Aula 13 – Variáveis aleatórias contínuas

Nesta aula, iremos estudar as variáveis aleatórias contínuas, e você aprenderá os seguintes conceitos:

- função de densidade de probabilidade;
- função de distribuição acumulada de variáveis aleatórias contínuas;
- esperança e variância de variáveis aleatórias contínuas;
- a distribuição uniforme contínua.

Noções básicas

No estudo das distribuições de freqüência para variáveis quantitativas contínuas, vimos que, para resumir os dados, era necessário agrupar os valores em classes. O histograma e o polígono de freqüências eram os gráficos apropriados para representar tal distribuição. Para apresentar os conceitos básicos relativos às variáveis aleatórias contínuas, vamos considerar os histogramas e respectivos polígonos de freqüência apresentados na **Figura 13.1.** Esses gráficos representam as distribuições de freqüências de um mesmo conjunto de dados, cada uma com um número de classes diferente − no histograma superior, há menos classes do que no histograma inferior. Suponhamos, também, que as áreas de cada retângulo sejam iguais às freqüências relativas das respectivas classes (essa é a definição mais precisa de um histograma). Pelos resultados vistos anteriormente, sabemos que a soma das áreas dos retângulos é 1 (as freqüências relativas devem somar 1 ou 100%) e que cada freqüência relativa é uma aproximação para a probabilidade de um elemento pertencer a determinada classe.

Analisando atentamente os dois gráficos, podemos ver o seguinte: à medida que aumentamos o número de classes, diminui a diferença entre a área total dos retângulos e a área abaixo do polígono de freqüência.

A divisão em classes se fez pelo simples motivo de que uma variável contínua pode assumir infinitos (não-enumeráveis) valores. Faz sentido, então, pensarmos em reduzir, cada vez mais, o comprimento de classe δ, até a situação limite em que $\delta \to 0$. Nessa situação limite, o polígono de freqüências se transforma em uma curva na parte positiva (ou não-negativa) do eixo vertical, tal que a área sob ela é igual a 1. Essa curva será chamada curva de densidade de probabilidade.

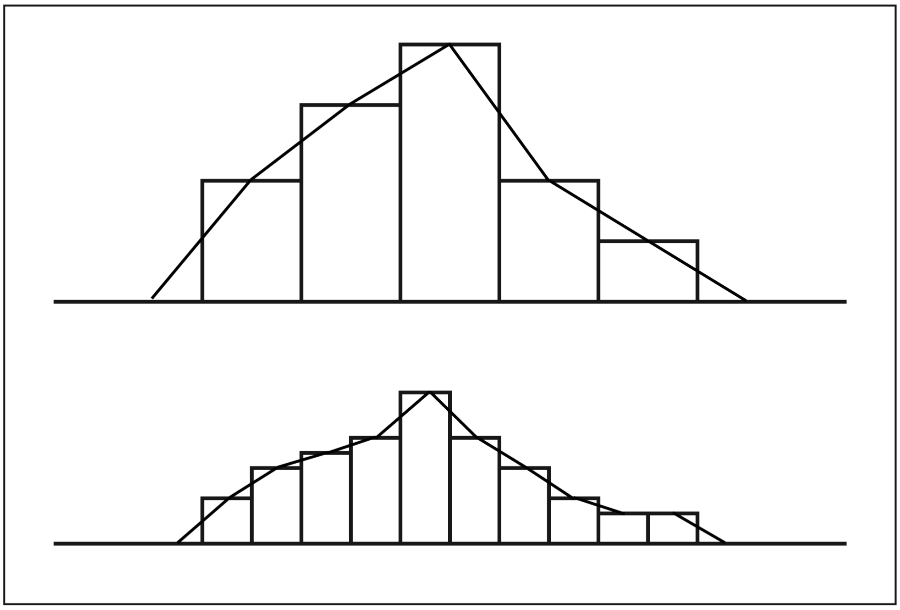

Figura 13.1: Histogramas e respectivos polígonos de freqüência.

Considere, agora, a **Figura 13.2**, em que é apresentado o histograma superior da figura anterior, mas agora ilustramos um fato visto anteriormente: para estimar a freqüência de valores da distribuição entre os pontos a e b, podemos usar a área dos retângulos sombreados de cinza-claro.

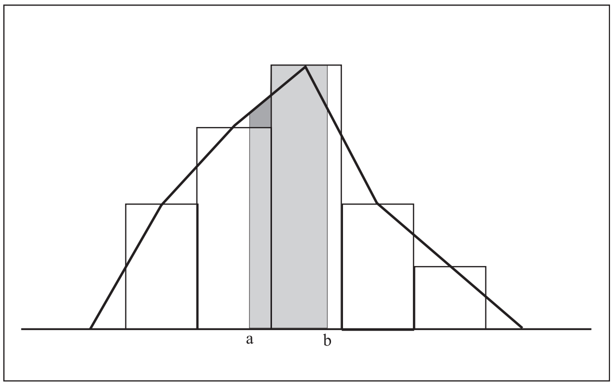

Figura 13.2: Cálculo da freqüência entre dois pontos a e b.

Conforme ilustrado na **Figura 13.3**, a diferença entre essa área e a área sob o polígono de freqüências tende a diminuir à medida que se aumenta o número de classes. Essa diferença é a parte sombreada de cinza mais escuro. Isso nos permite concluir o seguinte: no limite, quando $\delta \to 0$, podemos estimar a probabilidade de a variável de interesse estar entre dois valores A e B pela área sob a curva de densidade de probabilidade, delimitada pelos pontos A e B.

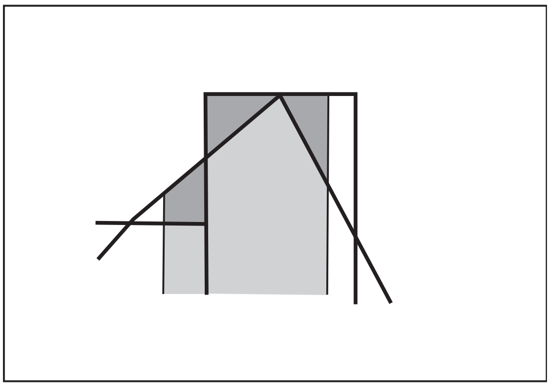

Figura 13.3: Diferença entre as áreas dos retângulos e a área sob o polígono de freqüência.

Variável aleatória contínua

Embora já visto anteriormente, voltamos a apresentar o conceito de variável aleatória, por ser esse um dos conceitos mais importantes deste curso.

> **Definição**
> Uma **variável aleatória** é uma função real (isto é, que assume valores em $\mathbb{R}$) definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de Ω um número real.

Já estudamos também as variáveis aleatórias discretas e agora vamos introduzir as variáveis aleatórias contínuas e para isso apresentamos novamente esses conceitos.

> **Definição**
> Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) for um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem for um conjunto não-enumerável, dizemos que a variável aleatória é **contínua**.

Função de densidade de probabilidade

Os valores de uma v.a. contínua são definidos a partir do espaço amostral de um experimento aleatório. Sendo assim, é natural o interesse na probabilidade de obtenção de diferentes valores dessa variável. O comportamento probabilístico de uma variável aleatória contínua será descrito pela sua *função de densidade de probabilidade*.

Definição
Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$
2. A área total sob o gráfico de $f(x)$ tem de ser igual a 1.

Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X, de modo que $P(a \leq X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b (veja a **Figura 13.4**).

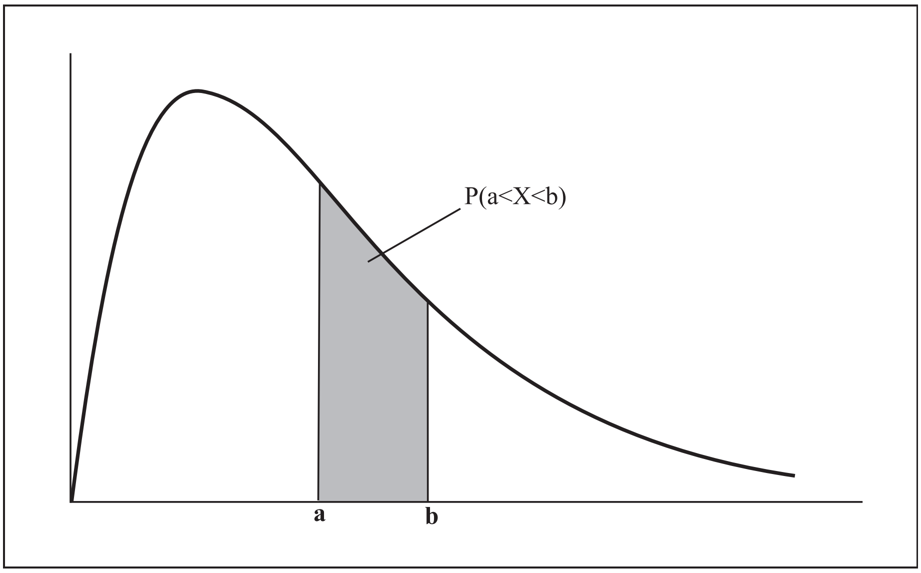

Figura 13.4: Probabilidade como área.

