desses alunos, qual é a probabilidade de que

   (a) não tenha acertado qualquer um dos dois problema?

   (b) tenha acertado apenas o segundo problema?

Solução:

Vamos denotar por P_1 e P_2 os eventos "acertar problema 1" e "acertar problema 2" respectivamente. Os dados do problema nos dão que:

$$\begin{aligned}
\#(P_1 \cap P_2) &= 120 && \text{(acertar os 2)} \\
\#P_1 &= 132 && \text{(acertar o primeiro)} \\
\#\overline{P_2} &= 86 && \text{(errar o segundo)} \\
\#\left[\left(P_1 \cap \overline{P_2}\right) \cup \left(\overline{P_1} \cap P_2\right)\right] &= 54 && \text{(acertar apenas um)}
\end{aligned}$$

O número de alunos que acertaram apenas a primeira é

$$\#\left(P_1 \cap \overline{P}_2\right) = \#P_1 - \#(P_1 \cap P_2) = 132 - 120 = 12$$

Logo, o número de candidatos que acertaram apenas a segunda é

$$\#(\overline{P}_1 \cap P_2) = 54 - 12 = 42$$

Daí segue que o número de alunos que acertaram a segunda questão é

$$\#P_2 = \#(\overline{P}_1 \cap P_2) + \#(P_1 \cap P_2) = 42 + 120 = 162$$

Essas cardinalidades estão ilustradas na **Figura 7.5**.

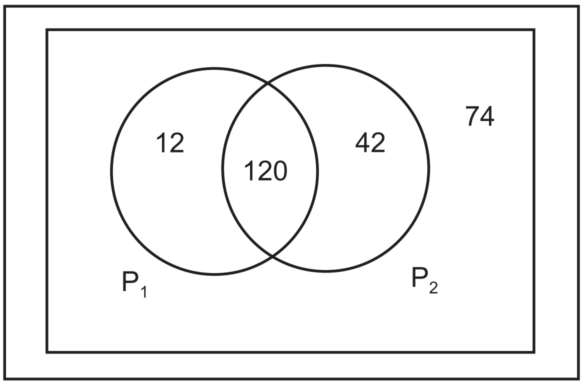

Figura 7.5: Espaço amostral do exemplo sobre acerto de duas questões.

Logo, o número total de alunos é

$$\#\Omega = \#(P_2 \cup \overline{P_2}) = \#P_2 + \#\overline{P_2} = 162 + 86 = 248$$

(a) Pela lei de De Morgan, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2\right) &= \Pr\left(\overline{P_1 \cup P_2}\right) = 1 - \Pr\left(P_1 \cup P_2\right) = \\
&= 1 - [\Pr(P_1) + \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2)] = \\
&= 1 - \frac{132}{248} - \frac{162}{248} + \frac{120}{248} \\
&= \frac{74}{248} = \frac{37}{124}
\end{aligned}$$

(b) Pela Propriedade 6, tem-se que:

$$\Pr\left(P_2 \cap \overline{P}_1\right) = \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2) = \frac{162 - 120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$

Atividade 7.1

1. Em um arquivo há 4 balancetes de orçamento e 3 balancetes de custos. Em uma auditoria, o auditor seleciona aleatoriamente um desses balancetes. Qual é a probabilidade de que seja um balancete de custos? E de orçamento?

2. Considere a situação anterior, só que agora o auditor retira seqüencialmente 2 balancetes sem reposição. Qual é a probabilidade de serem sorteados (i) 2 balancetes de custos? (ii) 2 balancetes de orçamento? (iii) 2 balancetes de tipos diferentes?

