Aula 10 – Variáveis aleatórias discretas

Nesta aula você aprenderá um conceito muito importante da teoria de probabilidade: o conceito de variável aleatória. Você verá que as variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidade são a ferramenta fundamental na modelagem de fenômenos aleatórios. Definiremos as variáveis aleatórias discretas e contínuas, mas nesta aula iremos nos concentrar nas variáveis discretas, apresentando os seguintes conceitos:

- função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta;
- função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta;
- funções de variáveis aleatórias discretas;

Esses conceitos serão apresentados através de exemplos clássicos, envolvendo basicamente moedas, dados e baralho, mas ao final da aula apresentaremos exemplos completos abordando situações práticas.

Variável aleatória

Consideremos o seguinte experimento aleatório: sortear uma amostra de 20 funcionários de uma empresa que tem 500 funcionários. O espaço amostral deste experimento é formado por todas as amostras possíveis e, como a ordem não importa e não deve haver repetição de funcionários, o número total de tais amostras é $\#\Omega = \binom{500}{20}$. Cada elemento desse espaço amostral é formado pela relação dos 20 funcionários sorteados. No entanto, em geral, o interesse não está nos funcionários em si, mas, sim, em alguma característica deste funcionário, por exemplo, sua altura, se tem curso superior ou não, número de dependentes, etc. Dessa forma, poderíamos calcular a altura média dos funcionários da amostra, o número médio de dependentes, a proporção de funcionários com curso superior, etc. Com isso, a cada amostra possível, ou seja, a cada ponto do espaço amostral associamos um número. Essa é a definição de variável aleatória.

Definição

Uma **variável aleatória** é uma função real (isto é, que assume valores em $\mathbb{R}$) definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de Ω um número real.

Por questões de simplicidade, muitas vezes abreviaremos a expressão variável aleatória por v.a.. A convenção usual para representar uma v.a. consiste em usar letras maiúsculas como X, Y, etc. Um valor específico, mas genérico, dessa variável será representado pela letra minúscula correspondente: x, y, etc.

Exemplo 10.1

Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. Como já visto, o espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados (i, j) onde $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Esse é um experimento onde o espaço amostral não é formado por números. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados. Nesse caso, a v.a. X = "máximo das 2 faces" pode assumir os valores $1, 2, 3, 4, 5, 6$, conforme ilustrado na **Figura 10.1**. Aí podemos ver que o valor $X = 2$ corresponde ao evento $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

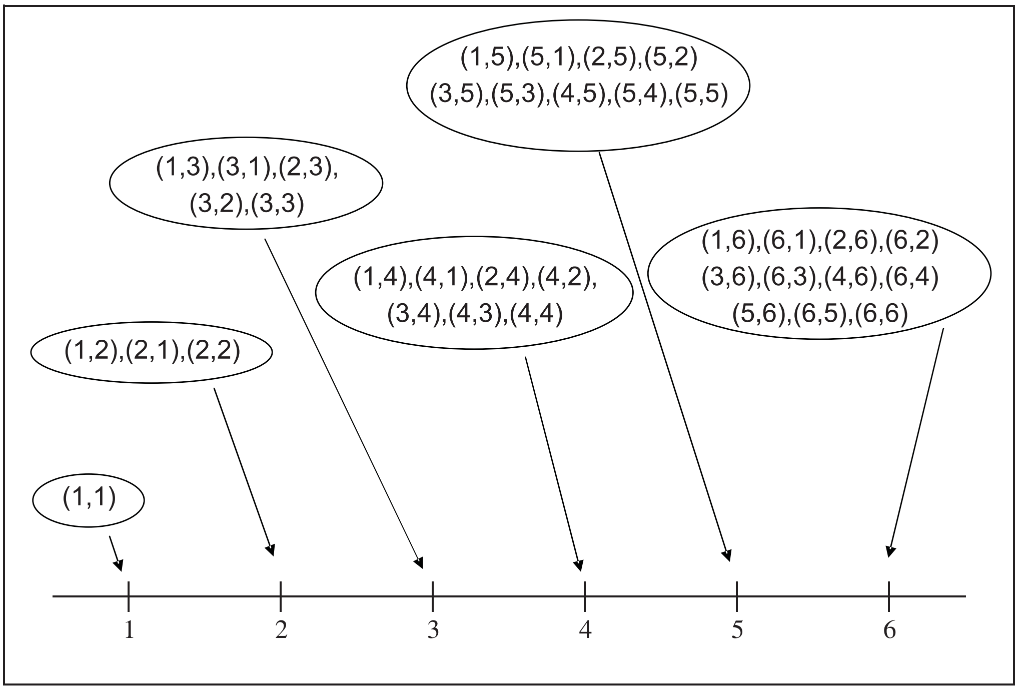

Figura 10.1: Variável aleatória X = "máximo das faces de 2 dados".