A definição anterior usa argumentos geométricos; no entanto, uma definição mais precisa envolve o conceito de *integral* de uma função de uma variável. Apresentamos a seguir essa definição, mas neste curso usaremos basicamente a interpretação geométrica da integral, que está associada à área sob uma curva.

Definição

Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int f(x)dx = 1.$

Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X, de modo que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Para deixar clara a relação entre a função de densidade de probabilidade e a respectiva v.a. X, usaremos a notação $f_X(x)$. Por questão de simplicidade, também abreviaremos a expressão função de densidade de probabilidade por fdp, devendo ficar claro no contexto se é função de distribuição de probabilidade – v.a. discreta – ou função de densidade de probabilidade – v.a. contínua.

Uma primeira observação importante que resulta da interpretação geométrica de probabilidade como área sob a curva de densidade de probabilidade é a seguinte: se X é uma v.a. contínua, então a probabilidade do evento $X = a$ é zero, ou seja, a probabilidade de X ser exatamente igual a um valor específico é nula. Isso pode ser visto na **Figura 13.4**: o evento $X = a$ corresponde a um segmento de reta, e tal segmento tem área nula. Como conseqüência, temos as seguintes igualdades:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a < X < b)$$

Função de distribuição acumulada

Da mesma forma que a função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta, a função de densidade de probabilidade nos dá toda a informação sobre a v.a. X, ou seja, a partir da fdp, podemos calcular qualquer probabilidade associada à v.a. X. Também como no caso discreto, podemos calcular probabilidades associadas a uma v.a. contínua X a partir da f*unção de distribuição acumulada*.

Definição
Dada uma variável aleatória (discreta) X, a **função de distribuição acumulada** de X é definida por

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{13.1}$$

A definição é a mesma vista para o caso discreto; a diferença é que, para variáveis contínuas, a função de distribuição acumulada é uma função contínua, sem saltos. Veja a **Figura 13.5** para um exemplo.

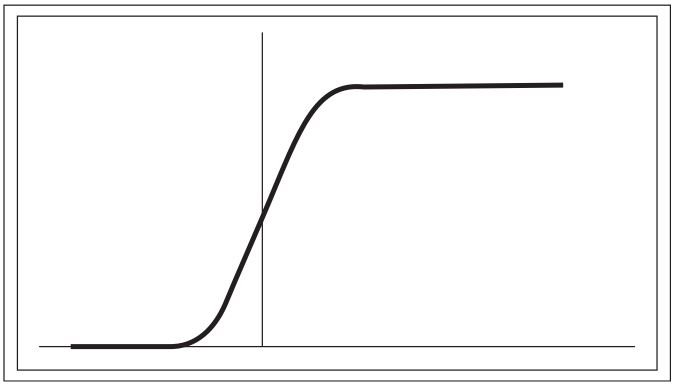

Figura 13.5: Exemplo de função de distribuição acumulada de uma v.a. contínua.

Como no caso discreto, valem as seguintes propriedades para a função de distribuição acumulada (fda) de uma v.a. contínua:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{13.2}$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 \tag{13.3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \tag{13.4}$$

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b) \tag{13.5}$$

Da interpretação de probabilidade como área, resulta que $F_X(x)$ é a área à esquerda de x sob a curva de densidade f_X. Veja a **Figura 13.6**:

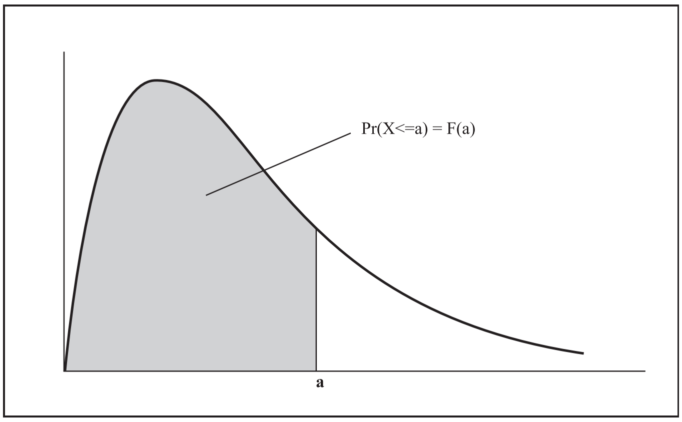

Figura 13.6: Função de distribuição acumulada - cálculo a partir da área sob a curva de densidade.

Existe uma relação entre a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada, que é resultante do Teorema Fundamental do Cálculo. Essa relação será dada aqui para fins de completitude das definições, mas não será cobrado do aluno tal conhecimento, uma vez que os conceitos de integral e derivada podem ainda não ter sido devidamente assimilados.

Por definição, temos o seguinte resultado:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

e do Teorema Fundamental do Cálculo resulta que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x),$$

isto é, a função de densidade de probabilidade é a *derivada* da função de distribuição acumulada.

Esperança e variância de variáveis aleatórias contínuas

Nas distribuições de freqüências agrupadas em classes de variáveis quantitativas contínuas, vimos que a média e a variância da distribuição, medidas de centro e de dispersão, respectivamente, podiam ser calculadas como

$$\overline{x} = \sum f_i x_i$$

e

$$\sigma^2 = \sum f_i (x_i - \overline{x})^2$$

onde f_i era a freqüência relativa da classe i e x_i era o ponto médio da classe i. Continuando com a idéia inicial da aula de tomar classes de comprimento cada vez menor, isto é, fazendo $\delta \to 0$, chegamos às seguintes definições de esperança e variância de uma variável aleatória contínua.

Definições
Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade f_X. A **esperança** (ou **média** ou **valor esperado**) de X é definida como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

e a **variância** de X é definida como

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f_X(x) dx$$

O **desvio padrão** é definido como

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Como já dito antes, não entraremos em detalhes de cálculo dessas fórmulas; nosso enfoque será na interpretação da média e da variância como medidas de centro e de dispersão. Para algumas distribuições específicas, apresentaremos os valores de $E(X)$ e $Var(X)$, mostrando a sua influência sobre a distribuição.

As mesmas propriedades vistas para variáveis aleatórias discretas continuam valendo no caso contínuo:

Esperança	Variância	Desvio padrão
$E(a) = a$	$\text{Var}\,(a) = 0$	$DP(a) = 0$
$E(X + a) = E(X) + a$	$\text{Var}\,(X + a) = \text{Var}\,(X)$	$DP\,(X + a) = DP\,(X)$
$E(bX) = bE(X)$	$\text{Var}\,(bX) = b^2\text{Var}\,(X)$	$DP\,(bX) = \|b\|\,DP\,(X)$
$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$	$\text{Var}(X) \geq 0$	$DP(X) \geq 0$

Se interpretamos a função de densidade de probabilidade de X como uma distribuição de massa na reta real, então $E(X)$ é o centro de massa desta distribuição. Essa interpretação nos permite concluir, por exemplo, que se f_X é simétrica, então $E(X)$ é o valor central, que define o eixo de simetria.

Exemplo 13.1 — Distribuição uniforme

Considere a função f_X apresentada na **Figura 13.7**:

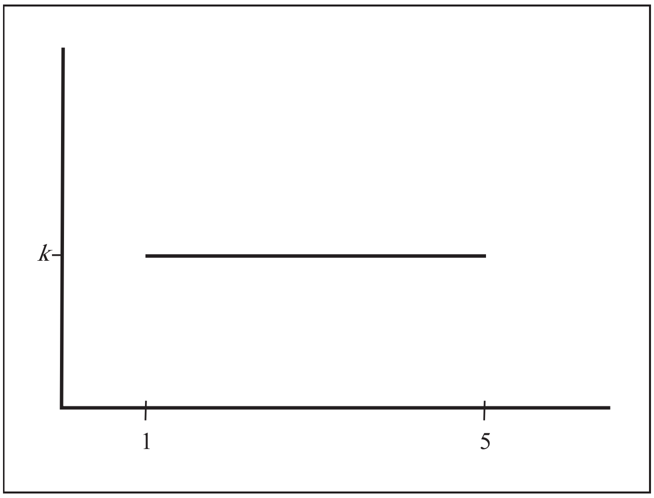

Figura 13.7: Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 13.1.

