UNIDADE 4

Método Axiomático e Sistemas Formais

Na presente unidade apresentaremos as ideias centrais daquilo que é usualmente conhecido como *método axiomático* e como esse conceito é desenvolvido na lógica contemporânea com a noção de *sistema formal*.

Método axiomático

Não seria muito exagero afirmar que a noção de método axiomático avançou desde os gregos antigos praticamente na direção de todas as disciplinas do conhecimento humano. Em poucas palavras, o método axiomático pode ser resumido na seguinte máxima: “Extrair consequências a partir de primeiros princípios”. Note que os grandes sistemas filosóficos são constituídos a partir dessa estrutura. O princípio humano de que as ideias são cópias de impressões; o *cogito* cartesiano; a existência de enunciados sintéticos a priori em Kant, funcionam como princípios sobre os quais os respectivos sistemas filosóficos são edificados.

Talvez a melhor maneira de avaliar e conceituar o que entendemos por método axiomático seja estudar o exemplo daquilo que foi o primeiro sistema completo de conhecimento edificado a partir de uma estrutura axiomática: o caso da geometria grega. Foi nos *Elementos* de Euclides que se teve claramente um corpo de conhecimento estruturado axiomaticamente capaz de sistematizar toda a matemática de seu tempo.

Faremos, então, uma incursão no primeiro livro dos *Elementos,* não com o objetivo de aprender geometria, mas sim com o intuito de construir uma ideia do que vem a ser o método axiomático e do que podemos executar em seu interior.

O primeiro livro dos *Elementos* começa com uma série de definições, um conjunto de postulados e algumas noções comuns (que o leitor facilmente perceberá que exercerão o papel de regras de raciocínio). Não faremos uma apresentação completa de todos esses pontos, mas apenas daqueles que serão necessários para o entendimento da demonstração do primeiro resultado do livro. Nosso foco será compreender o que os gregos entendiam por uma *demonstração no interior de um sistema axiomático*. No que se segue, utilizamos a tradução dos *Elementos* realizada por Irineu Bicudo e publicada pela editora da Unesp (pp. 97-99).

Livro 1 dos Elementos – Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de linhas são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

(...)

13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha, em relação à qual todas as retas que a encontram, a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.

(...)

19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

(...)

23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo

prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

(...)

8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Temos, aqui, em primeiro lugar a apresentação dos princípios sobre os quais a geometria será edificada. O primeiro grupo, o das definições, serve para estabelecer os conceitos de que trata a geometria. Veremos como estas definições são utilizadas na estrutura argumentativa do primeiro resultado a ser obtido no texto. O segundo grupo são os postulados. Os três primeiros constituem uma *caracterização abstrata* daquilo que se pode fazer com os instrumentos reais do desenho geométrico: a régua e o compasso. Já o terceiro grupo, as noções comuns, funciona como regras para o raciocínio. Note que a primeira noção comum pode ser posta como:

Se A = B e B = C, então A = C.

A segunda noção comum poderia ser escrita simbolicamente como:

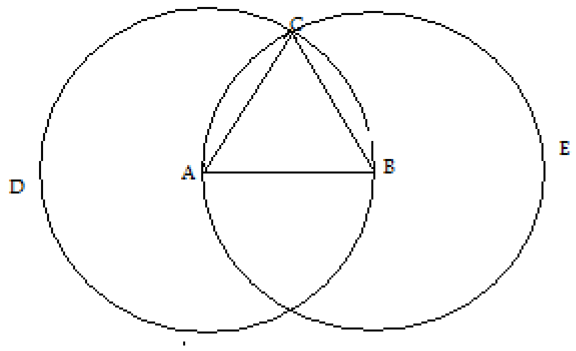
Se A = B então A + C = B + C.

Vejamos agora como esta estrutura axiomática pode servir para obter resultados que constituem o corpo da geometria. Apresentamos a primeira proposição do livro 1 dos Elementos de Euclides com o intuito de responder à seguinte questão chave: *O que é uma demonstração na geometria euclidiana?*

Proposição 1
Construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada.

Seja a reta ilimitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD [postulado 3], e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE [postulado 3], e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos, A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB [postulado1].
E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB [definição 15]; de novo, como o ponto B é o centro do círculo CAE, a BC é igual à BA [definição 15]. Mas a CA foi também provada igual a AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas, as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB [noção comum 1]; portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero [definição 20] e foi construído sobre a reta limitada dada AB; o que era preciso fazer.



Vamos agora olhar para a demonstração da proposição acima tentando encontrar alguma forma de conceituar o que é uma demonstração no sistema axiomático que corresponde à geometria de Euclides; o que corresponde à pergunta que fizemos acima.