No exemplo anterior, a variável aleatória podia assumir um número finito de valores. Suponhamos, agora, que o experimento consistisse em sortear uma pessoa de um grupo de 20 adultos e a esse experimento associássemos a v.a. X = "altura (em cm) da pessoa sorteada". Nesse caso, os possíveis valores de X estariam em um intervalo, digamos, $(120, 210)$. Isso nos leva à seguinte definição.

> **Definição**
> Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) é um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem é um conjunto não enumerável dizemos que a variável aleatória é **contínua**.

Lembre-se que, na primeira parte do curso, estudamos as variáveis quantitativas discretas e contínuas.

Nesta aula e nas duas próximas estudaremos apenas as variáveis aleatórias discretas, apresentando vários conceitos relacionados a elas.

Função de distribuição de probabilidade

Os valores de uma v.a. discreta são definidos a partir do espaço amostral de um experimento aleatório. Sendo assim, é natural perguntarmos "qual é a probabilidade do valor x"? No exemplo do máximo das 2 faces de um dado da **Figura 10.1**, por exemplo, vimos que o valor $X = 2$ corresponde ao evento $A = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$, enquanto o valor $X = 1$ corresponde ao evento $B = \{(1,1)\}$. Sendo assim, é de se esperar que o valor 2 seja mais provável que o valor 1. Podemos calcular a probabilidade de $X = 2$ usando a seguinte equivalência de eventos:

$$\{X = 2\} \equiv A = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Dessa forma, podemos definir

$$\Pr(X = 2) = \Pr(A) = \frac{3}{36}$$

De maneira análoga obtemos que

$$\begin{array}{lll} \Pr(\{X=1\}) = \dfrac{1}{36} & \Pr(\{X=3\}) = \dfrac{5}{36} & \\ \Pr(\{X=4\}) = \dfrac{7}{36} & \Pr(\{X=5\}) = \dfrac{9}{36} & \Pr(\{X=6\}) = \dfrac{11}{36} \end{array}$$

Esse exemplo ilustra o conceito de função de distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta.

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta. A **função de distribuição de probabilidades** de X é a função $f_X(x)$ que associa, a cada valor possível x de X, sua respectiva probabilidade, calculada da seguinte forma: $f_X(x)$ é a probabilidade do evento $\{X = x\}$ consistindo em todos os resultados do espaço amostral que deram origem ao valor x.

$$f_X(x) = \Pr(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \Pr(\omega) \tag{10.1}$$

Para não sobrecarregar o texto, omitiremos os colchetes oriundos da notação de evento/conjunto e escreveremos $\Pr(X = x)$ no lugar de $\Pr(\{X = x\})$, que seria a forma correta. Além disso, abreviaremos por fdp o termo função de distribuição de probabilidade.

Das propriedades (axiomas) da probabilidade resultam os seguintes fatos sobre a função de distribuição de probabilidades de uma v.a. X:

$$f_X(x) \geq 0 \tag{10.2}$$

$$\sum_x f_X(x) = 1 \tag{10.3}$$

onde $\sum_x$ indica somatório ao longo de todos os possíveis valores de X. Note que a segunda propriedade é decorrente do axioma $\Pr(\Omega) = 1$, pois os eventos $\{X = x\}$ são mutuamente exclusivos e formam uma partição do espaço amostral. Essas são as *condições definidoras de uma função de distribuição de probabilidade.*

Cálculo da função de distribuição de probabilidade

O cálculo da fdp de uma v.a. X qualquer se dá em três etapas:

- primeiro, temos que identificar todos os possíveis valores x da v.a. X;
- segundo, temos que identificar os resultados que dão origem a cada valor x e suas respectivas probabilidades;
- finalmente, temos que somar todas essas probabilidades para obter $f_X(x)$.

Exemplo 10.2

Considerando novamente a v.a. definida na **Figura 10.1**, podemos resumir a fdp da variável em questão na seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exemplo 10.3

Consideremos novamente o lançamento de dois dados, mas agora vamos definir a seguinte v.a. X = "soma das 2 faces". Para facilitar a solução desse problema, vamos construir uma tabela de duas entradas, onde cada dimensão representa o resultado de um dado e em cada cela temos a soma das duas faces.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Como cada ponto do espaço amostral é equiprovável, a fdp de X é:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Representação gráfica da função de distribuição de probabilidade

A função de distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta X que assume um número finito de valores pode ser representada por um gráfico de colunas, onde a cada valor de X corresponde uma coluna cuja altura representa a probabilidade do respectivo valor. Na **Figura 10.2** ilustra-se a fdp da v.a. X = "soma das faces de 2 dados".