1. Encontre o valor de k para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma v.a. X.

2. Determine a equação que define f_X.

3. Calcule $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.

4. Encontre $E(X)$.

5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

6. Encontre a função de distribuição acumulada de X.

Solução

1. Como a área tem que ser 1, temos de ter

$$1 = (5-1) \times k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

2. Temos que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. A probabilidade pedida é a área sombreada na **Figura 13.8**. Logo,

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = (3-2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

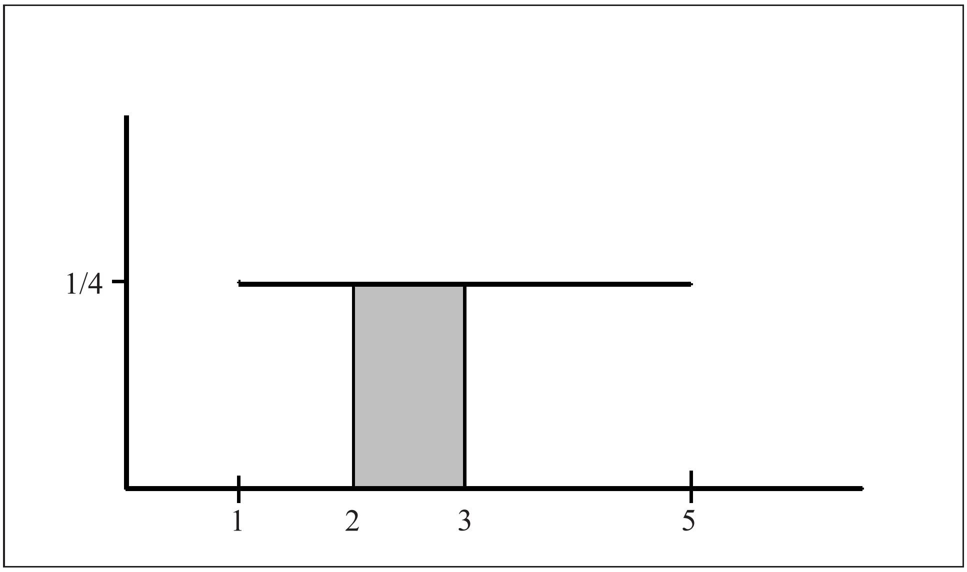

Figura 13.8: Cálculo de $\Pr(2 \leq X \leq 3)$ para o Exemplo 13.1.

4. Por argumentos de simetria, a esperança é o ponto médio, ou seja, $E(X) = 3$.

5. O primeiro ponto a observar é o seguinte: o ponto $x = 3$ divide a área ao meio, ou seja, $x = 3$ é a mediana da distribuição. Como temos que $\Pr(X \leq k) = 0,6$, resulta que k tem de ser maior que 3, uma vez que abaixo de 3 temos área igual a 0,5. Veja a **Figura 13.9:**

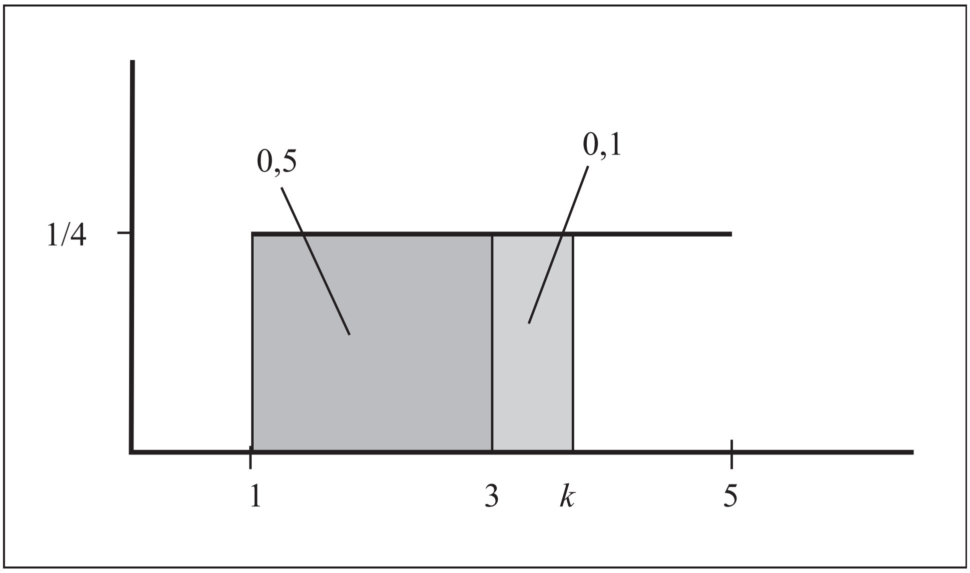

Figura 13.9: Cálculo de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$ para o Exemplo 13.1.

Temos de ter

$$0,1 = (k-3) \times \frac{1}{4} \Rightarrow k = 3,4$$

6. Para $x < 1$, temos que $F_X(x) = 0$ e para $x > 5$, temos que $F_X(x) = 1$. Para $1 \leq x \leq 5$, $F_X(x)$ é a área de um retângulo de base $(x-1)$ e altura $1/4$ (veja a **Figura 13.10**). Logo,

$$F_X(x) = \frac{x-1}{4}$$

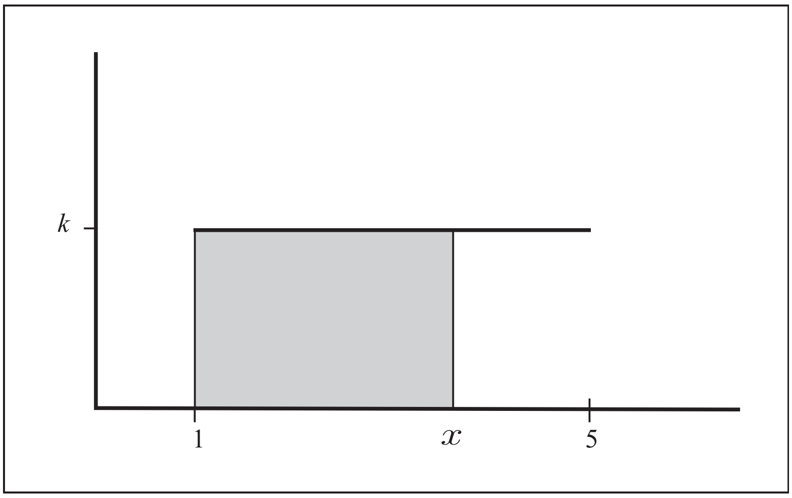

Figura 13.10: Cálculo de F_X para o Exemplo 13.1.

e a expressão completa de F_X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{x-1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

cujo gráfico está ilustrado na **Figura 13.11**.

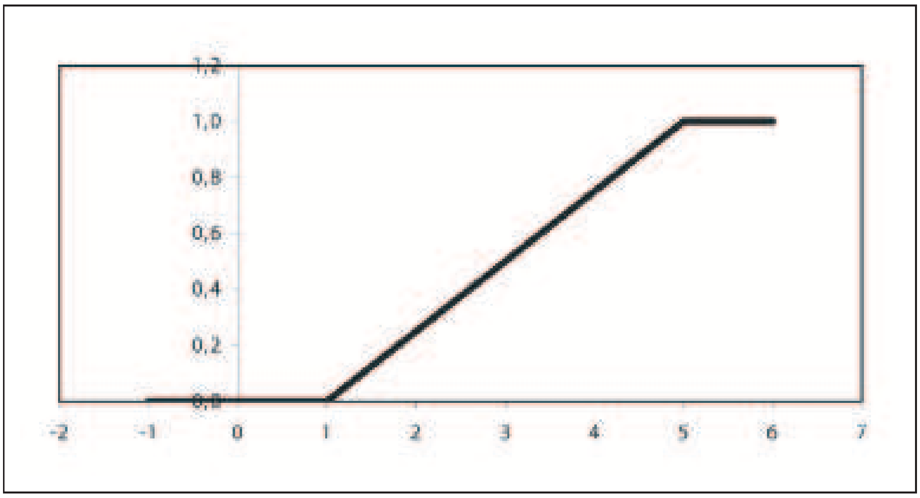

Figura 13.11: Função de distribuição acumulada para o Exemplo 13.1.