Antes de mais nada, uma demonstração é um texto formado por um conjunto de sentenças. No entanto, ela não deve ser um texto qualquer. As sentenças que compõem uma demonstração devem vir em uma dada ordem (note que, se misturássemos as sentenças na demonstração acima, o texto como um todo não faria sentido). Portanto, o texto deve ser um conjunto *ordenado* de sentenças. Mas isso ainda não basta. Repare que cada sentença no texto que constitui a demonstração possui algum tipo de justificativa (que aparecem entre colchetes). Dentre as justificativas, encontramos: hipóteses, aplicação de definições, uso de postulados e, finalmente, emprego de noções comuns. Perceba, também, que a demonstração vem acompanhada de uma figura que serve para ilustrar a ideia da prova mas que não constitui parte da prova em si. A figura tem a única utilidade de tornar o argumento mais facilmente inteligível.

Assim, poderíamos conceituar a noção de demonstração na geometria euclidiana da seguinte forma:

Uma *demonstração* na geometria grega é um texto composto de um conjunto ordenado de sentenças tal que a última sentença do texto é a sentença que se deseja demonstrar e todas as sentenças que constituem a demonstração devem ter algum tipo de justificação. Entre as justificativas possíveis tem-se: hipóteses, aplicação de definições, uso de postulados e emprego de noções comuns.

ATIVIDADES AVA

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e faça a atividade referentes a esta Subunidade.

Sistemas formais

Vamos apresentar nessa seção o conceito contemporâneo de sistema formal de modo a convencer o leitor de que se trata apenas de uma sofisticação precisa da ideia de sistema axiomático que vimos na seção anterior. Novamente vamos examinar um trecho de um artigo de um dos maiores lógicos de século XX: Kurt Gödel. A tradução do texto completo aparece em uma coletânea organizada pela Fundação Calouste Gulbenkian sobre o teorema de incompletude de Gödel (pp. 53-54).

Acerca de proposições indecidíveis de sistemas matemáticos formais
Kurt Gödel

Um *sistema matemático formal* é um sistema de símbolos juntamente com regras para o seu emprego. Os *símbolos individuais* chamam-se os termos primitivos. *Fórmulas* são sucessões finitas destes termos. Definir-se-á uma classe de fórmulas a que se chamará (a classe das) *fórmulas com sentido* e uma classe de fórmulas com sentido a que se chamará de *axiomas*. O número de axiomas pode ser finito ou infinito. Além disso, especificar-se-á uma lista de regras, a que se chamará *regras de inferência*; se se chamar a uma destas regras R, então ela define a relação de *consequência imediata por* R entre um conjunto de fórmulas com sentido

$$M_1,\ldots,M_k$$

a que se chamam *premissas* e a uma fórmula N a que se chama *conclusão* (em geral k = 1 ou 2). Exigiremos que as regras de inferência e as definições das fórmulas com sentido e os axiomas sejam construtivos; i.e., para cada regra de inferência haverá um processo finito para determinar se uma dada fórmula B é uma consequência imediata (por essa regra) das fórmulas dadas

$$A_1,\ldots,A_n$$

e haverá um processo finito para determinar se uma dada fórmula A é uma fórmula com sentido ou um axioma.

A uma fórmula N chamar-se-á uma consequência imediata de

$$M_1,...,M_n$$

se N é uma consequência imediata de

$$M_1,...,M_n$$

por qualquer das regras de inferência. Uma sucessão finita de fórmulas será uma demonstração (e mais precisamente uma demonstração da última fórmula da sucessão), se cada fórmula da sucessão for ou um axioma ou uma consequência imediata de uma ou mais fórmulas precedentes. Uma fórmula é demonstrável se existe uma demonstração dessa fórmula.

Note que a definição de sistema formal, e a de demonstração que lhe é subjacente, corresponde fundamentalmente à que foi obtida na seção anterior. A diferença está apenas no grau de formalização. Sentenças escritas em linguagem natural são substituídas pela noção de fórmulas com sentido. No entanto, uma demonstração é ainda uma sequência (sucessão) de fórmulas com sentido com algum tipo de justificação ("ou um axioma ou uma consequência imediata de uma ou mais fórmulas precedentes").

Os sistemas de lógica edificados no século XX são exemplos típicos de sistemas formais. Mas, em vez de apresentá-los, vamos considerar um exemplo de sistema formal que aparece no livro *Gödel, Escher, Bach: um entrelaçamento de gênios brilhantes,* de autoria de Douglas Hofstadter (com uma pequena adaptação que introduzimos, pp.37-40). O exemplo é didático o suficiente para que o leitor possa apreciar a natureza formal, abstrata e precisa deste conceito.

ATIVIDADES AVA

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e faça a atividade referentes a esta Subunidade.