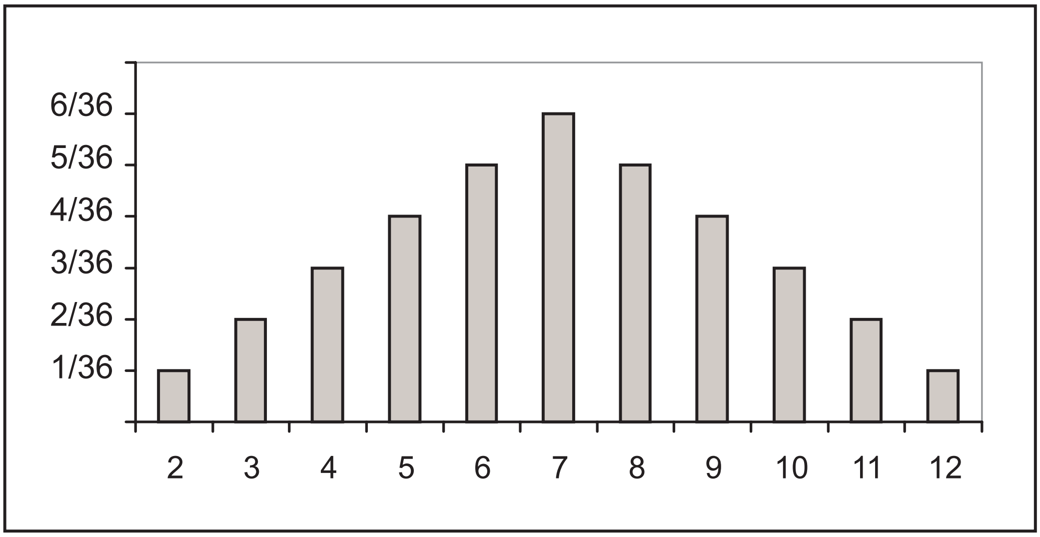

Figura 10.2: Função de distribuição de probabilidade de X = "soma das faces de 2 dados".

Exemplo 10.4

Dentre os 5 alunos de um curso com coeficiente de rendimento (CR) superior a 8,5, dois serão sorteados para receber uma bolsa de estudos. Os CRs desses alunos são: 8,8; 9,2; 8,9; 9,5; 9,0.

1. (a) Designando por A, B, C, D, E os alunos, defina um espaço amostral para esse experimento.

   (b) Seja X = CR médio dos alunos sorteados. Liste os possíveis valores de X.

   (c) Liste o evento $X \geq 9,0$.

   (d) Encontre a fdp de X e calcule $\Pr(X \geq 9)$.

   Solução:

   (a) Note que aqui a ordem não importa; logo, $\#\Omega = \binom{5}{2} = 10$. Mais especificamente,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (A,B)\,,(A,C)\,,(A,D)\,,(A,E)\,, \\ (B,C)\,,(B,D)\,,(B,E)\,, \\ (C,D)\,,(C,E)\,,(D,E) \end{array} \right\}$$

(b) Usando uma tabela de duas entradas podemos representar os valores de X da seguinte forma:

	$A(8,8)$	$B(9,2)$	$C(8,9)$	$D(9,5)$	$E(9,0)$
$A(8,8)$		$\frac{8{,}8+9{,}2}{2} = \mathbf{9,0}$	$8,85$	$\mathbf{9,15}$	$8,90$
$B(9,2)$			$\mathbf{9,05}$	$\mathbf{9,35}$	$\mathbf{9,10}$
$C(8,9)$				$\mathbf{9,20}$	$8,95$
$D(9,5)$					$\mathbf{9,25}$
$E(9,0)$					

(c) $\{X \geq 9\} = \{(A,B), (A,D), (B,C), (B,D), (B,E), (C,D), (D,E)\}$.

(d) Como todos os pontos do espaço amostral são equiprováveis, a fdp de X é:

x	8,85	8,90	8,95	9,00	9,05	9,10	9,15	9,20	9,25	9,35
$p_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

e $\Pr(X \geq 9) = \frac{7}{10}$.

Exemplo 10.5

Um homem possui 4 chaves em seu bolso. Como está escuro, ele não consegue ver qual a chave correta para abrir a porta de sua casa. Ele testa cada uma das chaves até encontrar a correta.

1. (a) Defina um espaço amostral para esse experimento.
   (b) Defina a v.a. $X =$ número de chaves experimentadas até conseguir abrir a porta (inclusive a chave correta). Quais são os valores de X?
   (c) Encontre a fdp de X.