Exemplo 13.2

Considere a função f_X apresentada na **Figura 13.12**:

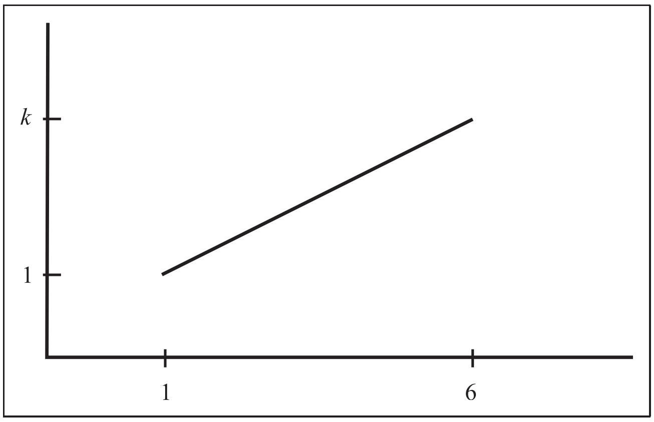

Figura 13.12: Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 13.2.

1. Encontre o valor de k para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma v.a. X.
2. Determine a equação que define f_X.
3. Calcule $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.
4. Encontre a função de distribuição acumulada de X.
5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

Solução

1. Podemos decompor a área sob a reta como a área de um triângulo e a área de um retângulo (na verdade, o resultado é a área de um trapézio - veja a **Figura 13.13**). Então, temos de ter

$$\begin{aligned} 1 &= (6-1) \times 0,1 + \frac{1}{2}(6-1) \times (k-0,1) \Rightarrow \\ 0,5 &= \frac{5}{2}(k-0,1) \Rightarrow k = 0,3 \end{aligned}$$

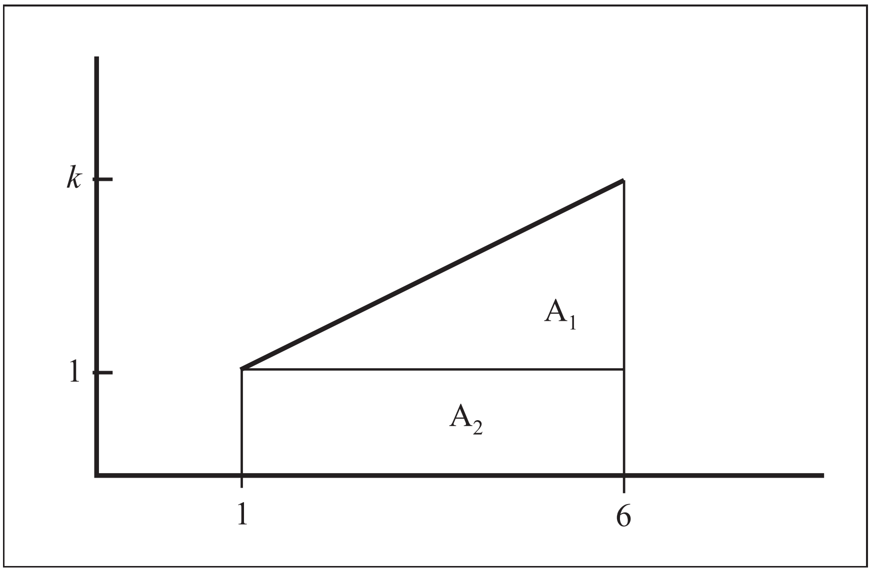

Figura 13.13: Cálculo de k para o Exemplo 13.2.

2. f_X é uma função linear e a reta passa pelos pontos $(1; 0,1)$ e $(6; 0,3)$, o que nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0,1 = a + b \\ \\ 0,3 = a + 6b \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$0,3 - 0,1 = 5b \Rightarrow b = 0,04$$

Substituindo este valor na primeira equação, obtemos que $a = 0,1 - 0,04 = 0,06$. Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,06 + 0,04x & \text{se } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. Veja a **Figura 13.14**, em que a área sombreada corresponde à probabilidade pedida. Vemos que essa área é a área de um trapézio de altura $3 - 2 = 1$, base maior igual a $f_X(3) = 0,06 + 0,04 \times 3 = 0,18$ e base menor igual a $f(2) = 0,06 + 0,04 \times 2 = 0,14$. Logo,

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = \frac{0,18 + 0,14}{2} \times 1 = 0,16$$

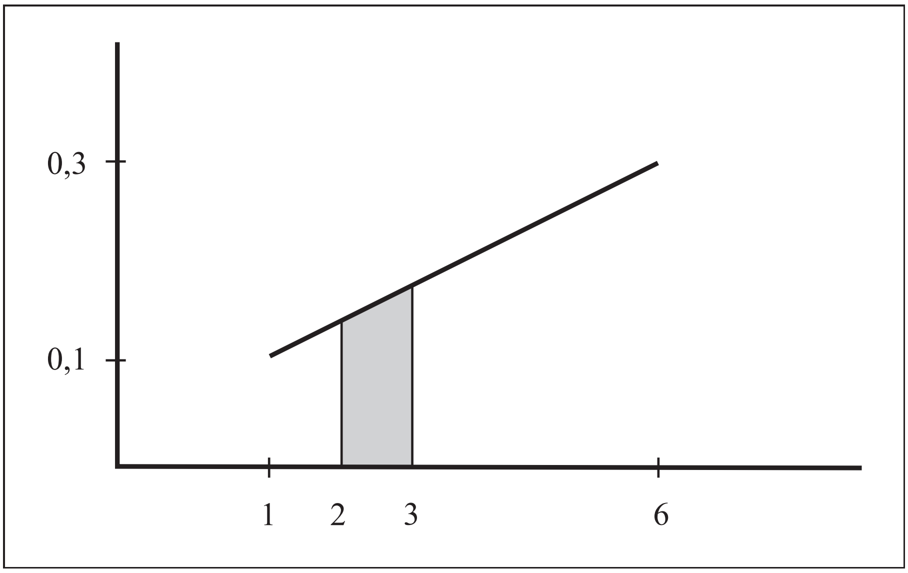

Figura 13.14: Cálculo de $\Pr(2 \leq X \leq 3)$ para o Exemplo 13.2.

4. Veja a **Figura 13.15**; nela podemos ver que, para $x \in [1,5]$, $F_X(k)$ é a área de um trapézio de altura $k - 1$; base maior igual a $f_X(k)$ e base menor igual a $f_X(1)$. Logo,

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \frac{(0,06 + 0,04k) + 0,1}{2} \times (k-1) \\ &= (0,08 + 0,02k)(k-1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 1 \\ 0,02k^2 + 0,06k - 0,08 & \text{se } 1 \leq k \leq 6 \\ 1 & \text{se } k > 6 \end{cases}$$

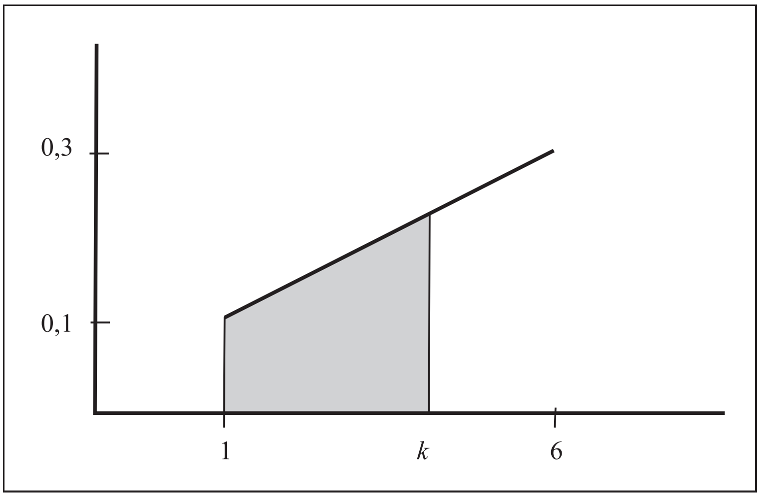

Figura 13.15: Função de distribuição acumulada para o Exemplo 13.2.