Definição axiomática de probabilidade

Anteriormente, vimos que a definição clássica de probabilidade se restringe a espaços amostrais finitos onde os eventos elementares são equiprováveis. Em tal contexto, mesmo com essas restrições, podemos observar o seguinte: a probabilidade é um número que associamos a cada evento de um espaço amostral Ω e esse número - chamado *probabilidade* - satisfaz determinadas propriedades interessantes, que foram deduzidas (ou demonstradas) a partir das três primeiras. Vemos, assim, que probabilidade é uma função definida no conjunto de eventos de um espaço amostral. Na **Figura 7.6** ilustra-se o conceito de probabilidade como uma função, construindo-se um gráfico de barras para representá-la. Isso nos leva à *definição axiomática de probabilidade.*

Segundo o dicionário *Aurélio*:
Axioma
1) Premissa imediatamente evidente que se admite como universalmente verdadeira sem exigência de demonstração.
2) Proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

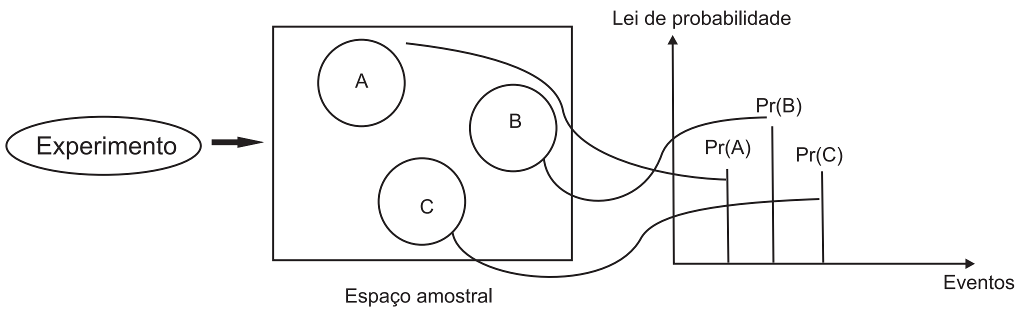

Figura 7.6: Definição axiomática de probabilidade.

Definição axiomática de probabilidade

Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Probabilidade é uma função, denotada por Pr, que associa a cada evento A de Ω um número real $\Pr(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

$$\begin{aligned} \text{Axioma 1} &: \Pr(A) \geq 0 \\ \text{Axioma 2} &: \Pr(\Omega) = 1 \\ \text{Axioma 3} &: A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) \end{aligned}$$

É importante que você observe que os três axiomas correspondem às três primeiras propriedades vistas para a definição clássica de probabilidade. Para a definição clássica, a demonstração da validade dessas três propriedades é imediata – e óbvia – a partir da teoria de conjuntos. No caso geral, elas formam o conjunto de *axiomas da probabilidade*. Como todas as outras propriedades foram deduzidas a partir dessas três propriedades, elas continuam valendo no caso geral, ou seja, a partir dos três axiomas deduzimos as seguintes propriedades:

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\begin{aligned} \Pr(A - B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ \Pr(B - A) &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

$$\Pr(A) \leq 1$$

Exemplos

1. Dados $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $\Pr(A) = \frac{1}{3}$, $\Pr(B) = \frac{1}{3}$, calcule:

   (a) $\Pr(C)$

   (b) $\Pr(A \cup B)$

   (c) $\Pr(\overline{A})$

   (d) $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$

   (e) $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B})$.

   Solução

   (a) Como $\Pr(\Omega) = 1$, resulta que $\Pr(C) = 1 - \Pr(A) - \Pr(B) = \frac{1}{3}$.

   (b) Como A e B são mutuamente exclusivos, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{2}{3}$.

   (c) $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) = \frac{2}{3}$.

   (d) Pela lei de De Morgan, temos que $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

   (e) Pela lei de De Morgan, temos que $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0 = 1$.

2. Dado que $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, verifique se é possível definir uma medida de probabilidade em Ω tal que

$$\begin{aligned} \Pr(\{-1, 1\}) &= 0,6 \\ \Pr(\{0, 1\}) &= 0,9 \\ \Pr(\{-1, 0\}) &= 0,5 \end{aligned}$$

   Justifique sua resposta.