Solução:

(a) Vamos designar por C a chave da porta e por E_1, E_2 e E_3 as outras chaves. Se ele pára de testar as chaves depois que acha a chave correta, então o espaço amostral é:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} C, E_1C, E_2C, E_3C, \\ E_1E_2C, E_2E_1C, E_1E_3C, E_3E_1C, E_2E_3C, E_3E_2C, \\ E_1E_2E_3C, E_1E_3E_2C, E_2E_1E_3C, \\ E_2E_3E_1C, E_3E_1E_2C, E_3E_2E_1C \end{array} \right\}$$

(b) Podemos ver, na listagem de Ω, que $X = 1, 2, 3, 4$.

(c) Note que todas as chaves têm a mesma chance de serem sorteadas e obviamente cada chave testada não é colocada de volta no bolso. Feitas essas observações, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 1) = \Pr(C) = \frac{1}{4} \\
\Pr(X &= 2) = \Pr(E_1C \cup E_2C \cup E_3C) \\
&= \Pr(E_1C) + \Pr(E_2C) + \Pr(E_3C) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\
\Pr(X &= 3) = \Pr(E_1E_2C) + \Pr(E_2E_1C) + \Pr(E_1E_3C) \\
&\quad + \Pr(E_3E_1C) + \Pr(E_2E_3C) + \Pr(E_3E_2C) \\
&= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
\Pr(X &= 4) = \Pr(E_1E_2E_3C) + \Pr(E_1E_3E_2C) + \Pr(E_2E_1E_3C) + \\
&\quad \Pr(E_2E_3E_1C) + \Pr(E_3E_1E_2C) + \Pr(E_3E_2E_1C) \\
&= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Logo, a fdp de X é

x	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Atividade 10.1

1. Cinco cartas são extraídas de um baralho comum (52 cartas, 13 de cada naipe) sem reposição. Defina a v.a. X = número de cartas vermelhas sorteadas.

   (a) Quais são os possíveis valores de X?

   (b) Encontre a fdp de X.

2. Numa urna há 7 bolas brancas e 4 bolas verdes. Cinco bolas são extraídas dessa urna sem reposição. Defina a v.a. X = número de bolas verdes.

   (a) Quais são os possíveis valores de X?

   (b) Encontre a fdp de X.

3. Repita o exercício anterior para o caso de extrações com reposição.

Função de distribuição acumulada

A partir da função de distribuição de probabilidades de uma v.a. discreta X é possível calcular a probabilidade de qualquer evento associado a ela. Por exemplo, considere novamente a fdp da variável aleatória $X =$ "máximo das faces de 2 dados":

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

A partir dela, podemos calcular as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 5) &= \Pr(\{X = 5\} \cup \{X = 6\}) = \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) = \frac{20}{36} \\
\Pr(X \leq 2) &= \Pr(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = \frac{4}{36}
\end{aligned}$$

Na verdade, a fdp de uma variável aleatória discreta X nos dá toda a informação sobre X. Existe uma outra função com tal característica (na verdade, sob determinadas condições, podemos achar outras funções com tal característica), que é a *função de distribuição acumulada* de X, cuja definição apresentamos a seguir.

Definição

Dada uma variável aleatória (discreta) X, a **função de distribuição acumulada** de X é definida por

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{10.4}$$

É interessante notar que a função F_X está definida para *todo* número real x. Antes de passar às propriedades teóricas da função de distribuição acumulada (usaremos a abreviação fda), também conhecida como função de distribuição, vamos ver um exemplo.

Exemplo 10.6

Continuando com a fdp da v.a. $X =$ "máximo das faces de 2 dados", devemos notar inicialmente que nenhum valor menor que 1 é possível. Logo,

$$F_X(x) = 0 \qquad \forall x < 1$$

Para $x = 1$ temos que

$$\begin{aligned} F_X(1) &= \Pr(X \leq 1) = \Pr(X < 1) + \Pr(X = 1) \\ &= 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \end{aligned} \tag{10.5}$$

Para qualquer valor de x tal que $1 < x < 2$, temos que $f_X(x) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(1 < X < x) \\ &= F_X(1) + 0 = F_X(1) \qquad \forall x : 1 < x < 2 \end{aligned} \tag{10.6}$$