5. Queremos determinar k tal que $F_X(k) = 0,6$. Logo,

$$\begin{aligned} & 0,6 = 0,02k^2 + 0,06k - 0,08 \Rightarrow \\ & 0,02k^2 + 0,06k - 0,68 = 0 \Rightarrow \\ & k^2 + 3k - 34 = 0 \Rightarrow \\ k &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 34}}{2} \end{aligned}$$

A raiz que fornece resultado dentro do domínio de variação de X é

$$k = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4 \times 34}}{2} = 4,5208$$

Exemplo 13.3 - Distribuição triangular

Considere a função f_X apresentada na **Figura 13.16**:

1. Encontre o valor de h para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma v.a. X (note que o triângulo é isósceles).

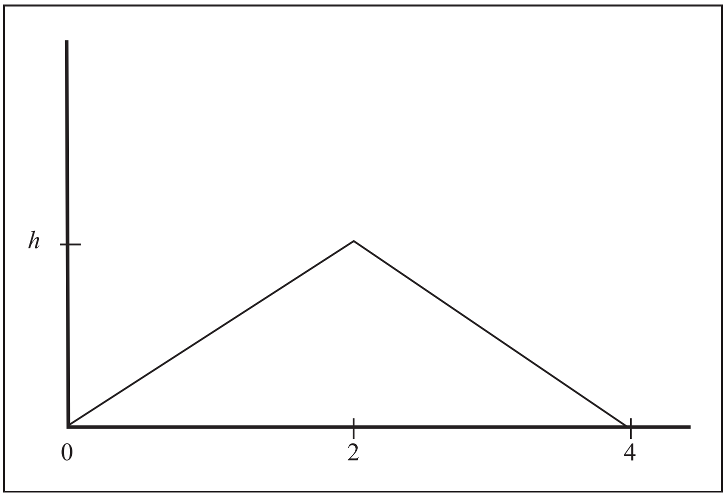

Figura 13.16: Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 13.3.

2. Determine a equação que define f_X.

3. Calcule $\Pr(1 \leq X \leq 3)$.

4. Encontre $E(X)$.

5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

6. Encontre a função de distribuição acumulada de X.

Solução

1. Como a área tem de ser 1, temos de ter

$$1 = \frac{1}{2} \times (4 - 0) \times h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

2. A função f_X é dada por 2 equações de reta. A primeira é uma reta de inclinação positiva que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. A segunda é uma reta de inclinação negativa, que passa pelos pontos $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e $(4, 0)$. Para achar a equação de cada uma das retas, basta substituir as coordenadas dos dois pontos e resolver o sistema. Para a primeira reta, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \times 0 \\ \frac{1}{2} &= a + b \times 2 \end{aligned}$$

Da primeira equação resulta que $a = 0$ (é o ponto onde a reta cruza o eixo y) e substituindo esse valor de a na segunda equação, resulta que $b = \frac{1}{4}$.

Para a segunda reta, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \times 4 \\ \frac{1}{2} &= a + b \times 2 \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, resulta:

$$0 - \frac{1}{2} = (a - a) + (4b - 2b) \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Substituindo na primeira equação, encontramos que $a = 1$.

Combinando essas duas equações, obtemos a seguinte expressão para f_X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{x}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4 \end{cases}$$

3. A probabilidade pedida é a área sombreada em cinza-escuro na **Figura 13.17**. Os dois triângulos sombreados de cinza-claro têm a mesma área, por causa da simetria. Assim, podemos calcular a probabilidade usando a regra do complementar, uma vez que a área total é 1. A altura dos dois triângulos é $\frac{1}{4}$; basta substituir o valor de $x = 1$ na primeira equação e o valor de $x = 3$ na segunda equação. Logo, a área de cada um dos triângulos é $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ e, portanto,

$$\Pr(1 \leq X \leq 3) = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

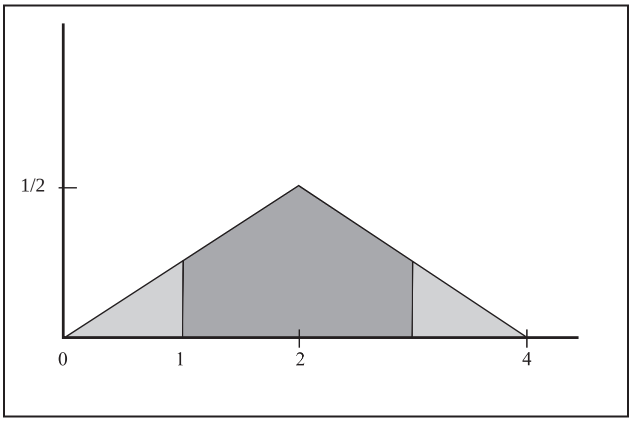

Figura 13.17: Cálculo de $\Pr(1 \leq X \leq 3)$.

4. Como a função é simétrica, resulta que $E(X) = 2$.

5. O primeiro ponto a observar é o seguinte: o ponto $x = 2$ divide a área ao meio, ou seja, $x = 2$ é a mediana da distribuição. Como temos que $\Pr(X \leq k) = 0,6$, resulta que k tem de ser maior que 2. Veja a **Figura 13.18**:

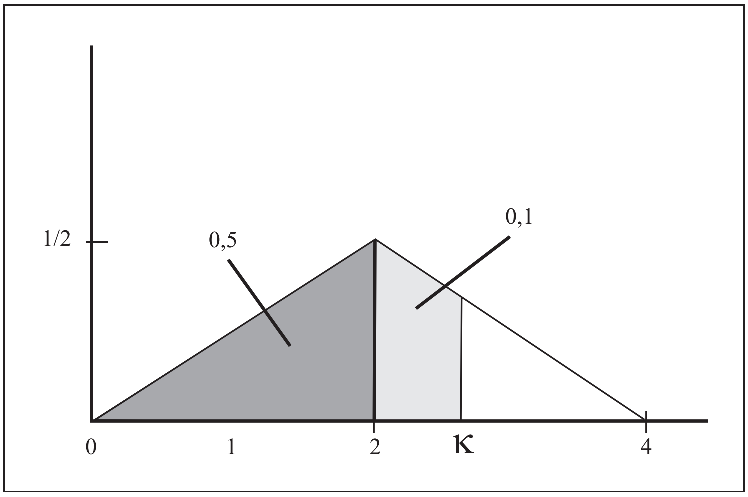

Figura 13.18: Cálculo de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

Novamente, vamos usar a regra do complementar: como a área (probabilidade) abaixo de k tem de ser 0,6, resulta que a área (probabilidade) acima de k tem de ser 0,4; então, a área do triângulo superior tem de ser $0,4$. A altura desse triângulo é obtida substituindo-se o valor $x = k$ na equação da segunda reta, o que nos dá $h = 1 - \frac{k}{4}$. Substituindo na fórmula que dá a área de um triângulo, resulta:

$$0,4 = \frac{1}{2} \times (4-k) \times \left(1 - \frac{k}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
0,4 &= \frac{1}{2}\left(4 - k - k + \frac{k^2}{4}\right) \Rightarrow \\
0,8 &= \frac{16 - 8k + k^2}{4} \Rightarrow \\
3,2 &= k^2 - 8k + 16 \Rightarrow \\
& k^2 - 8k + 13,2 = 0 \Rightarrow \\
k &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 13,2}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{11,2}}{2}
\end{aligned}$$

A raiz $\frac{8+\sqrt{11,2}}{2}$ está fora do domínio de definição da função; logo, essa solução não serve. A solução para o problema, então, é:

$$k = \frac{8 - \sqrt{11,2}}{2} = 2,3267$$

6. Assim como a fdp, a fda será definida por 2 equações: uma para os valores de x no intervalo $[0,2)$ e outra para valores de x no intervalo $[2,4]$. Para $x \in [0,2)$, temos que $F_X(x)$ é a área do retângulo sombreado na **Figura 13.19**. Logo,

$$F_X(x) = \frac{1}{2}(x-0) \times \frac{x}{4} \qquad x \in [0,2)$$

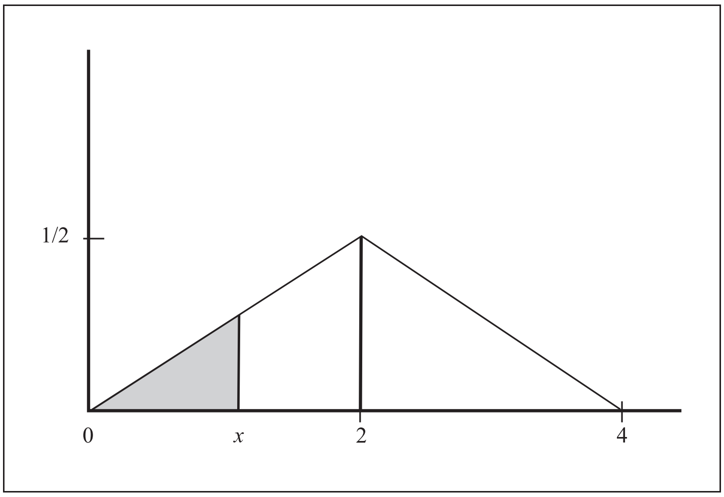

Figura 13.19: Cálculo de $F_X(x)$ para $0 \leq x \leq 2$.