Solução: Note que o evento $\{-1, 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$. Logo, as probabilidades dadas se transformam no seguinte sistema de 3 equações com 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} \Pr(-1) + \Pr(1) &= 0,6 \\ \Pr(0) + \Pr(1) &= 0,9 \\ \Pr(-1) + \Pr(0) &= 0,5 \end{aligned}$$

Da primeira equação, obtemos que $\Pr(1) = 0,6 - \Pr(-1)$. Substituindo na segunda, obtemos o seguinte sistema de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{aligned} \Pr(0) + 0,6 - \Pr(-1) &= 0,9 \\ \Pr(-1) + \Pr(0) &= 0,5 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Pr(0) - \Pr(-1) &= 0,3 \\ \Pr(0) + \Pr(-1) &= 0,5 \end{aligned}$$

Somando termo a termo, resulta que

$$2 \times \Pr(0) = 0,8 \Rightarrow \Pr(0) = 0,4$$

Substituindo, obtemos que

$$\Pr(-1) = 0,5 - \Pr(0) = 0,5 - 0,4 \Rightarrow \Pr(-1) = 0,1$$

Substituindo novamente, obtemos

$$\Pr(1) = 0,6 - \Pr(-1) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

Como todos os valores obtidos estão no intervalo $(0, 1)$ e somam 1, a atribuição de probabilidade dada é válida.

3. Prove que:

$$\Pr\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr(A \cap B)$$

Os dois termos da esquerda dão, respectivamente, as probabilidades dos eventos “apenas A ocorre” e “apenas B ocorre”. Logo, a afirmação trata da probabilidade de que *exatamente um* dos eventos A ou B ocorre.

Solução:

Pela Propriedade 6, temos que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(A \cap \overline{B}\right) &= \Pr(A) - \Pr\left(A \cap B\right) \\
\Pr\left(\overline{A} \cap B\right) &= \Pr(B) - \Pr\left(A \cap B\right)
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, obtém-se que:

$$\Pr\left(A \cap \overline{B}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap B\right) = \Pr(A) - \Pr\left(A \cap B\right) + \Pr(B) - \Pr\left(A \cap B\right)$$

Como $A \cap \overline{B}$ e $\overline{A} \cap B$ são mutuamente exclusivos, a soma de suas probabilidades é a probabilidade da sua união, ou seja,

$$\Pr\left(A \cap \overline{B}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap B\right) = \Pr\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right]$$

Logo,

$$\Pr\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr\left(A \cap B\right)$$

Note que, pela definição clássica de probabilidade, isso significa que

$$\frac{\#\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right]}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B - 2 \times \#\left(A \cap B\right)}{\#\Omega}$$

e, portanto,

$$\#\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = \#(A) + \#(B) - 2 \times \#\left(A \cap B\right)$$

Atividade 7.2

1. Se $\Pr(A) = 1/3$ e $\Pr\left(\overline{B}\right) = 1/4$, A e B podem ser mutuamente exclusivos?

2. Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos tais que $\Pr(A) = 0,5$ e $\Pr(B) = 0,4$.

   (a) Calcule $\Pr(A \cup B)$.

   (b) Calcule $\Pr(B \cap \overline{A})$.

Resumo da Aula

Nesta aula você estudou a definição clássica e a definição axiomática de probabilidade.

- **Definição clássica de probabilidade:** Para um espaço amostral finito Ω em que os eventos elementares são igualmente prováveis, define-se a probabilidade como

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

- **Definição axiomática de probabilidade:** Probabilidade é uma função que associa a cada evento A de um espaço amostral Ω um número $\Pr(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

$$\begin{aligned} \text{Axioma 1} &: \Pr(A) \geq 0 \\ \text{Axioma 2} &: \Pr(\Omega) = 1 \\ \text{Axioma 3} &: A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) \end{aligned}$$

- **Propriedades da probabilidade:**

$$\begin{aligned} &\Pr(\varnothing) = 0 \\ &\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) \\ &\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ &\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\ &A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B) \\ &\Pr(A) \leq 1 \end{aligned}$$

Exercícios

1. Em uma urna há 15 bolas numeradas de 1 a 15. Três bolas são retiradas da urna sem reposição. Qual é a probabilidade de que:

   (a) o menor número seja 7?

   (b) o maior número seja 7?

