UNIDADE 4

Probabilidade

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Definir o termo probabilidade;
- Descrever as abordagens clássicas das frequências relativa e subjetiva da probabilidade;
- Entender os termos experimento, espaço amostral e evento;
- Definir os termos probabilidade condicional e probabilidade conjunta; e
- Calcular probabilidades aplicando as regras da adição e da multiplicação.

Introdução

Caro estudante,

Vamos iniciar mais uma Unidade e nela veremos os conceitos de probabilidade. É importante que você esteja atento aos exercícios resolvidos e, à medida que for avançando, relembre os conceitos aprendidos anteriormente.

Preparado para mais esse desafio?

Então, vamos juntos!

A origem da Teoria das Probabilidades está relacionada aos jogos de azar desde o século XVII, pois surgiu da necessidade de um método racional para calcular os riscos dos jogadores em jogos de cartas, de dados etc.

Posteriormente, passou a auxiliar governos, empresas e organizações profissionais em seus processos de decisões, ajudando a desenvolver estratégias. Na área da Gestão, passou a ser uma ferramenta para tomada de decisões e para análise de chances e de riscos. Para decidir por um ou por outro procedimento, é essencial conhecermos as chances de cada um dar certo e, também, decidirmos sobre um sistema de gestão. Também, para sabermos os riscos de uma exposição poder afetar a imagem de um administrador, temos de conhecer a probabilidade de ela causar dano ou não.

Para que você possa entender melhor os principais conceitos de probabilidade, destacamos a seguir dois tipos de fenômenos:

- **Fenômenos determinísticos**: aqueles que invariavelmente dão o mesmo resultado se repetidos sob condições específicas. Um exemplo é a aceleração da gravidade na ausência de ar (vácuo). Nesse caso, o resultado sempre será o mesmo, pois não temos variações que venham a influenciar o resultado.
- **Fenômenos aleatórios**: aqueles que, mesmo realizados sob as mesmas condições, apresentam variações nos resultados de diferentes observações. Pense na reação de um contribuinte quando ele é atendido ou no lançamento de um dado. Em cada uma dessas situações, os resultados nem sempre serão os mesmos. Por isso são aleatórios, ou seja, ocorrem de forma aleatória, sem resultado previsível.

São nos fenômenos aleatórios que a Teoria das Probabilidades auxilia na análise e na previsão de um resultado futuro. Quando você pensa em probabilidade, vai querer identificar a chance de ocorrência de um determinado resultado de interesse em situações nas quais não é possível calcular com exatidão o valor real do **evento (fenômeno aleatório)**. Dessa forma, trabalhamos com chances ou probabilidades.

Uma situação que exemplifica esse fato está associada à seguinte pergunta: um funcionário público poderá cumprir sua meta de trabalho na semana que vem?

Para responder a essa e a outras perguntas, você poderá aplicar alguns conceitos apresentados, a seguir.

Experimento Aleatório

Para você calcular uma probabilidade, é necessário ter um experimento aleatório, ou seja, qualquer processo que venha a gerar um resultado incerto ou casual.

Para que um processo possa ser considerado um experimento aleatório, ele deve ter as seguintes características:

- cada experimento pode ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições (n);
- não se conhece *a priori* o resultado do experimento, mas pode-se descrever todos os possíveis resultados; e
- quando o experimento for repetido inúmeras vezes, surgirá uma regularidade do resultado, isto é, haverá uma estabilidade da fração $f = \frac{r}{n}$ (frequência relativa) da ocorrência de um particular resultado, em que r corresponde ao número de vezes que um determinado resultado aconteceu.

Sendo assim, podemos considerar que um processo aleatório corresponde, para ilustrar, ao lançamento de uma moeda jogada inúmeras vezes, já que pode ser repetido indefinidamente. Não conhecemos o resultado, mas podemos descrever os possíveis resultados (cara ou coroa). Além disso, quando você lança a moeda três mil vezes, por exemplo, ocorre uma estabilização da frequência relativa ou probabilidade em 0,5. A Figura 14 nos mostra que no início a frequência relativa não é tão próxima de 0,5, como acontece após 1.000 jogadas.