O sistema MIU de Hofstadter

De acordo com o texto de Gödel acima, para apresentar um sistema formal devemos começar com a estipulação de um conjunto de símbolos individuais. No sistema MIU os símbolos individuais são as letras: M, I e U (maiúsculas). Assim, uma fórmula do sistema MIU é qualquer sequência finita formada pelas letras M, I e U. Portanto, exemplos de fórmulas desse sistema são:

MIIUIM
MMM
IMU
IIIIII
UUMIUIM

Temos, agora que definir o que são fórmulas com sentido. Nesse sistema, fórmulas com sentido são as que iniciam por M. Assim, nem todas as fórmulas listadas acima são com sentido (apenas as duas primeiras o são). O próximo passo é determinar o conjunto dos axiomas do sistema. No nosso caso, teremos um único axioma:

Axioma: MI.

Faltam apenas as regras de inferência. Nesse sistema, teremos quatro regras que serão cuidadosamente enunciadas.

Regra I. Se você possui uma cadeia cuja última letra é I, pode acrescentar um U no final.

Uma maneira simbólica de enunciar esta regra é: De xI, obter xIU, (ou ainda)

$$\frac{xI}{xIU}.$$

em que ‘x’ representa uma sequência qualquer (inclusive vazia) de símbolos individuais do sistema. Exemplos de aplicação da regra I seriam:

de MMIUII obter MMIUIIU
de MI obter MIU
de MIIIUUI obter MIIIUUIU

Regra II. Suponhamos que você tenha Mx. Nesse caso você poderá obter Mxx.

Ou seja, a fórmula a ser obtida é a duplicação da fórmula anterior sem contar com o M inicial. Simbolicamente, temos

$$\frac{Mx}{Mxx}.$$

Exemplos de aplicação da regra II seriam:

de MMIUII obter MMIUIIMIUII
de MI obter MII
de MIIIUUI obter MIIIUUIIIIUUI

Regra III. Se ocorrer III em uma sequência, você poderá obter a mesma sequência com o U no lugar dos III.

Em símbolos:

$$\frac{xIIIy}{xUy}$$

Aqui, novamente, ‘x’ e ‘y’ são quaisquer sequências de símbolos individuais incluindo a sequência vazia. Exemplos de aplicação da regra III são:

de $M\underline{III}U$, obter MUU
de $MIUU\underline{III}UI$ obter MIUUUI
de $M\underline{III}UMIU$ obter MUUMIU
de $MUIU\underline{III}$ obter MUIUU

(sublinhamos as sequências de I’s em que a regra é aplicada). Regra IV: Se ocorrer UU em uma de suas sequências, você poderá apagá-los.

Em símbolos:

$$\frac{xUUy}{xy}$$

Exemplos de aplicação da regra IV seriam:

de $MI\underline{UU}I$ obter MII
de $MU\underline{UU}$ obter MU
de $MIII\underline{UU}IUI$ obter MIIIIUI

Falta apresentar, agora, exemplos de demonstrações (ou de fórmulas demonstráveis). Lembre que uma demonstração é uma sucessão finita de fórmulas em que cada fórmula na sequência ou é um axioma ou é obtido de fórmulas anteriores na sequência pela aplicação de alguma das quatro regras enunciadas acima. Além disso, a última fórmula da sequência é denominada demonstrável (por aquela demonstração).

Assim, para mostrar que a fórmula com sentido MUIIU é demonstrável, devemos encontrar uma sequência de fórmulas que cumprem a definição de demonstração acima e tal que a última fórmula da sequência é a fórmula em questão MUIIU. Uma possível sequência seria a seguinte:

1.	MI	axioma
2.	MII	a partir de (1) pela regra II
3.	MIIII	a partir de (2) pela regra II
4.	MIIIIU	a partir de (3) pela regra I
5.	MUIU	a partir de (4) pela regra III
6.	MUIUUIU	a partir de (5) pela regra II
7.	MUIIU	a partir de (6) pela regra IV

Note a semelhança do que foi feito acima com a noção de demonstração na geometria grega. Temos também aqui um texto composto de um conjunto ordenado de sentenças tal que a última sentença do texto é a sentença que se deseja demonstrar (MUIIU) e todas as sentenças que constituem a demonstração devem ter algum tipo de justificação (indicada na coluna da direita). No presente caso, as justificativas possíveis são: axiomas ou aplicação de regras (nesse sistema não temos definições).

ATIVIDADES AVA

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e faça a atividade referentes a esta Subunidade.

Bibliografia

ANELLIS, Irving (2004). "The Genesis of the Truth-Table Device" In: *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*. Vol. 24: Iss. 1, Article 5. Disponível em: <http://digitalcommons.mcmaster.ca/russelljournal/vol24/iss1/5>

AZEREDO, Vânia Dutra de (coord.). *Introdução à Lógica*. 3ª ed. Ijuí, RS: Editora Unijuí, 2004.