2. Usando as propriedades já vistas, mostre que

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) = &\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) \\ &- \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) \\ &+ \Pr(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Sugestão: Note que, pela propriedade associativa, você pode escrever $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$. Pense que A e $B \cup C$ são dois eventos e aplique a Propriedade 7, que dá a probabilidade da união de dois eventos.

3. Usando a Propriedade 6, mostre as seguintes igualdades:

   (a) $\Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)$

   (b) $\Pr(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$

4. Em uma cidade há três clubes A, B, C. Em um grupo de 1000 famílias constatou-se que 470 são sócias do clube A; 420 são sócias do clube B, 315 são sócias do clube C; 110 são sócias dos clubes A e B; 220 são sócias dos clubes A e C; 140 são sócias dos clubes B e C e 75 são sócias dos 3 clubes. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual é a probabilidade de que ela

   (a) não seja sócia de qualquer um dos clubes?

   (b) seja sócia de apenas um clube?

   (c) seja sócia de pelo menos dois clubes?

5. Em um levantamento em um bairro de 1.000 moradores, verifica-se que:

   - 220 têm curso superior;
   - 160 são casados;
   - 100 estão desempregados;
   - 50 têm curso superior, são casados e estão empregados;
   - 60 têm curso superior e estão desempregados;
   - 20 têm curso superior, são casados e estão desempregados.

     Escolhe-se ao acaso um morador desse bairro. Qual é a probabilidade de que ele

   (a) tenha curso superior e seja casado?

   (b) ou tenha curso superior e seja casado ou esteja empregado?

   (c) ou tenha curso superior ou esteja desempregado?

6. Um lote é formado por 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso. Ache a probabilidade de que:

(a) ele não tenha defeitos;

(b) ele não tenha defeitos graves;

(c) ele seja perfeito ou tenha defeitos graves.

7. Quatro bolsas de estudo serão sorteadas entre 30 estudantes, dos quais 12 são do sexo masculino e 18 são do sexo feminino. Qual a probabilidade de que haja entre os sorteados:

   (a) uma pessoa do sexo masculino?

   (b) no máximo uma pessoa do sexo feminino?

   (c) pelo menos uma pessoa de cada sexo?

Solução das Atividades

Atividade 7.1

1. Vamos denotar por C o evento "balancete de custo" e por O o evento "balancete de orçamento". Temos:

$$\#O = 4 \qquad \#C = 3 \qquad \#\Omega = 7$$

Logo,

$$\Pr(O) = \frac{4}{7} \qquad \Pr(C) = \frac{2}{7}$$

2. O espaço amostral para o experimento do sorteio seqüencial de 2 balancetes sem reposição é

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_1, O_2O_3, O_2O_4, \\ O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4, O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3, \\ O_1C_1, O_1C_2, O_1C_3, O_2C_1, O_2C_2, O_2C_3, \\ O_3C_1, O_3C_2, O_3C_3, O_4C_1, O_4C_2, O_4C_3, \\ C_1O_1, C_1O_2, C_1O_3, C_1O_4, C_2O_1, C_2O_2, \\ C_2O_3, C_2O_4, C_3O_1, C_3O_2, C_3O_3, C_3O_4, \\ C_1C_2, C_1C_3, C_2C_1, C_2C_3, C_3C_1, C_3C_2 \end{array} \right\}$$

Logo, $\#\Omega = 42$.

(i) Seja $A =$ "dois balancetes de custos". Então,

$$A = \{C_1C_2, C_1C_3, C_2C_1, C_2C_3, C_3C_1, C_3C_2\}$$

e $\Pr(A) = \dfrac{6}{42} = \dfrac{1}{7}$.

(ii) Seja $B =$ "dois balancetes de orçamento". Então,

$$B = \left\{ \begin{array}{c} O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_1, O_2O_3, O_2O_4, \\ O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4, O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3 \end{array} \right\}$$

e $\Pr(B) = \dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$.