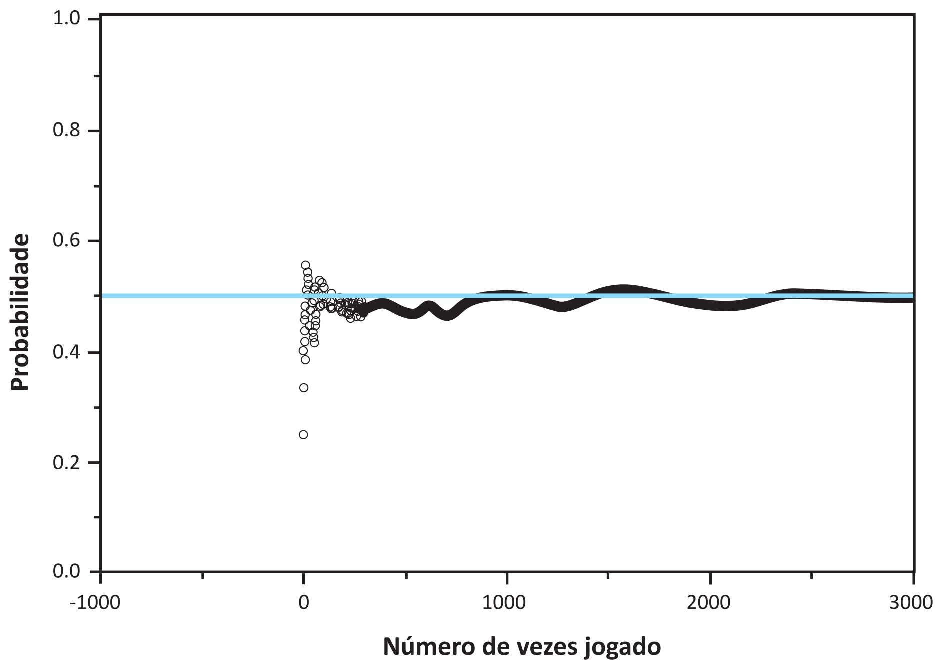


Figura 14: Experimento aleatório
Fonte: Elaborada pelo autor

Perceba, com base nos experimentos e nas situações mencionadas, que a incerteza sempre está presente, o que quer dizer que, se esses experimentos forem repetidos em idênticas condições, não se pode determinar qual resultado ocorrerá.

A incerteza está associada à chance de ocorrência que atribuímos ao resultado de interesse.

Para entender melhor esse conceito, vamos considerar como exemplo o setor de atendimento de uma determinada prefeitura que conta com seis funcionários. Um experimento ao acaso seria a escolha aleatória de um dos funcionários. Podemos considerar o gênero do funcionário escolhido como o que queremos avaliar. Você, então, vai aplicar os conceitos vistos de experimento aleatório. Veja que este corresponde a um experimento aleatório, pois sabemos quais resultados podem ocorrer, ou seja, um dos seis funcionários será o avaliado. Entretanto, não podemos dizer que resultado (pessoa) sairá nesse sorteio.

Agora que você entendeu o que é experimento aleatório, você irá compreender outro conceito importante: o de espaço amostral.

Espaço Amostral (Ω)

Vamos considerar a situação em que um funcionário público consegue ou não atingir sua meta de produtividade.

Nesse caso, quais os possíveis resultados que você pode ter?

O funcionário poderá atingir ou não a meta. Então, temos apenas dois resultados possíveis. O conjunto desses resultados possíveis, que poderiam ser mais de dois também, no caso de outras situações, é definido como **espaço amostral*** e pode ser simbolizado por S ou Ω (omega).

***Espaço amostral** – conjunto de todos os resultados possíveis. Fonte: Elaborado pelo autor.

No nosso caso, teremos Ω = {atinge; não atinge}

Lembrando do Diagrama de Venn, que você estudou na disciplina *Matemática para Administradores*, podemos representar o espaço amostral conforme indica a Figura 15:

Os Diagramas de Venn são úteis para mostrar a relação entre os elementos de um conjunto.

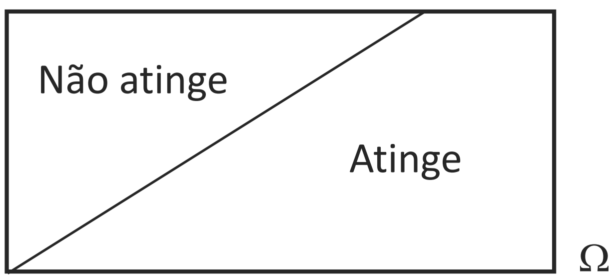


Figura 15: Representação do espaço amostral
Fonte: Elaborada pelo autor

A definição do espaço amostral é de fundamental importância, pois, muitas vezes, a partir dele, você pode calcular probabilidades. Veremos isso um pouco mais a frente.

Nesse caso, se todos os resultados possíveis constituem o nosso espaço amostral, o que será cada resultado em particular?

Com intuito de responder a essa proposição, daremos continuidade ao nosso estudo. Vamos à próxima seção.

Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω) associado ao experimento aleatório é chamado de evento, ou seja, um determinado resultado que ocorra dentro do espaço amostral. Então, em nosso exemplo, teremos que o funcionário público que cumprir a meta será considerado como um dos eventos que compõem o espaço amostral. Nesse caso, o nosso espaço amostral apresenta dois eventos apenas (cumprir ou não cumprir a meta).

Geralmente, calculamos as chamadas probabilidades desses eventos associados ao nosso espaço amostral. Por isso a importância de você ter esse conceito bem definido em sua mente!

Imagine que algumas secretarias municipais oferecem, por cortesia, cadeiras suficientes em determinado setor para que os contribuintes possam esperar confortavelmente; e, outras secretarias, não oferecem essa cortesia. Vamos ver como esse problema pode ser formulado dentro do contexto de experimento aleatório, espaço amostral e eventos.

O **experimento** é a seleção de uma secretaria e a observação do fato dessa secretaria oferecer ou não a cortesia. Há dois pontos amostrais no espaço correspondente a esse experimento:

S:{a secretaria oferece a cortesia}

N:{a cortesia de cadeira não é oferecida pela secretaria}

Um ponto importante a ser considerado é o de que nem sempre as chances de ocorrência dos eventos são iguais a 50%, como no caso do lançamento de uma moeda. Nessa situação, provavelmente a chance da secretaria oferecer a cortesia de assentos (S) poderá ser bem maior do que a de não oferecer (N).

Definições de Probabilidades

Até agora vimos diferentes e importantes conceitos relacionados à estatística. Vamos agora definir o que vem a ser probabilidade. Para o bom entendimento desse conceito, imagine as seguintes situações:

- 50% de chance de um projeto dar certo;
- 95% de certeza de que um determinado serviço será realizado por uma prefeitura em tempo hábil; e
- 1 em cada 10 servidores públicos não tem ido trabalhar pelo menos um dia na semana.

Como você pode ver, estamos falando das chances acerca de que algo venha a acontecer. Então, probabilidade pode ser considerada a chance de que um determinado evento venha a ocorrer.

As probabilidades apresentam diferentes visões. As principais são mostradas a seguir, acompanhe!

A Probabilidade Objetiva nasceu no século XVII por interesse comum de Fermat e Pascal.

Saiba mais **Pierre Fermat (1601-1665)**

Matemático francês que passou parte de sua vida como conselheiro do parlamento de Toulouse. Seu campo predileto de estudos foi o da teoria dos números, na qual se consagra. Fermat dá considerável impulso à aritmética superior moderna, exercendo grande influência sobre o desenvolvimento da álgebra. Fermat se sobressai, ainda, no terreno do cálculo de probabilidades. Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/fermat.htm>. Acesso em: 24 nov. 2010.

Blaise Pascal (1623-1662)

Com apenas três anos, perdeu a mãe. O pai encarregou-se diretamente da sua educação, desenvolvendo um método singular de educação com exercícios e jogos de disciplinas, como Geografia, História e Filosofia. Contudo, seu pai acreditava que a Matemática somente deveria ser ensinada ao filho quando este fosse mais velho. Porém, Pascal descobriu as maravilhas da ciência dos números. Aos 12 anos, mesmo sem professor, ele descobre que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Fonte: <http://tinyurl.com/285crno>. Acesso em: 24 nov. 2010.

***Mutuamente excludentes** – a ocorrência de um evento exclui a ocorrência do outro. Fonte: Elaborado pelo autor.

***Igualmente prováveis** – ocorrem com a mesma probabilidade. Fonte: Elaborado pelo autor.

Se um **evento** pode ocorrer em n maneiras **mutuamente excludentes*** e **igualmente prováveis***, e, se m dessas ocorrências tem uma característica E, então, a probabilidade de ocorrência de E é:

$$\boxed{P(E) = \frac{m}{N}}$$

Onde:

m: número de eventos favoráveis à probabilidade E que se deseja calcular, ou seja, o número de vezes que E acontece; e

N: número total de ocorrências dentro do espaço amostral.

Vejamos exemplos de probabilidades a serem obtidas:

- Um dado homogêneo tem probabilidade 1/6 de cair com a face 2 para cima.
- Em um conjunto de cartas (sem os coringas) bem embaralhadas, a probabilidade de sortearmos uma carta de copas é de 13/52.

*** Reprodutibilidade** – ocorrência de diversas vezes de um mesmo evento. Fonte: Elaborado pelo autor.

A visão da frequência relativa depende da **reprodutibilidade*** do mesmo processo e da habilidade de contarmos o número de repetições.

Sendo assim, se algum processo é repetido um grande número de vezes, n, e se algum evento com característica E ocorre m vezes, a frequência relativa m/n é aproximadamente igual à probabilidade de E:

$$\boxed{P(E) \approx m/n}$$

Contudo, observe que m/n é apenas uma estimativa de P(E).