Juntando os resultados (10.5) e (10.6), obtemos que

$$F_X(x) = F_X(1) = \frac{1}{36} \qquad \forall x : 1 \leq x < 2$$

Com raciocínio análogo, obtemos que

$$\begin{aligned} F_X(2) &= \Pr(X \leq 2) \\ &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(1 < X < 2) + \Pr(X = 2) \\ &= \frac{1}{36} + 0 + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} \end{aligned} \tag{10.7}$$

e para $x \in (2, 3)$

$$F_X(x) = \Pr(X \leq 2) + \Pr(2 < X < x) = F_X(2) + 0 = F_X(2) \quad \forall x : 2 < x < 3 \tag{10.8}$$

ou seja,

$$F_X(x) = F_X(2) = \frac{4}{36} \qquad \forall x : 2 \leq x < 3$$

Continuando obtemos que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(3) = \frac{9}{36} \qquad \forall x : 3 \leq x < 4 \\ F_X(x) &= F_X(4) = \frac{16}{36} \qquad \forall x : 4 \leq x < 5 \\ F_X(x) &= F_X(5) = \frac{25}{36} \qquad \forall x : 5 \leq x < 6 \end{aligned}$$

Para $x \geq 6$ devemos notar que o evento $\{X \leq x\}$ corresponde ao espaço amostral completo; logo

$$F_X(x) = 1 \qquad \forall\, x \geq 6$$

Dessa forma, a fda de X é a seguinte função

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/36 & 1 \leq x < 2 \\ 4/36 & 2 \leq x < 3 \\ 9/36 & 3 \leq x < 4 \\ 16/36 & 4 \leq x < 5 \\ 25/36 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Na **Figura 10.3** temos o gráfico de tal função, onde a escala vertical está em múltiplos de $\frac{1}{36}$. Note que esse gráfico tem a forma de uma "escada", com saltos de descontinuidade nos valores da v.a. X.

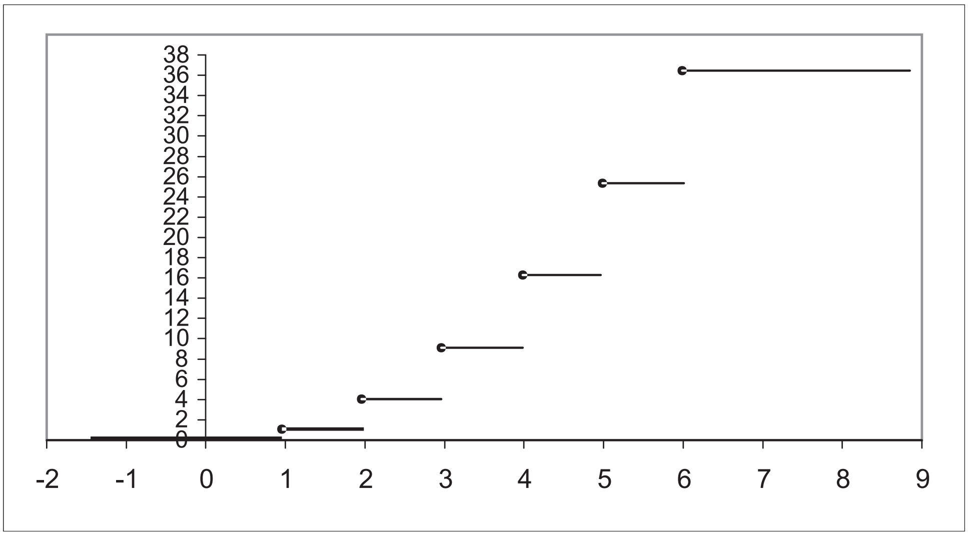

Figura 10.3: Função de distribuição acumulada de X = "máximo das faces de 2 dados".

Propriedades da função de distribuição acumulada

Os axiomas da probabilidade e as propriedades deles decorrentes nos permitem obter as seguintes propriedades da função de distribuição acumulada de uma v.a. X.

1. Como $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ segue que

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{10.9}$$

2. Do axioma $\Pr(\Omega) = 1$ resulta que

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 \tag{10.10}$$

Note que o evento $\{X < \infty\}$ corresponde a todos os números reais e, portanto, inclui todos os valores de X.

3. Da propriedade $\Pr(\varnothing) = 0$ resulta que

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \tag{10.11}$$

Note que o evento $\{X < -\infty\}$ corresponde ao evento impossível.

4. $F_X(x)$ é uma função não decrescente, isto é, se

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \le F_X(b) \tag{10.12}$$

Esse resultado segue do fato de que, se $a < b$, então o evento $\{X \le a\} \subset \{X \le b\}$ e, portanto, $\Pr(\{X \le a\}) \le \Pr(\{X \le b\})$, ou seja, $F_X(a) \le F_X(b)$.

5. $F_X(x)$ é uma função contínua à direita, isto é

$$F_X(b) = \lim_{h \to 0} F_X(b+h) \triangleq F_X\left(b^+\right) \tag{10.13}$$

6. A fdp de X pode ser calculada a partir da fda da seguinte forma:

$$f_X(x) = F_X(x) - \lim_{\delta \to 0} F_X(x - \delta) \triangleq F_X(x) - F_X\left(x^-\right) \tag{10.14}$$

Note que isso significa que $f_X(x)$ é igual ao tamanho do "salto" da fda no ponto x.