(iii) Seja $C =$ "dois balancetes de tipos diferentes". Então

$$C = \left\{ \begin{array}{c} O_1C_1, O_1C_2, O_1C_3, O_2C_1, O_2C_2, O_2C_3, \\ O_3C_1, O_3C_2, O_3C_3, O_4C_1, O_4C_2, O_4C_3, \\ C_1O_1, C_1O_2, C_1O_3, C_1O_4, C_2O_1, C_2O_2, \\ C_2O_3, C_2O_4, C_3O_1, C_3O_2, C_3O_3, C_3O_4, \end{array} \right\}$$

e $\Pr(C) = \dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$.

Atividade 7.2

1. $\Pr(B) = 1 - \Pr(\overline{B}) = \frac{3}{4}$. Se A e B fossem mutuamente exclusivos, teríamos que ter $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1$. Logo, A e B têm que ter interseção.

2. Do enunciado, concluímos que $A \cap B = \varnothing$. Logo,

   (a) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = 0,5 + 0,4 = 0,9$

   (b) $\Pr(B \cap \overline{A}) = \Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0,4 - 0 = 0,4$

Solução dos Exercícios

1. (a) Se o menor número é 7, isso significa que uma das bolas é a de número 7 e as outras 2 têm número de 8 a 15 e a ordem não importa. A probabilidade de sortear a bola 7 é $\dfrac{1}{15}$. Se a bola 7 é sorteada, sobram 14, das quais 8 têm número maior que 7. A probabilidade de sortear duas com número maior que 7, nesse caso, é $\dfrac{8}{14} \times \dfrac{7}{13}$. Como a ordem não importa, existem $\binom{3}{1}$ maneiras de sortear essas 3 bolas. Logo, a solução é

   $$7, > 7, > 7 \text{ em qualquer ordem} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{4}{65}$$

(b) $7, < 7, < 7$ em qualquer ordem $\rightarrow \quad \frac{1}{15} \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{3}{91}$

2. Aqui vamos usar a Propriedade 7, que dá a probabilidade da união de 2 eventos e também a propriedade distributiva da interseção e união, vista na aula anterior.

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr\left[(A \cup B) \cup C\right] = \\
&= \Pr(A \cup B) + \Pr(C) - \Pr\left[(A \cup B) \cap C\right] = \\
&= \left[\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)\right] + \Pr(C) - \\
&\quad - \Pr\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right] \\
&= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) + \Pr(C) - \\
&\quad - \{\Pr(A \cap C) + \Pr(B \cap C) - \Pr\left[(A \cap C) \cap (B \cap C)\right]\}
\end{aligned}$$

Mas $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) \\
&\quad - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) \\
&\quad + \Pr(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Note que, como todos os termos estão divididos por $\#\Omega$, esse resultado vale também para a cardinalidade da união de três eventos $-$ basta substituir Pr por $\#$.

3. A Propriedade 6 nos diz que $\Pr(A \cap \overline{B}) = \Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$

(a) Esse resultado trata da probabilidade de ocorrer A e B, mas não C. Usando a propriedade associativa, temos que

$$\Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = \Pr\left[(A \cap B) \cap \overline{C}\right] = \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)$$

Veja a **Figura 7.7**. Toda a parte sombreada corresponde à ocorrência de A e B, ou seja, $A \cap B$. A parte sombreada mais escura é o evento de interesse: $A \cap B \cap \overline{C}$ e a parte sombreada mais clara é $A \cap B \cap C$.

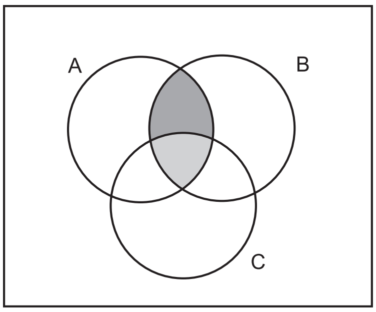

Figura 7.7: Ocorrência dos eventos A e B mas não de C - Exercício 6a.