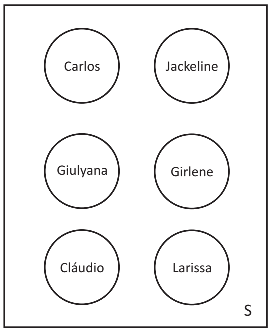
A visão da probabilidade subjetiva é uma medida da “confiança” que temos sobre a verdade de certa proposição, apesar de não termos cálculos precisos sobre esse valor. Imagine proposições sobre a probabilidade de que em três anos teremos um modelo eficiente de gestão pública ou que as capacidades do processamento computacional se igualarão à capacidade do cérebro humano em 30 anos. Ambas são apenas estimativas que não se baseiam em cálculos.

Para que você entenda melhor algumas das definições de probabilidade, veja a descrição que preparamos ao longo de uma situação.

Imagine que em um determinado setor de uma prefeitura temos os seguintes funcionários: Carlos, Jackeline, Giulyana, Girlene, Cláudio e Larissa. Então, você pode verificar que temos seis funcionários. Vamos pensar agora: qual a probabilidade de se escolher um funcionário ao acaso e ele ser do gênero masculino?

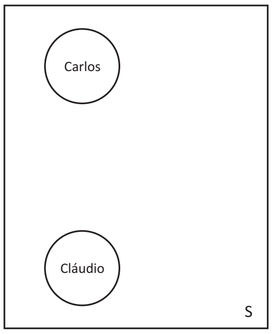
Para obtermos as respostas, vamos definir o espaço amostral e o evento desejado. Consideremos espaço amostral ou conjunto de possibilidades todos os funcionários públicos do setor.

S = {Carlos, Jackeline, Giulyana, Girlene, Cláudio, Larissa}



E, para definir o evento favorável, precisamos considerar este o conjunto de possibilidades favoráveis que nos interessa, ou seja, os funcionários do gênero masculino.

Evento = {Carlos, Cláudio}



Então, a probabilidade que estamos procurando, ou seja, a de escolher um funcionário ao acaso e ele ser do gênero masculino, pode ser apresentada conforme descrição, a seguir:

$$P\,(\,funcionário\ público\ gênero\ masculino\,) = \frac{2}{6} = \frac{número\ de\ funcionários\ do\ sexo\ masculino}{número\ total\ de\ funcionários}$$

Logo, considerando três eventos relativos aos funcionários da prefeitura, conforme descrevemos anteriormente, temos:

- A (funcionário ser do sexo feminino).
- B (seu nome começar com a letra G).
- C (seu nome começar com a letra C).

Então, poderemos definir os eventos mencionados anteriormente como:

- A = {Jackeline, Giulyana, Girlene, Larissa}.
- B = {Giulyana, Girlene}.
- C = {Carlos, Cláudio}.

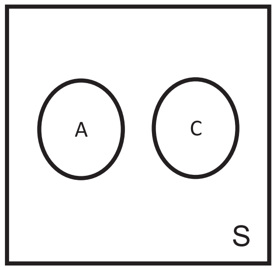
Você pode definir a probabilidade como uma função que atribui um número real aos eventos do Ω (se A é um evento do Ω, P(A) é a probabilidade de A), a qual satisfaz:

- $P(\varnothing) = 0$ (probabilidade de vazio é igual a zero).
- $P(\Omega) = 1$ (probabilidade de acontecer todo o espaço amostral é igual a um).

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (a probabilidade de um determinado evento, sempre estará entre zero e um).

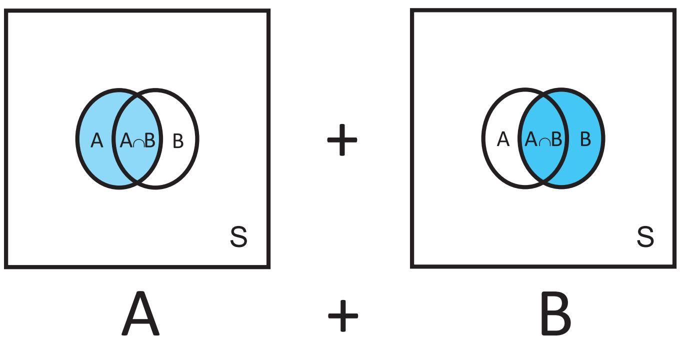
Você pode ainda utilizar a regra da soma, em que dados dois **eventos mutuamente exclusivos***, A e C de Ω, temos:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$$



*** Eventos mutuamente exclusivos** – são aqueles que não podem acontecer simultaneamente. Fonte: Elaborado pelo autor.

Já no caso a seguir, em que os eventos não são mutuamente exclusivos e podem ocorrer simultaneamente, na regra da soma, devemos considerar que a intersecção (área) será contada duas vezes.