Para $x \in [2,4]$, $F_x(x)$ é a área sombreada na **Figura 13.20**, que pode ser calculada subtraindo-se de 1 (área total) a área do triângulo superior. Logo,

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}(4-x)\left(1 - \frac{x}{4}\right).$$

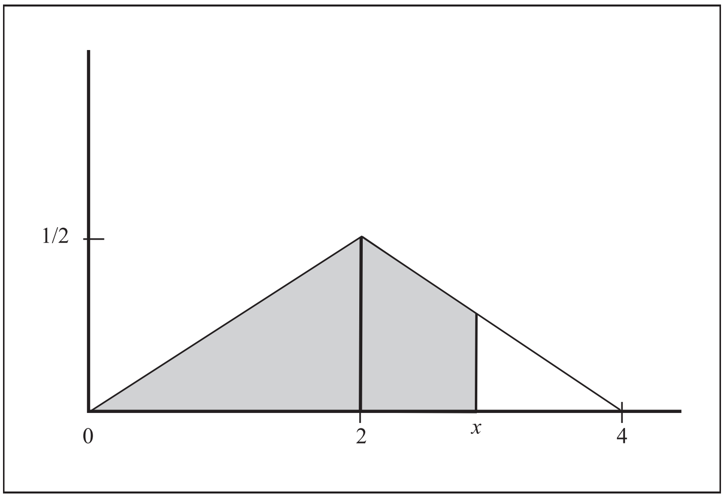

Figura 13.20: Cálculo de $F_X(x)$ para $2 \leq x \leq 4$.

Combinando os resultados obtidos, resulta a seguinte expressão para F_X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8}x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{8}(4-x)^2 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Veja a **Figura 13.21**; para $0 \leq x < 2$, o gráfico de F_X é uma parábola côncava para cima; para $2 \leq x \leq 4$, o gráfico de F_X é uma parábola côncava para baixo.

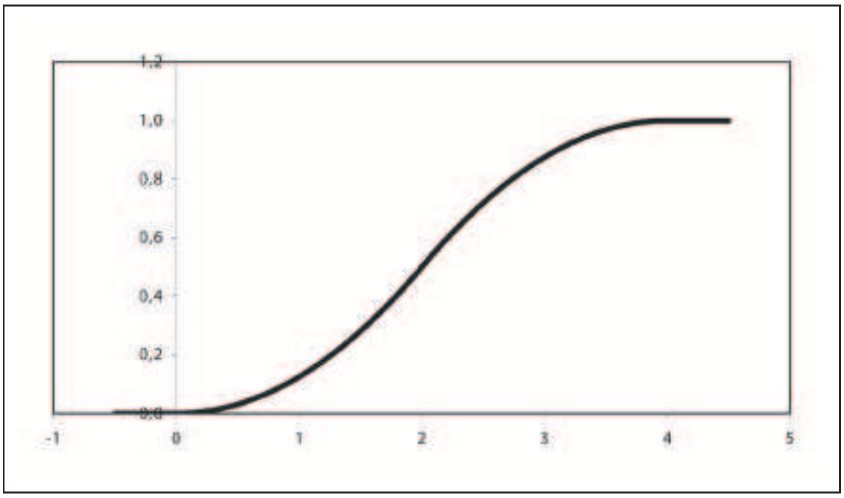

Figura 13.21: Função de distribuição acumulada do Exemplo 13.3.

Distribuição uniforme

Função de densidade de probabilidade

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ (finito) se sua função de densidade é constante nesse intervalo, ou seja, temos de ter

$$f(x) = k \qquad \forall x \in [a, b]$$

Então, o gráfico da fdp. de X é como o ilustrado na **Figura 13.22.** Para que tal função seja uma fdp, temos de ter $k > 0$ e a área do retângulo

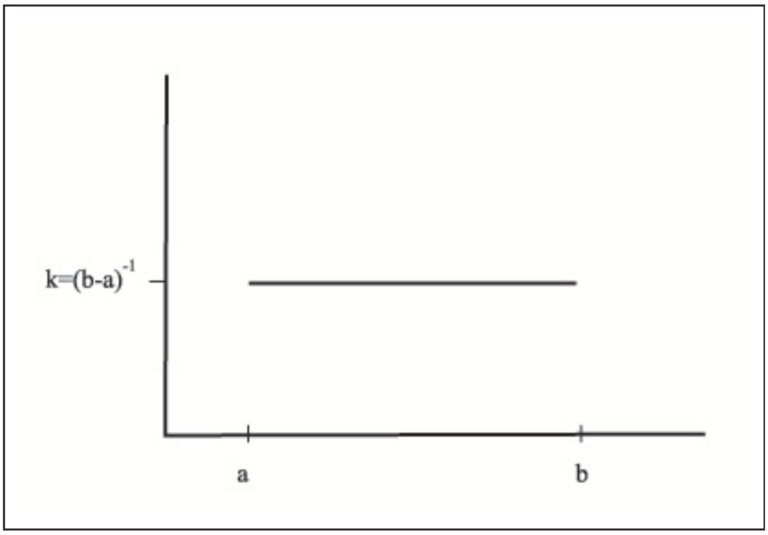

Figura 13.22: Densidade da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$.

tem de ser 1, ou seja,

$$(b-a) \times k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

Logo, a função de densidade de uma v.a. uniforme no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13.6}$$

Os valores a e b são chamados *parâmetros* da distribuição uniforme; note que ambos têm de ser finitos para que a integral seja igual a 1. Quando $a = 0$ e $b = 1$ temos a uniforme padrão, denotada por $\mathcal{U}(0, 1)$.

Função de distribuição acumulada

Por definição, temos que

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$$

e essa probabilidade é dada pela área sob a curva de densidade à esquerda de x, conforme ilustrado na **Figura 13.23**

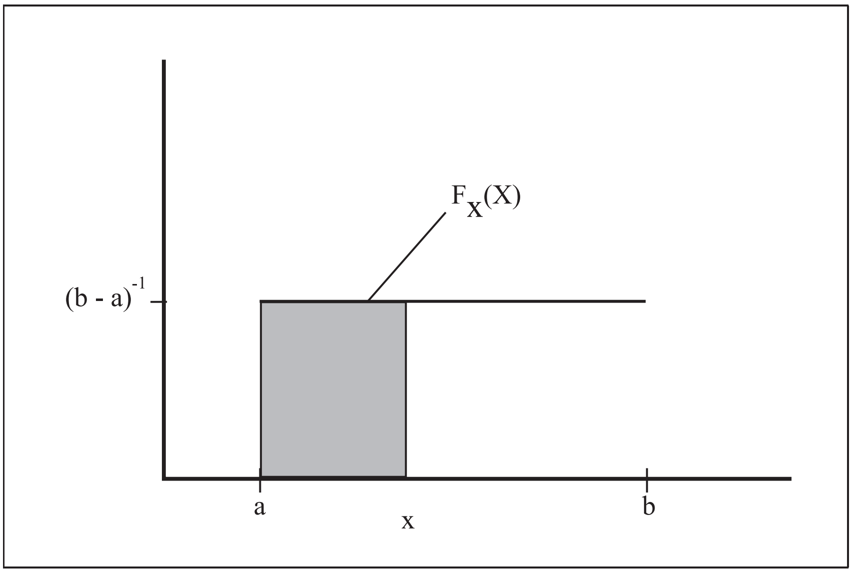

Figura 13.23: Cálculo da fda da densidade uniforme.

Essa área é a área de um retângulo com base $(x - a)$ e altura $\frac{1}{b-a}$. Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se a} \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases} \tag{13.7}$$

O gráfico dessa fda é dado na **Figura 13.24**.