A conclusão que podemos tirar é a seguinte: a função de distribuição de probabilidades (fdp) e a função de distribuição acumulada (fda), ambas nos dão todas as informações sobre a variável aleatória X e a partir de uma podemos obter a outra, de forma inequívoca.

Exemplo 10.7

Dada a função

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/2 & 1 \le x < 2 \\ k & 2 \le x < 3 \\ 3/4 & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

onde k é uma constante, determine os possíveis valores de k para que $F(x)$ seja a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X. Em seguida, determine a função de distribuição de probabilidade desta v.a. X.

Solução:

Como a fda de qualquer v.a. X tem que ser uma função não decrescente, concluímos que k tem que ser maior ou igual a $\frac{1}{2}$. Pela mesma razão, k tem que ser menor ou igual a $\frac{3}{4}$. Dessa forma, os possíveis valores de k pertencem ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Os valores possíveis da v.a. X correspondem aos pontos de descontinuidade da função $F(x)$. Logo, X assume os valores $1, 2, 3, 4$. As probabilidades desses valores são dadas pelo tamanho do "salto" de $F(x)$:

$$\begin{aligned}
P(X &= 1) = \frac{1}{2} \\
P(X &= 2) = k - \frac{1}{2} \\
P(X &= 3) = \frac{3}{4} - k \\
P(X &= 4) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Funções de variáveis aleatórias

Dada uma v.a. X, podemos obter outras variáveis aleatórias através de funções de X e, da mesma forma que calculamos a função de distribuição de probabilidade de X, podemos calcular a fdp dessas novas variáveis.

Exemplo 10.8

Considere a v.a. X cuja fdp é dada na tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Consideremos a função $Y = g(X) = X^2$. Então, Y é uma nova variável aleatória, cujos possíveis valores são $0, 1, 4, 9$. Para calcular as probabilidades desses valores, temos que identificar os valores de X que originaram cada um deles. Temos a seguinte equivalência de eventos:

$$\begin{aligned}
\{Y = 0\} &\equiv \{X = 0\} \\
\{Y = 1\} &\equiv \{X = -1\} \cup \{X = 1\} \\
\{Y = 4\} &\equiv \{X = -2\} \cup \{X = 2\} \\
\{Y = 9\} &\equiv \{X = 3\}
\end{aligned}$$

(O símbolo $\equiv$ representa´"é equivalente a"). Como os eventos são mutuamente exclusivos, segue que

$$\begin{aligned}
\Pr(Y=0) &= \Pr(X=0)=0,2 \\
\Pr(Y=1) &= \Pr(X=-1)+\Pr(X=1)=0,5 \\
\Pr(Y=4) &= \Pr(X=-2)+\Pr(X=2)=0,2 \\
\Pr(Y=9) &= \Pr(X=3)=0,1
\end{aligned}$$

e podemos resumir essa fdp como

y	0	1	4	9
$f_Y(y)$	0,2	0,5	0,2	0,1

Função de variável aleatória
Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade $f_X(x)$. Se definimos uma nova v.a. $Y=g(X)$, onde g é uma função real qualquer, então a fdp de Y é calculada como

$$f_Y(y)=\sum_{\{x \mid g(x)=y\}} f_X(x)$$

Atividade 10.2

Seja Y uma variável aleatória com fdp dada por

y	-3	-1	0	2	5	8	9
$f_Y(y)$	0, 25	0, 30	0, 20	0, 10	0, 07	0, 05	0, 03

Defina $Z=2Y-3$. Encontre a fdp da variável aleatória Z.

Resumo da Aula

Nesta aula você estudou importantes conceitos sobre variáveis aleatórias. Certifique-se de ter compreendido bem cada um deles.

- Uma **variável aleatória** (v.a.) é uma função real (isto é, que assume valores em $\mathbb{R}$) definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de Ω um número real.

- Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) é um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem é um conjunto não enumerável dizemos que a variável aleatória é **contínua**.

- Seja X uma variável aleatória discreta. A **função de distribuição de probabilidades** de X é a função $f_X(x)$ que associa, a cada valor possível x de X, sua respectiva probabilidade, calculada da seguinte forma:
$$f_X(x) = \Pr(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \Pr(\omega)$$

- A fdp de uma v.a. discreta satisfaz as seguintes propriedades:
$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 \\ \sum_x f_X(x) &= 1 \end{aligned}$$
e pode ser representada por um gráfico de colunas, caso X assuma poucos valores.