Nesse caso, devemos retirar uma vez a área de $(A \cap B)$ na regra da soma, pois, como você pode ver nos desenhos anteriores, a interseção $(A \cap B)$ é contada duas vezes.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Lembre-se de que o símbolo $\cap$ corresponde à interseção e $\cup$ corresponde à união.

Considerando os eventos A, B e C, temos as seguintes situações:

- $A \cup C$ é o evento em que A ocorre ou C ocorre ou, ainda, ambos ocorrem → {Carlos, Jackeline, Giulyana, Girlene, Cláudio, Larissa}.

E a chance de acontecerem dois eventos simultaneamente corresponde à chance de os eventos acontecerem ao mesmo tempo, como você pode observar na descrição, a seguir:

- $A \cap B$ é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente → {Giulyana, Girlene}.

Em muitas situações o que nos interessa é aquilo que pertence ao espaço amostral e não pertence ao evento de interesse. A Figura 16 mostra bem isso:

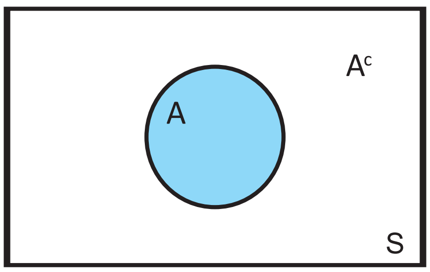


Figura 16: Espaço amostral
Fonte: Elaborada pelo autor

$\bar{A}$ ou A^c é o evento em que A não ocorre (complementar de A). Em nosso exemplo, consideramos que o completar de A (funcionário ser do gênero feminino) corresponde a todas as pessoas do gênero masculino, ou seja:

$$\bar{A} \text{ ou } A^c = \{\textbf{Carlos, Claudio}\}$$

Probabilidade Condicional

A partir de agora veremos outros conceitos de probabilidade e para tanto você deve considerar os dados, a seguir, referentes a uma prefeitura, em que foram selecionados, a partir de uma amostragem estratificada (vista anteriormente), 101.850 contribuintes das classes **média-baixa** e **alta**. Posteriormente, foi feita a verificação do número de contribuintes, de cada classe social, que pagaram um determinado tributo em dia (evento: pagaram) e também o número de contribuintes das classes estudadas que não pagaram em dia o tributo (evento: não pagaram). Para compreender essa descrição, observe os resultados descritos na Tabela 13:

Tabela 13: Contribuintes pagantes e não pagantes

	Média-baixa	Alta	Total
Pagaram (P)	39.577	8.672	48.249
Não Pagaram (NP)	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com os dados apresentados, podemos considerar então que o nosso espaço amostral (Ω) corresponderá ao conjunto de 101.850 contribuintes.

Agora, para ampliarmos essa discussão juntos, você vai considerar os eventos apresentados, a seguir, para que possamos trabalhar com eles.

- P = contribuintes que **pagaram** o tributo em dia.
- NP = contribuintes que **não pagaram** o tributo em dia.

- MB = contribuintes da classe **média-baixa**.
- P ∩ MB = contribuintes que **pagaram (P)** o tributo em dia e **ao mesmo tempo** são da classe **média-baixa (MB)**.
- P ∪ MB = contribuintes que **pagaram (P)** o tributo em dia ou são da classe **média-baixa (MB)**.

Você pode obter, então, as probabilidades de alguns eventos considerados anteriormente, por exemplo:

$$\mathrm{P}(MB) = \frac{n^o \text{ de contribuintes que são da classe MÉDIA-BAIXA}}{\text{nº total de contribuintes}} = \frac{85.881}{101.850} = 0,843$$

$$\mathrm{P}(P) = \frac{n^o \text{ de contribuintes que pagaram em dia}}{\text{nº total de contribuintes}} = \frac{48.249}{101.850} = 0,473$$

Considerando os contribuintes que pagam e os que não pagam em dia, temos apenas estes dois resultados possíveis. E, para obtermos a probabilidade de contribuintes que não pagaram em dia, teremos a probabilidade de todo o espaço amostral (101.850), que é igual a 1 menos a probabilidade de contribuintes que pagaram em dia (P). Nesse caso, estamos usando o conceito de eventos complementares. Este cálculo é mostrado para você a seguir:

$$\text{NP} = \overline{P} \text{ (não pagaram (NP ou } \overline{P}\text{) é o complementar dos que pagaram (P))}$$

$$\text{ou seja, } \mathrm{P(NP)} = \mathrm{P}(\overline{P}) = 1 - \mathrm{P}(P) = 1 - 0,473 = 0,527$$