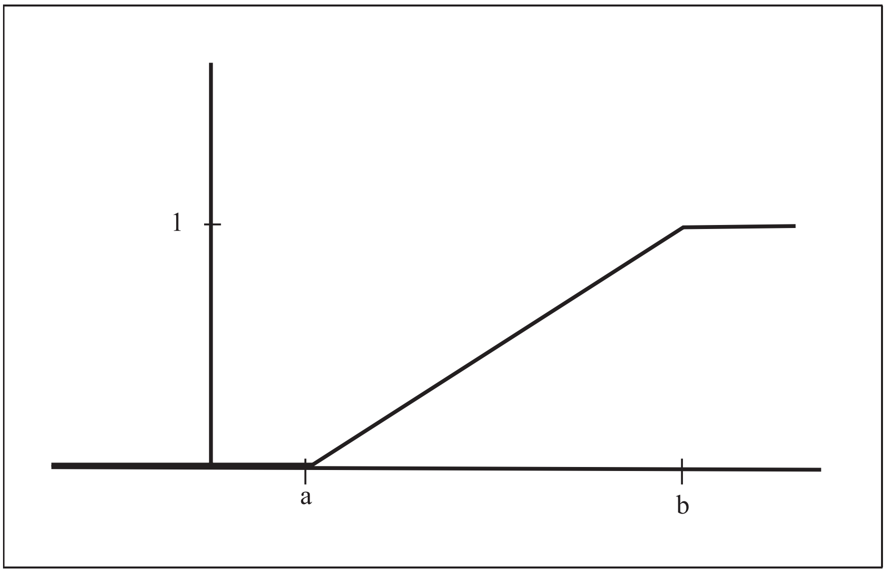

Figura 13.24: Função de distribuição acumulada da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$.

Esperança e variância

Das propriedades da esperança e das características da densidade uniforme, sabemos que $E(X)$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \tag{13.8}$$

O cálculo da variância requer cálculo integral, e pode-se mostrar que

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{13.9}$$

Resumo da Aula

Nesta aula você iniciou o estudo sobre variáveis aleatórias contínuas, aprendendo os seguintes conceitos:

- **Função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:
  - $f(x) \geq 0$
  - A área total sob o gráfico de $f(x)$ tem que ser igual a 1.
- Dada uma função de densidade $f(x)$ referente a uma v.a. X, então $P(a \leq X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b.
- A **função de distribuição acumulada** é definida como

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- A **densidade uniforme** no intervalo (a, b) é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13.10}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{2} \end{aligned}$$

Exercícios

1. Considere a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} K(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

   (a) Esboce o gráfico de $g(x)$.

   (b) Encontre o valor de K para que $g(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.

   (c) Encontre a função de distribuição acumulada.

   (d) Calcule os quartis da distribuição.

2. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

   (a) Qual é a probabilidade de se vender mais de 150kg num dia escolhido ao acaso?

   (b) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

3. Seja X uma v.a. com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Calcule $\Pr\left(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$.

Solução dos Exercícios

1. (a) Veja a **Figura 13.25**. Note que $g(0) = 2K$ e $g(1) = K$ e $g(x)$ é uma função linear.

   (b) A área total, que deve ser igual a 1, é a área de um trapézio com altura $h = 1$, base maior igual a $2K$ e base menor igual a K. Logo,

$$1 = \frac{K + 2K}{2} \times 1 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

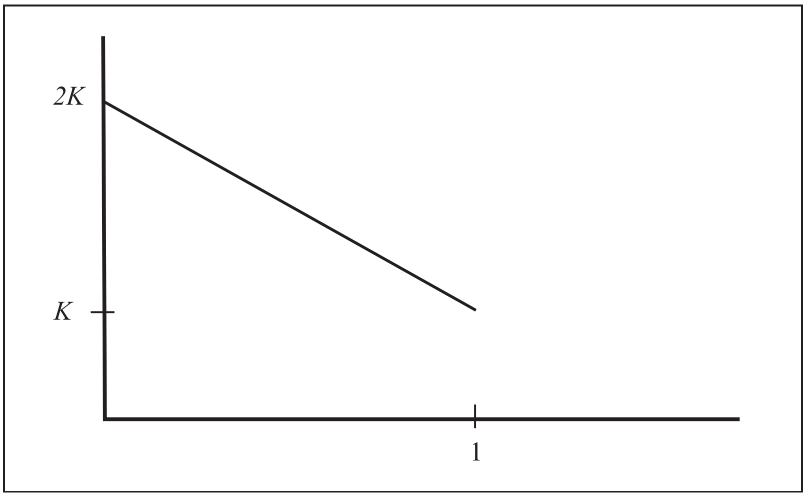

Figura 13.25: Solução do Exercício 13.1 - gráfico de $g(x)$.

(c) Para cada $x \in [0,1]$, $F_X(x)$ é a área de um trapézio de altura x, base menor igual a $f_X(x) = \frac{2}{3}(2-x)$ e base maior igual a $\frac{4}{3}$. Veja a **Figura 13.26**. Logo,

$$F_X(x) = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}(2-x)}{2} x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2-x)x \qquad 0 \le x \le 1$$

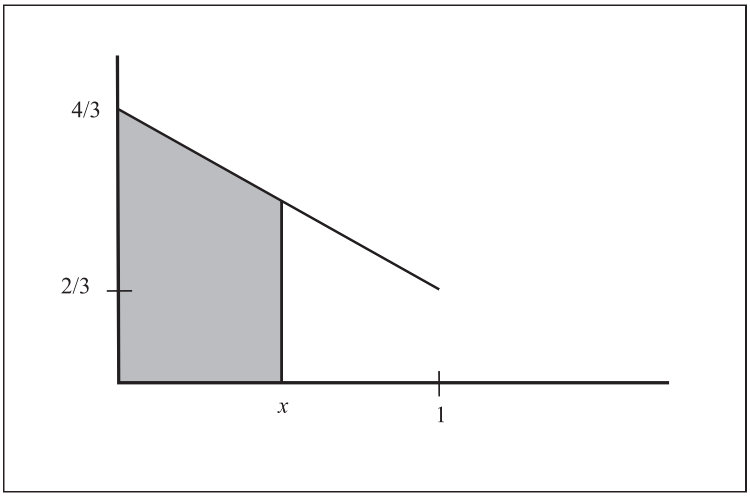

Figura 13.26: Cálculo da fda para o Exercício 13.1.

Resulta que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(d) Sejam Q_1, Q_2 e Q_3 os três quartis:

$$\begin{aligned}
F_X(Q_1) &= 0,25 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_1 - \frac{1}{3}Q_1^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 16Q_1 - 4Q_1^2 = 3 \Rightarrow \\
4Q_1^2 - 16Q_1 + 3 &= 0 \Rightarrow Q_1^2 - 4Q_1 + 0,75 = 0 \Rightarrow \\
Q_1 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 0,75}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{2}
\end{aligned}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é:

$$Q_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{2} = 0,19722$$

$$\begin{aligned}
F_X(Q_2) &= 0,5 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_2 - \frac{1}{3}Q_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 8Q_2 - 2Q_2^2 = 3 \Rightarrow \\
2Q_2^2 - 8Q_2 + 3 &= 0 \Rightarrow Q_2^2 - 4Q_2 + 1,5 = 0 \Rightarrow \\
Q_2 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1,5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}
\end{aligned}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é:

$$Q_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2} = 0,41886$$

$$\begin{aligned}
F_X(Q_3) &= 0,75 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_3 - \frac{1}{3}Q_3^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 16Q_3 - 4Q_3^2 = 9 \Rightarrow \\
4Q_3^2 - 16Q_3 + 9 &= 0 \Rightarrow Q_3^2 - 4Q_3 + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \\
Q_3 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2.25}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2}
\end{aligned}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é:

$$Q_3 = \frac{4 - \sqrt{7}}{2} = 0,67712$$

2. Seja X a v.a. que representa a demanda diária de arroz, em centenas de quilos.

   (a) Na **Figura 13.27**, temos o gráfico da fdp de X, onde a área do triângulo sombreado representa $\Pr(X \geq 1,5)$. Nesse triângulo, a base é $3 - 1,5 = 1,5$, e a altura é $f(1,5) = \frac{-1,5}{3} + 1$. Logo,

$$\Pr(X \geq 1,5) = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 0,5 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

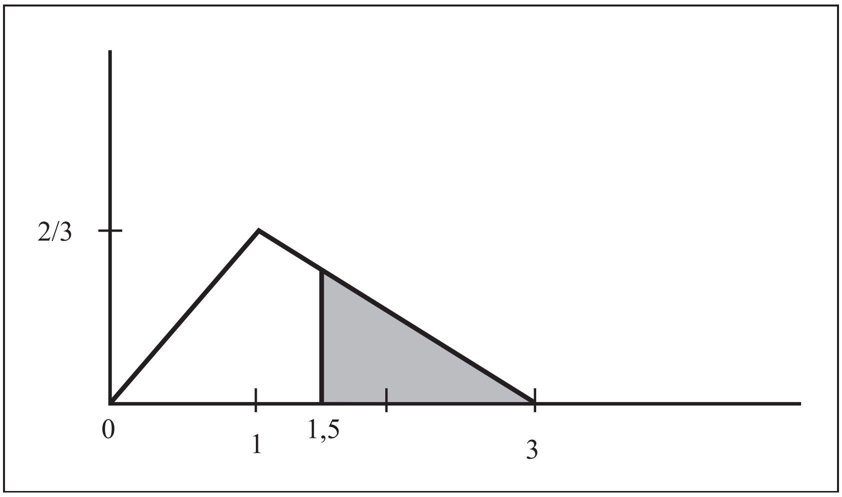

Figura 13.27: Solução do Exercício 13.2.