BARONETT, Stan. *Lógica: Uma introdução voltada para as ciências*. Tradução: Anatólio Laschuk. Porto Alegre: Bookman, 2009.

COPI, Irving M. *Introdução à Lógica*. Tradução de Álvaro Cabral. 2ª ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

DECARTES René. *Meditações sobre Filosofia Primeira*. Tradução e nota prévia de Fausto Castilho. Campinas, SP: Centro de Estudo da História da Filosofia Moderna e Contemporânea, IFCH-UNICAMP, 1999.

________________. *Discurso sobre o Método*. Tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Jr. 2ª ed. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

EUCLIDES. *Os Elementos* (Trad. de Irineu Bicudo). São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FREGE, Gottlob. "Sobre a justificação científica de uma conceitografia", em: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Seleção, introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado. 2ª ed. amp. e rev. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009. O mesmo escrito teve reedição recente, juntamente com a própria *Conceitografia*, em: *Os Primeiros Escritos Lógicos de Gottlob Frege*. Introdução, tradução, notas e apêndice de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie. São Paulo: Instituto Brasileiro de Filosofia e Ciência "Raimundo Lúlio" (Ramon Llull), 2012.

GÖDEL, K. *O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo*. 2º ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 2009.

HAACK, Susan. *Filosofia das Lógicas*. Tradução de Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

HOFSTADTER, D. R. *Gödel, Escher, Bach: um entrelaçamento de gênios brilhantes*. Brasília: Editora UnB. 2001.

IBRI, Ivo A. *Kósmos Noêtós: A arquitetura metafísica de Charles S. Peirce*. São Paulo: Perspectiva; Hólon, 1992.

KANT, Immanuel. *Fundamentação da Metafísica dos Costumes*. Tradução, com introdução e notas por Guido Antônio de Almeida. São Paulo: Discurso Editorial; Barcarola, 2009.

MATES, B. *Lógica elementar.* São Paulo: Editora Nacional e Editora da Universidade de São Paulo. 1967.

MORTARI, Cezar A. *Introdução à Lógica*. São Paulo: Editora UNESP; Imprensa Oficial do Estado, 2001.

PEIRCE, Benjamin. *Linear Associative Algebras*. New edition, with adenda and notes, by C. S. Peirce, son of the author. New York: D. Van Nostrand, Publisher. 1882. Disponível na Internet em: < http://archive.org/details/linearassociati00peirgoog>. Acesso em 01/08/2012.

PEIRCE, Charles S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Ed. by: C. Hartshorne & P. Weiss (v. 1-6); A. Burks (v. 7-8). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1931-58. 8 vv.

________________. *The Essential Peirce*: Selected Philosophical Writings. Ed. by: N. Houser & C. Kloesel (v. 1: 1867-1893); "Peirce Edition Project" (v. 2: 1893-1913). Bloomington; Indianapolis: Indiana University Press, 1992-98. 2 v.

________________. *Pragmatism as a Principle and Method of Right Reasoning*: The 1903 Harvard "Lectures on Pragmatism". Ed. and Introduced with a commentary, by Patricia Ann Turrisi. Albany, NY: The State University of New York Press, 1997.

________________. *Historical Perspectives on Peirce's Logic of Science*: a history of science. Ed. by Carolyn Eisele. Berlin; New York; Amsterdam: Mouton Publishers, 1985, 1 v. em 2 tomos.

________________.*The New Elements of Mathematics*. Ed. by Carolyn Eisele. Haia; Paris: Mouton Publishers; Atlantic Highlands, NJ: Humanities Press, 1976, 4 vv. em 5.

________________. *Reasoning and the Logic of Things*: The Cambridge conference lectures of 1898. Ed. by Kenneth Laine Ketner with and introduction by Kenneth Laine Ketner and Hilary Putnam. Cambridge, MA; London: Harvard University Press, 1992.

________________. *Writings of Charles Sanders Peirce*: A Chronological Edition. Ed. by “The Peirce Edition Project”. Bloomington; Indianapolis: Indiana University Press, 1982-2008. 7 vv.

________________. *Ilustrações da Lógica da Ciência*. Introdução e tradução: Renato Rodrigues Kinouchi. Aparecida, SP: Ideias & Letras, 2008.

PLATÃO. *A República*. Tradução: Anna Lia Amaral de Almeida Prado. Revisão técnica e introdução: Roberto Bolzani Filho. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

PRIEST, Graham. *Logic – A very short introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

SANTAELLA, Lúcia. *A Assinatura das Coisas: Peirce e a literatura*. Rio de Janeiro: Imago, 1992.

SILVEIRA, Lauro Frederico Barbosa da. *Curso de Semiótica Geral*, São Paulo: Quartier Latin, 2007.

VELASCO, Patrícia del Nero. *Educando para a Argumentação: Contribuições do ensino da lógica*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.