Com base nesse conhecimento, podemos calcular a probabilidade de escolher um contribuinte aleatoriamente e este ser da classe média-baixa ou ser quem paga em dia o tributo. Veja que, nesse caso, os eventos não são mutuamente exclusivos, ou seja, existem contribuintes que são comuns nas duas situações ao mesmo tempo. Assim, a probabilidade procurada será dada por:

$$\frac{39577}{101850} = 0{,}388$$

$$P(P \cup MB) = P(P) + P(MB) - P(P \cap MB)$$
$$P(P \cup MB) = 0{,}473 + 0{,}843 - 0{,}388$$
$$P(P \cup MB) = 0{,}928$$

Vamos considerar ainda o exemplo anterior. Se você souber que um contribuinte sorteado paga em dia o tributo, qual a probabilidade de que ele seja da classe média-baixa?

Agora, temos uma informação parcial e importante: o contribuinte selecionado paga em dia. Vamos então designar a probabilidade de P quando se sabe que o contribuinte selecionado paga em dia o tributo e MB quando o contribuinte é da classe social média-baixa.

Assim, a probabilidade que chamaremos de P(MB/P) é denominada de **probabilidade (condicional) de MB dado P (lembre-se que o símbolo / não corresponde a uma divisão e sim a uma condição de que outro evento já aconteceu)**. Então, nesse caso, temos o que chamamos de probabilidade condicionada, ou seja, a probabilidade de um evento **acontecer dado que, sabendo que**, outro evento já aconteceu.

Sendo assim, é natural atribuirmos:

$$P\,(MB/P) = \frac{\text{nº de contribuintes que são da classe MÉDIA-BAIXA e pagam em dia}}{\text{nº total contribuintes que pagam em dia}} =$$
$$= \frac{39.577}{48.249} = 0{,}820$$

Veja que, nesse caso, ocorreu uma redução no espaço amostral, já que tínhamos a informação anterior de que o contribuinte selecionado pagava em dia. Dessa forma, do espaço amostral total que tínhamos (101.850), ele foi reduzido para 48.249 e, destes, interessavam-nos os que eram da classe social média-baixa. Sendo assim:

$$P\,(MB/P) = \frac{\dfrac{\text{nº de contribuintes da classe MÉDIA-BAIXA e que pagam em dia}}{\text{nº total de contribuintes}}}{\dfrac{\text{nº de contribuintes que pagam em dia}}{\text{nº total de contribuintes}}}$$

$$P\,(MB/P) = \frac{P(MB \cap P)}{P(P)}$$

Portanto, você pode generalizar para dois eventos A e B quaisquer de um experimento aleatório. Dessa forma, podemos dizer que a probabilidade condicional de A dado B (nota-se por P (A / B)) é definida como:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

De posse desse conhecimento, podemos definir, a partir de agora, a regra do produto; conforme discutiremos na próxima seção.

Regra do Produto e Eventos Independentes

A partir da probabilidade condicionada definida anteriormente, obteremos a chamada **regra do produto** para a probabilidade da interseção de dois eventos A e B de um espaço amostral:

Passe a probabilidade de ocorrência de B na probabilidade condicionada e multiplique pela probabilidade de ocorrência de A sabendo que B já aconteceu.

$$\boxed{P(A \cap B)} = P\ (A/B) \cdot P(B)$$

Logo, se dois eventos A e B são independentes, então P{A / B) = P{A} ou P{B / A) = P(B), já que um evento não interfere no outro, ou seja, eles são independentes.

Desse modo, se A e B forem independentes, você pode verificar que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} => P(A \cap B) = P(A/B)P(B) => P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Então, para que dois eventos A e B quaisquer sejam considerados independentes é necessário fazer a seguinte relação:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\ P(B)}$$

Para compreender melhor essa nossa discussão, analise outra situação na qual utilizaremos os conceitos aprendidos de probabilidade. Para tanto, considere os dados a seguir, representativos da distribuição da renda anual de funcionários públicos de dois setores (A e B), apresentados na Tabela 14.