(b) Seja k o valor a estocar. Para que a demanda seja atendida, é necessário que a quantidade demandada seja menor que a quantidade em estoque. Logo, queremos encontrar o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,95$.

Como $\Pr(X \leq 1) = \frac{1}{3}$, k tem de ser maior que 1, ou seja, k está no triângulo superior (veja a **Figura 13.28)**. Mas $\Pr(X \leq k) = 0,95$ é equivalente a $\Pr(X > k) = 0,05$. Logo,

$$\begin{aligned}
0,05 &= \frac{1}{2}(3-k)\left(-\frac{k}{3}+1\right) \Rightarrow \\
0,1 &= (3-k)\left(\frac{-k+3}{3}\right) \Rightarrow \\
0,3 &= 9-6k+k^2 \Rightarrow \\
& \quad k^2-6k+8,7=0 \Rightarrow \\
k &= \frac{6 \pm \sqrt{36-4\times 8.7}}{2}
\end{aligned}$$

A raiz que dá a solução dentro do domínio de X é:

$$k = \frac{6-\sqrt{36-4\times 8.7}}{2} = 2,45 \text{ centenas de quilos}$$

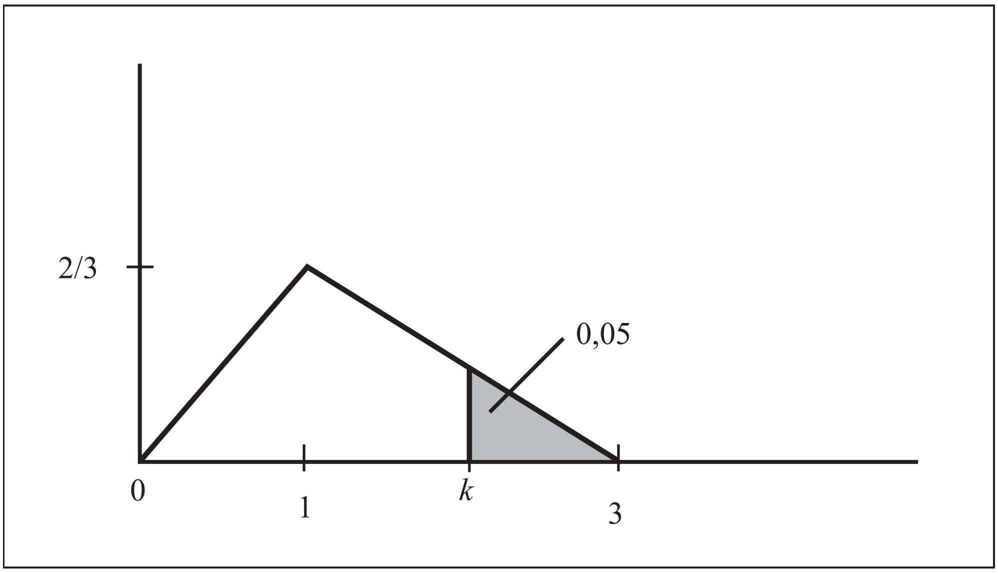

Figura 13.28: Solução do Exercício 13.2 - Cálculo do tamanho do estoque.

3. Sabemos que $\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Pr\left(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= \frac{\Pr\left[\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)\right]}{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)}{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Veja a **Figura 13.29**. Ambos os termos referem-se a áreas de trapézios. O numerador refere-se à área do trapézio sombreado de cinza-escuro e o denominador refere-se ao trapézio correspondente a toda a área sombreada (cinza-claro e cinza-escuro). O trapézio cinza-escuro tem altura $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, base maior igual a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e base menor igual a $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. O trapézio sombreado completo tem altura $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, base maior igual a $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ e base menor igual a $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Logo,

$$\Pr\left(X \leq \frac{1}{2} | \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{\dfrac{1 + \frac{2}{3}}{2} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2} \times \dfrac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3} \times \frac{1}{6}}{2 \times \frac{1}{3}} = \frac{5}{12}$$

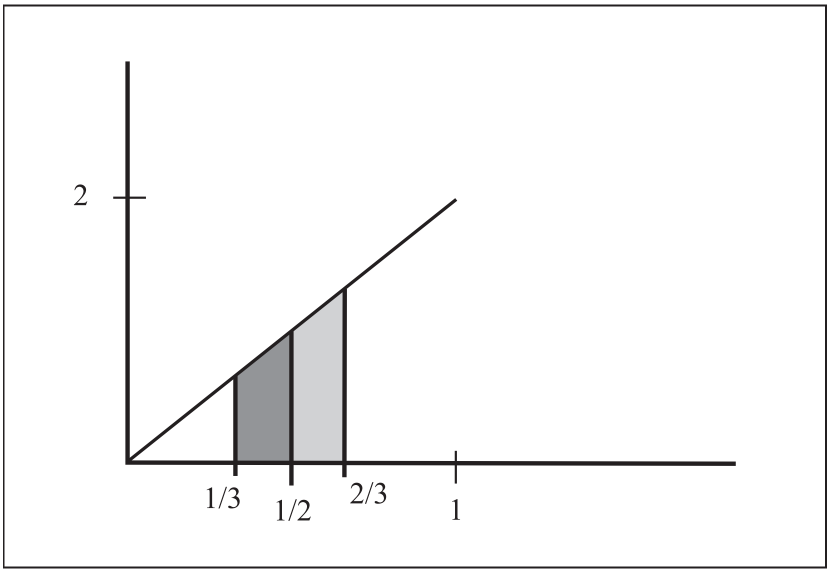

Figura 13.29: Solução do Exercício 13.3.

1. Seja $X =$ "conteúdo da lata de coca-cola". Então, $X \sim U[345, 355]$

   (a) Pede-se

$$\begin{aligned}
\Pr(X &> 353) = 1 - \Pr(X \leq 353) = 1 - F_X(353) \\
&= 1 - \frac{353 - 345}{355 - 345} = 0,2
\end{aligned}$$

   (b) Pede-se

$$\begin{aligned}
\Pr(X &< 346) = \Pr(X \leq 346) = F_X(346) \\
&= \frac{346 - 345}{355 - 345} = 0,1
\end{aligned}$$

   (c) Pede-se

$$\begin{aligned}
\Pr(350 - 4 &< X < 350 + 4) = \Pr(346 < X < 354) \\
&= \Pr(346 < X \leq 354) \\
&= \Pr(X \leq 354) - \Pr(X \leq 346) \\
&= \frac{354 - 345}{355 - 345} - \frac{346 - 345}{355 - 345} \\
&= 0,8
\end{aligned}$$

   Logo, a proporção de latas rejeitadas é $1 - 0,8 = 0,2$, ou seja, 20% das latas são rejeitadas pelo processo de controle de qualidade. Note que essa é uma proporção bastante alta!

2. É dado que

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &= 7,5 \\
\frac{(b-a)^2}{12} &= 6,75
\end{aligned}
$$

Da primeira equação resulta que $a = 15 - b$. Substituindo na segunda equação:

$$
\begin{aligned}
\frac{(b-15+b)^2}{12} &= 6,75 \Rightarrow (2b-15)^2 = 81 \Rightarrow \\
|2b-15| &= 9 \Rightarrow 2b-15 = \pm 9
\end{aligned}
$$

As soluções são $b = 12$ e $b = 3$. Mas $b = 3$ implica que $a = 12$; como $b > a$, essa não é uma solução possível. Assim, $a = 3$ e $b = 12$.