(b) Esse resultado trata da probabilidade de ocorrer apenas A, dentre os três eventos. Usando as propriedades comutativa e associativa, mais o resultado da letra (a), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= \Pr(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) = \Pr\left[\left(A \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right] \\
&= \Pr(A \cap \overline{C}) - \Pr(A \cap \overline{C} \cap B) \\
&= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B \cap \overline{C}) \\
&= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - [\Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)] \\
&= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Veja a **Figura 7.8**. Toda a parte sombreada corresponde ao evento A. A parte sombreada mais escura corresponde ao evento de interesse: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Note que se subtrairmos $A \cap B$ e $A \cap C$, estaremos subtraindo duas vezes $A \cap B \cap C$; aí, temos que somar $A \cap B \cap C$ uma vez para compensar.

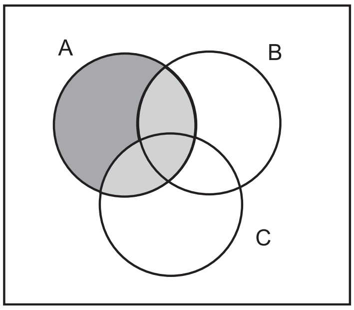

Figura 7.8: Ocorrência de A, mas não de B e C - Exercício 6b.

4. $\#A = 470$ $\#B = 420$ $\#C = 315$
$\#(A \cap B) = 110$ $\#(A \cap C) = 220$ $\#(B \cap C) = 140$
$\#(A \cap B \cap C) = 75$ $\#\Omega = 1.000$

Veja a **Figura 7.9**

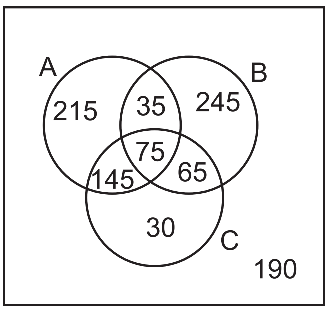

Figura 7.9: Solução do exercício sobre os 3 clubes de uma cidade.

(a) Note que o evento $A \cup B \cup C$ corresponde ao evento "família sorteada é sócia de pelo menos um clube". O problema pede "não é sócia de qualquer clube", ou seja, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Pelas leis de De Morgan e do evento complementar, temos que

$$\Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) \\ &\quad - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

e, para o problema,

$$\begin{aligned} \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) &= 1 - \Pr(A \cup B \cup C) = \\ &= 1 - 0,47 - 0,42 - 0,315 + 0,11 + 0,22 + 0,140 - 0,075 \\ &= 0,19 \end{aligned}$$

(b) O problema pede

$$\Pr\left[\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right]$$

Como os três eventos são mutuamente exclusivos, temos que

$$\begin{aligned} &\Pr\left[\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right] \\ = \;&\Pr\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \end{aligned}$$

O primeiro termo se refere àqueles que são sócias apenas de A, o segundo termo, apenas de B e o terceiro termo, apenas de C. Usando a letra (b) do exercício anterior, temos que

$$\begin{aligned} \Pr\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) + \\ &\quad + \Pr(A \cap B \cap C) \qquad (7.2) \\ &= 0,47 - 0,11 - 0,22 + 0,075 \\ &= 0,215 \qquad (7.3) \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que

$$\begin{aligned} \Pr\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) - \Pr(B \cap C) + \\ &\quad + \Pr(A \cap B \cap C) \qquad (7.4) \\ &= 0,42 - 0,11 - 0,14 + 0,075 \\ &= 0,245 \qquad (7.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right) &= \Pr(C)-\Pr(A\cap C)-\Pr(B\cap C)+\\
&\quad+\Pr(A\cap B\cap C) &(7.6)\\
&= 0,315-0,22-0,14+0,075\\
&= 0,03 &(7.7)
\end{aligned}$$

e a probabilidade pedida é $0,215+0,245+0,03=0,49$.