Tabela 14: Distribuição de renda anual do funcionário público

Faixa de renda anual (em R$1.000,00)	Setor		Total
	A	B	
15 a 20 (R1)	70	40	110
20 a 25 (R2)	15	15	30
25 a 30 (R3)	10	20	30
30 a 35 (R4)	20	10	30
Total	115	85	200

Fonte: Elaborada pelo autor

Observando os dados descritos na Tabela 14, podemos identificar claramente que a probabilidade de um funcionário aleatoriamente escolhido ser:

a) do setor A → P(A) = 115/200 = 0,575 (temos 115 funcionários do setor A em um total de 200 funcionários);

b) do setor B → P(B) = 85/200 = 0,425 (temos 115 funcionários do setor A em um total de 200 funcionários);

c) de ter renda entre R$ 15.000,00 e R$ 20.000,00 → P(R1) = 110/200 =0,550 (110 funcionários correspondem aos que têm a faixa de renda solicitada);

d) do setor B e ter renda entre R$ 15.000,00 e R$ 20.000,00 → (intersecção), ou seja, P(B ∩ R1) = 40/200 = 0,20 (temos 40 funcionários que correspondem aos que têm a faixa de renda solicitada e ao mesmo tempo são do setor B); e

e) ter renda entre R$ 15.000,00 e R$ 20.000,00, dado que é do setor B →

$$P(R1/B) = \frac{P(R1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,20}{0,425} = 0,4706$$

Sabendo que o funcionário é do setor B (temos 85 funcionários agora), houve uma redução no espaço amostral de 200 para 85 que será utilizado no denominador. Logo, perguntamos: qual a chance de estar na faixa de renda solicitada?

Como P(R1) ≠ P(R1/B), podemos concluir que os eventos setor e renda são dependentes. Podemos visualizar um exemplo de aplicação dos conceitos de independência de eventos por meio do lançamento de uma moeda não viciada (não existe preferência para cara ou coroa) três vezes. Considere os seguintes eventos:

Para que sejam considerados independentes, a relação de independência deve ser válida para todas as intersecções presentes na Tabela 14.

A = no primeiro lançamento da moeda sai cara; e

B = no segundo lançamento da moeda sai cara.

Considere C = cara e R = coroa

Verifique se é verdadeira a hipótese de que os eventos A e B são independentes. O espaço amostral e os eventos são apresentados, a seguir:

Ω = {CCC, CCR, CRC, CRR, RCC, RCR, RRC, RRR}
(A) = {**CCC**, **CCR**, CRC, CRR}
(B) = {**CCC**, **CCR**, RCC, RCR}
P(A ∩ B) = 2/8 = ¼
P (A) = 4/8 = ½
P (B) = 4/8 = ½

Os resultados que estão em negrito ocorrem no espaço amostral (8) somente duas vezes.

Portanto, P(A ∩ B) = P(A) · P(B) => ¼ = ½ · ½ ou

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A/B) = P(A) \Rightarrow \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Sendo assim, perceba que os eventos são independentes, pois P(A ∩ B) = P (A) · P(B) ou P (A / B) = P (A).

Vamos ver outros exemplos relacionados a probabilidades para compreendermos melhor o que vimos.

Exemplo

Um estudante chega atrasado em 40% das aulas e esquece o material didático em 18% das aulas. Supondo eventos independentes, calcule a probabilidade de:

a) O estudante chegar na hora e com material.

b) Não chegar na hora e ainda sem material.

Como o exercício afirma que o estudante chega atrasado em 40% das aulas, entendemos que 40% = 0,40, ou seja, ele não chegar atrasado = 60% = 0,6. O exercício afirma também que ele esquece o material didático em 18% da aula, isto é, ele esquece o material = 18% = 0,18 e ele não esquecer o material =82% = 0,82.

Logo, para resolver a alternativa do exemplo, probabilidade de o estudante chegar na hora e com material, considerando que os eventos são independentes, temos:

$$P(\text{chegar na hora e com material}) = P(\text{chegar na hora} \cap \text{c/ material}) =$$
$$P(\text{chegar na hora}) \cdot P(\text{c/ material}) = 0{,}60 \cdot 0{,}82 = 0{,}492 \text{ ou } 49{,}2\%$$

Já para resolvermos a alternativa b, vamos considerar que:

$$P(\text{não chegar na hora e sem material}) = P(\text{ñ chegar na hora} \cap \text{s/ material}) =$$
$$P(\text{ñ chegar na hora}) \cdot P(\text{s/ material}) = 0{,}40 \cdot 0{,}18 = 0{,}072 \text{ ou } 7{,}2\%$$

Exemplo:

Vamos considerar um pesquisador que estudou o comportamento de consumo de bebidas lácteas no Brasil. Após análise da classe econômica do consumidor e o principal aspecto determinante da escolha da marca, o pesquisador tabulou os dados conforme disposto a seguir.

Classe/Aspecto	Preço	Qualidade	Soma
Alta	42	56	98
Média	37	21	58
Baixa	13	97	110
Total	92	174	266

Considerando esses dados, qual a probabilidade de um consumidor escolhido:

a) Priorizar o preço, dado que é da classe alta.

b) Priorizar a qualidade, dado que é da classe média.

c) Ser da classe baixa, dado que atribui maior importância ao fator qualidade.