- Dada uma variável aleatória (discreta) X, a **função de distribuição acumulada** (fda) de X é definida por
$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercícios

1. A demanda por um certo produto pode ser vista como uma variável aleatória X cuja função de distribuição de probabilidade $f_X(x)$ é estimada por

Número de unidades demandadas x	1	2	3	4
$f_X(x) = \Pr(X = x)$	$0,25$	$0,45$	$0,15$	$0,15$

   (a) Verifique se $f_X(x)$ realmente define uma fdp.

   (b) Obtenha a função de distribuição acumulada de X.

   (c) Usando a fda calculada no item anterior, calcule $\Pr(X \leq 3,5)$.

2. Uma variável aleatória discreta X tem a seguinte função de distribuição de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{(x+2)!} & x = 0, 1 \\ \\ 0 & x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

onde k é uma constante.

   (a) Determine o valor de k para que f_X seja uma fdp.
   (b) Calcule a função de distribuição $F_X(x)$.

3. Considere o lançamento de três moedas e denote por K a ocorrência de cara e por C a ocorrência de coroa. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma seqüência, ao passo que se ocorre o evento CKC temos três seqüências. Defina a v.a. X = "número de caras obtidas" e Y = "número de seqüências obtidas". Obtenha as distribuições de X e Y.

Solução das Atividades

Atividade 10.1

1. (a) No baralho há 26 cartas vermelhas, 13 de ouros e 13 de copas. Logo, os possíveis valores de X são 0, 1, 2, 3, 4, 5.
   (b) O número de pontos do espaço amostral é $\#\Omega = \binom{52}{5}$.

$$\begin{aligned} \Pr(X &= 0) = \Pr(5 \text{ pretas}) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} \\ &= \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \\ &= \frac{23 \times 22}{2 \times 51 \times 2 \times 49 \times 2} = 0,0253 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 1) &= \Pr(4 \text{ pretas}, 1 \text{ vermelha}) = \frac{\binom{26}{4}\binom{26}{1}}{\binom{52}{5}} \\ &= \frac{\dfrac{26 \times 25 \times 24 \times 23}{4 \times 3 \times 2} \times 26}{\dfrac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \frac{26 \times 25 \times 23 \times 26}{52 \times 51 \times 10 \times 49 \times 2} \\ &= \frac{5 \times 23 \times 13}{2 \times 51 \times 2 \times 49} = \frac{65 \times 23}{4 \times 51 \times 49} = 0,1496 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X=2) &= \Pr(3 \text{ pretas}, 2 \text{ vermelhas }) = \frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}} \\
&= \frac{\dfrac{26 \times 25 \times 24}{3 \times 2} \times \dfrac{26 \times 25}{2}}{\dfrac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \frac{26 \times 25 \times 4 \times 13 \times 25}{52 \times 51 \times 5 \times 49 \times 4} \\
&= \frac{5 \times 13 \times 25}{2 \times 51 \times 49} = \frac{65 \times 25}{2 \times 51 \times 49} = 0,3251
\end{aligned}$$

Como o número de cartas pretas e vermelhas é o mesmo, resulta que

$$\Pr(X=3) = \Pr(2 \text{ pretas,}3 \text{ vermelhas }) = \frac{\binom{26}{2}\binom{26}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,3251$$

$$\Pr(X=4) = \Pr(1 \text{ preta,}4 \text{ vermelhas}) = \frac{\binom{26}{1}\binom{26}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,1496$$

$$\Pr(X=5) = \Pr(5 \text{ vermelhas}) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,0253$$

Logo, a fdp de X é

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	$0,0253$	$0,1496$	$0,3251$	$0,3251$	$0,1496$	$0,0253$

2. Note que temos bolas brancas em quantidade suficiente para podermos tirar todas brancas ($X=0$), mas não temos bolas verdes suficientes para tirar todas verdes.

   (a) Como há apenas 4 verdes, os valores de X são $0,1,2,3,4$.

   (b) A cardinalidade do espaço amostral é

$$\#\Omega = \binom{11}{5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 6 \times 7 = 462$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 0) = \Pr(5 \text{ brancas}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{11}{5}} \\
&= \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{22} = \frac{3}{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 1) = \Pr(1 \text{ verde, } 4 \text{ brancas}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{7}{4}}{11 \times 6 \times 7} \\
&= \frac{4 \times \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}}{11 \times 6 \times 7} = \frac{10}{33} = \frac{20}{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 2) = \Pr(2 \text{ verdes, } 3 \text{ brancas}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}}{11 \times 6 \times 7} \\
&= \frac{\frac{4 \times 3}{2} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}}{11 \times 6 \times 7} = \frac{5}{11} = \frac{30}{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 3) = \Pr(3 \text{ verdes, } 2 \text{ brancas}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{7}{2}}{11 \times 6 \times 7} \\
&= \frac{4 \times \frac{7 \times 6}{2}}{11 \times 6 \times 7} = \frac{2}{11} = \frac{12}{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 4) = \Pr(4 \text{ verdes, } 1 \text{ branca}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{7}{1}}{11 \times 6 \times 7} \\
&= \frac{1 \times 7}{11 \times 6 \times 7} = \frac{1}{66}
\end{aligned}$$