(c) Como são 3 clubes, uma família pode ser sócia de 3, 2, 1, ou 0. Nesse caso, o evento F = "ser sócio de pelo menos 2" é o complementar do evento "ser sócio de no máximo 1" e esse, por sua vez, é a união dos eventos "ser sócio de nenhum" e "ser sócio de exatamente 1", cujas probabilidades foram calculadas nas letras (a) e (b). Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(F) &= \Pr\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)+\Pr(A\cap\overline{B}\cap C)+\Pr\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)+\Pr\left(A\cap B\cap C\right)\\
&= 1-0,19-0,49=0,32
\end{aligned}$$

5. Sejam os eventos S = "ter curso superior", C = "ser casado", D = "estar desempregado". O problema dá que

$$\begin{aligned}
\Pr(S) &= 0,22 \qquad \Pr(C)=0,16 \qquad \Pr(D)=0,10\\
\Pr\left(S\cap C\cap\overline{D}\right) &= 0,05 \qquad \Pr(S\cap D)=0,06 \qquad \Pr(S\cap C\cap D)=0,02
\end{aligned}$$

(a) O problema pede $\Pr(S\cap C)$. Temos que

$$\Pr(S\cap C)=\Pr(S\cap C\cap D)+\Pr\left(S\cap C\cap\overline{D}\right)=0,02+0,05=0,07$$

(b) O problema pede $\Pr\left[(S\cap C)\cup\overline{D}\right]$. Temos que

$$\Pr\left[(S\cap C)\cup\overline{D}\right]=\Pr(S\cap C)+\Pr\left(\overline{D}\right)-\Pr\left(S\cap C\cap\overline{D}\right)=0,07+0,90-0,05=0,92$$

(c) O problema pede $\Pr(S\cup D)$. Temos que

$$\Pr(S\cup D)=\Pr(S)+\Pr(D)-\Pr(S\cap D)=0,22+0,10-0,06=0,26$$

6. Sejam os eventos B = "artigo bom", M = "artigo com defeitos menores" e G = "artigo com defeitos graves". Pelos dados do problema, temos que

$$\Pr(B)=\frac{10}{16} \qquad \Pr(M)=\frac{4}{16} \qquad \Pr(G)=\frac{2}{16}$$

(a) Pr(não ter defeito) $=\Pr(B)=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$

(b) Pr(não ter defeito grave) $=\Pr\left(\overline{G}\right)=1-\Pr(G)=\dfrac{14}{16}=\dfrac{7}{8}$

(c) Pr (ser perfeito ou ter defeito grave) = Pr $(B \cup G)$ = Pr (B) + Pr $(G) = \frac{10}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{4}$. Note que esses são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, $\Pr(B \cap G) = 0$.

7. O número total de formas de distribuir as 4 bolsas é

$$\#\Omega = \binom{30}{4}$$

(a) Uma bolsa para um aluno do sexo masculino significa que 3 bolsas vão para alunos do sexo feminino. Existem $\binom{12}{1}$ maneiras de escolher o aluno do sexo masculino e $\binom{18}{3}$ maneiras de escolher os 3 do sexo feminino. Logo, pelo princípio fundamental da multiplicação,

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{1 do sexo masculino}) &= \frac{\binom{12}{1}\binom{18}{3}}{\binom{30}{4}} = \frac{12 \times \dfrac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2}}{\dfrac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2}} \\
&= \frac{1.088}{3.045} = 0,357307.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\Pr(\text{nenhum do sexo feminino}) + \Pr(\text{1 do sexo feminino}) \\
= \;& \frac{\binom{12}{4}}{\binom{30}{4}} + \frac{\binom{12}{3}\binom{18}{1}}{\binom{30}{4}} = \frac{4.455}{27.405} = 0,162562
\end{aligned}$$

(c) Pr(pelo menos 1 de cada sexo) = 1−Pr(nenhum do sexo masculino)− Pr(nenhum do sexo feminino) =

$$\begin{aligned}
&\Pr(\text{pelo menos 1 de cada sexo}) \\
= \;& 1 - \Pr(\text{nenhum do sexo masculino}) \\
&\quad - \Pr(\text{nenhum do sexo feminino}) \\
= \;& 1 - \frac{\binom{18}{4}}{\binom{30}{4}} - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{30}{4}} = 0,870279
\end{aligned}$$