Com base nos dados da tabela desse exemplo, para priorizar o preço, dado que é da classe alta, temos uma probabilidade condicional igual:

$$P\left(\textit{preço}/\textit{classe alta}\right)=\frac{P\left(\textit{preço}\cap \textit{classe alta}\right)}{P\left(\textit{classe alta}\right)}=\frac{42}{98}=0{,}4286\ \textit{ou}\ 42{,}86\%$$

Já para priorizar a qualidade, dado que é da classe média, temos uma probabilidade condicional dada por:

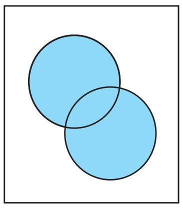
$$P\left(\textit{qualidade}/\textit{classe média}\right)=\frac{P\left(\textit{qualidade}\cap \textit{classe média}\right)}{P\left(\textit{classe média}\right)}=\frac{21}{58}=0{,}3621\ \textit{ou}\ 36{,}21\%$$

Por fim, para ser da classe baixa, dado que atribuiu maior importância ao fator qualidade, o cálculo é feito por:

$$P\left(\textit{classe baixa}/\textit{qualidade}\right)=\frac{P\left(\textit{classe baixa}\cap \textit{qualidade}\right)}{P\left(\textit{qualidade}\right)}=\frac{97}{174}=0{,}5575\ \textit{ou}\ 55{,}75\%$$

Algumas Regras Básicas de Probabilidade

Para que você possa aplicar todos os conceitos de probabilidade aprendidos até aqui, apresentaremos, por meio da Figura 17, algumas regras básicas que irão ajudá-lo. Observe com atenção:

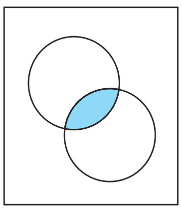


$A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

eventos mutuamente exclusivos

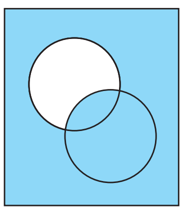


$A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

eventos independentes



$\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Figura 17: Regras gerais da probabilidade
Fonte: Elaborada pelo autor

Outra questão que merece destaque quando falamos de probabilidade é que a probabilidade condicional de A dado B é definida por:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Resumindo

Nesta Unidade, você ampliou o seu conhecimento quanto ao termo probabilidade.

Descrevemos as abordagens clássicas das frequências relativa e subjetiva da probabilidade e entendemos os termos experimento, espaço amostral e evento.

Vimos a definição dos termos probabilidade condicional e probabilidade conjunta, além de aprendermos a calcular as probabilidades aplicando as regras da adição e da multiplicação. Para intensificar nosso estudo, vimos esses conceitos aplicados a partir da apresentação de exemplos.

Caso algum conceito não tenha ficado claro, retome a leitura, pois eles serão importantes para a compreensão de novas informações contidas nas Unidades posteriores.

Atividades de aprendizagem

Agora que você já entendeu todos os conceitos relacionados aos cálculos de probabilidade apresentados, resolva as atividades apresentadas, a seguir, e, em caso de dúvidas, não hesite em consultar o seu tutor.

1. Considerando as probabilidades de três fiscais A, B e C, que trabalham independentemente, efetivarem uma autuação quando abordam uma obra são 2/3, 4/5 e 7/10, respectivamente. Se cada um abordar uma obra, qual a probabilidade de que pelo menos um efetive a multa?
2. Sendo A e B dois mestres que já estão suficientemente treinados em partidas de xadrez e jogam 120 partidas, das quais A ganha 60, B ganha 40 e 20 terminam empatadas; A e B concordam em jogar três partidas. Determine a probabilidade de:

   a) A ganhar todas as partidas.

   b) Duas partidas terminarem empatadas.

   c) A e B ganharem alternadamente.

3. Em um período de um mês, 100 funcionários de uma prefeitura que trabalham com resíduos tóxicos, sofrendo de determinada doença, foram tratados. As informações sobre o método de tratamento aplicado a cada funcionário e o resultado final obtido estão na tabela a seguir:

		Tratamento	
		A	B
Resultado	Cura Total	24	16
	Cura Parcial	24	16
	Morte	12	8

Sorteando-se aleatoriamente um desses funcionários, determine a probabilidade de o funcionário escolhido ter sido:

a) Submetido ao tratamento A.

b) Totalmente curado.

c) Submetido ao tratamento A e ter sido parcialmente curado.

d) Submetido ao tratamento A ou ter sido parcialmente curado.