Logo, a fdp de X é

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{1}{66}$

3. (a) Se as extrações são feitas com reposição, em cada extração podemos tirar bola branca ou verde. Logo, os possíveis valores de X são $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

   (b) Com reposição, sempre temos na urna 7 brancas e 4 verdes e em cada extração, temos que $\Pr(\text{branca}) = \frac{7}{11}$ e $\Pr(\text{verde}) = \frac{4}{11}$. Como as extrações são independentes, resulta que

$$\Pr(X = 0) = \Pr(5 \text{ brancas}) = \left(\frac{7}{11}\right)^5 = 0,1044$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 1) = \Pr(1 \text{ verde, } 4 \text{ brancas}) \\
&= \binom{5}{1}\left(\frac{7}{11}\right)^4\left(\frac{4}{11}\right)^1 = 0,2982
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 2) = \Pr(2 \text{ verdes, } 3 \text{ brancas}) \\
&= \binom{5}{2}\left(\frac{7}{11}\right)^3\left(\frac{4}{11}\right)^2 = 0,3408
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 3) = \Pr(3 \text{ verdes, } 2 \text{ brancas}) \\
&= \binom{5}{3}\left(\frac{7}{11}\right)^2\left(\frac{4}{11}\right)^3 = 0,1947
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X &= 4) = \Pr(4 \text{ verdes, } 1 \text{ branca}) \\ &= \binom{5}{4}\left(\frac{7}{11}\right)^1\left(\frac{4}{11}\right)^4 = 0,0556\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X &= 5) = \Pr(5 \text{ verdes}) \\ &= \left(\frac{4}{11}\right)^5 = 0,0064\end{aligned}$$

Logo, a fdp de X é:

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,1044	0,2982	0,3408	0,1948	0,0556	0,0064

A razão de multiplicarmos pelos números combinatórios se deve ao fato de que a(s) bola(s) verde(s) podem sair em qualquer uma das extrações.

Atividade 10.2

Note que Z é uma função linear de Y.

$Y = -3 \Rightarrow Z = -9$ $\quad$ $Y = 5 \Rightarrow Z = 7$
$Y = -1 \Rightarrow Z = -5$ $\quad$ $Y = 8 \Rightarrow Z = 13$
$Y = 0 \Rightarrow Z = -3$ $\quad$ $Y = 9 \Rightarrow Z = 15$
$Y = 2 \Rightarrow Z = 1$

Logo, a fdp de Z é

z	-9	-5	-3	1	7	13	15
$f_Z(z)$	0,25	0,30	0,20	0,10	0,07	0,05	0,03

Solução dos Exercícios

1.

(a) $0,25+0,45+0,15+0,15 = 1$ e todos os valores são não negativos. Logo, f_X é uma função de distribuição de probabilidade.

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0{,}25 & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 0{,}70 & \text{se } 2 \le x < 3 \\ 0{,}85 & \text{se } 3 \le x < 4 \\ 1{,}00 & \text{se } x \ge 4 \end{cases}$$

(c) Temos que

$$\Pr(X \leq 3,5) = F_X(3,5) = 0,85$$

2.

(a) Os valores possíveis da v.a. são 0 e 1. Então, temos que ter

$$\begin{aligned} f_X(0) + f_X(1) &= 1 \Rightarrow \frac{k}{2!} + \frac{k}{3!} = 1 \Rightarrow \\ \frac{k}{2} + \frac{k}{6} &= 1 \Rightarrow \frac{3k+k}{6} = 1 \Rightarrow k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \\ f_X(1) &= \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(b) A fda de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

3. O espaço amostral, bem como as variáveis aleatórias e suas fdp´s estão dadas nas tabelas a seguir:

w	$\Pr(w)$	X	Y
CCC	$\frac{1}{8}$	3	1
CCK	$\frac{1}{8}$	2	2
CKC	$\frac{1}{8}$	2	3
KCC	$\frac{1}{8}$	2	2
CKK	$\frac{1}{8}$	1	2
KCK	$\frac{1}{8}$	1	3
KKC	$\frac{1}{8}$	1	2
KKK	$\frac{1}{8}$	0	1

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$