Gustavo Augusto Lima de Campos
Jerffeson Teixeira de Souza

Noções de Lógica

2010

EXPEDIENTE

Design instrucional
Antonio Germano Magalhães Junior
Igor Lima Rodrigues
Pedro Luiz Furquim Jeangros

Projeto gráfico
Rafael Straus Timbó Vasconcelos
Marcos Paulo Rodrigues Nobre

Coordenador Editorial
Rafael Straus Timbó Vasconcelos

Diagramação
Rafael Straus Timbó Vasconcelos
Francisco José da Silva Saraiva

Ilustração
Marcos Paulo Rodrigues Nobre

Capa
Emilson Pamplona Rodrigues de Castro

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Luiz Inácio Lula da Silva

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Fernando Haddad

SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Carlos Eduardo Bielschowsky

DIRETOR DO DEPARTAMENTO DE POLÍTICAS EM EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA – DPEAD
Hélio Chaves Filho

SISTEMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Celso Costa

GOVERNADOR DO ESTADO DO CEARÁ
Cid Ferreira Gomes

REITOR DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
Francisco de Assis Moura Araripe

VICE-REITOR
Antônio de Oliveira Gomes Neto

PRÓ-REITORA DE GRADUAÇÃO
Josefa Lineuda da Costa Murta

COORDENADOR DA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Antonio Germano Magalhães Junior

COORDENADOR GERAL UAB/UECE
Francisco Fábio Castelo Branco

COORDENADORA ADJUNTA UAB/UECE
Josete de Oliveira Castelo Branco Sales

COORDENADOR DO CURSO DE INFORMÁTICA
Joaquim Celestino Júnior

COORDENADOR DE TUTORIA E DOCÊNCIA DO CURSO DE INFORMÁTICA
Jorge Luís de Castro e Silva

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este livro destaca algumas das principais noções presentes no estudo da ciência do Raciocínio Lógico. Primeiramente, o livro enfatiza o uso da linguagem Lógica na representação do conhecimento e os princípios que são empregados na demonstração da validade de argumentos. Posteriormente, enfatiza a automação dos processos envolvidos na demonstração de validade e sua utilização no contexto da programação em lógica. O conteúdo do livro foi divido em três unidades: Lógica Proposicional, Lógica de Predicados e Resolução.

A **Unidade 1** apresenta informalmente os conceitos de proposições e proposições compostas, de teoria e raciocínio, e de sistemas formais. Em seguida, apresenta o sistema formal Lógica Proposicional em duas partes. A primeira parte apresenta a linguagem formal lógica proposicional, a semântica dos conectivos lógicos e as tabelas verdade, as noções de equivalência lógica e implicação lógica, de tautologia e contradição. A segunda parte apresenta a noção de argumento e o processo de demonstração de validade de um argumento.

A **Unidade 2** apresenta a linguagem Lógica de Predicados, a geração de fórmulas bem formadas na linguagem e a semântica de proposições envolvendo quantificadores. Essa Unidade enfatiza a representação de proposições em Lógica de Predicados e identifica a analogia entre o processo de demonstração de validade de argumentos e a noção de programação em lógica, onde o conceito de computação se confunde com o conceito de dedução, que, na Unidade, é exemplificada com o método do raciocínio para trás a partir do objetivo a ser demonstrado, ou seja, de uma consulta a ser respondida por um programa em lógica.

A **Unidade 3** apresenta idéias e algoritmos associados à prova automática de argumentos empregando o método da Resolução para a Lógica de Predicados. São detalhados o algoritmo da Resolução e os algoritmos de Conversão para a Forma Clausal, que é o tipo de fórmula bem formada manipulada pela Resolução, e o algoritmo da Unificação, que é necessário durante o processo de resolução e para a obtenção de respostas para consultas envolvendo variáveis.

Os Autores

Unidade 1

Lógica Proposicional

Objetivos:

- Conhecer a linguagem formal Lógica Proposicional, assim como gerar fórmulas bem formadas nessa linguagem e atribuir valor verdade às fórmulas, envolvendo conectivos lógicos, as regras de inferência que são empregadas no raciocínio correto e a forma geral em que os argumentos são estabelecidos.
- Aplicar o conhecimento adquirido nos processos de representação de teorias e argumentos em Lógica Proposicional e de demonstração de validade de argumentos.

Capítulo 1

Introdução à Lógica

O objetivo deste capítulo consiste em introduzir informalmente a idéia do que vem a ser Lógica e alguns outros conceitos básicos, que acreditamos facilitarão a compreensão dos objetivos da Disciplina e dos assuntos abordados nos próximos capítulos e unidades.

De uma maneira geral, as apologias abaixo definem informalmente o que vem a ser Lógica:

> "Lógica é a ciência do raciocínio."
>
> (Malba Tahan)

> "Lógica é a ciência das leis do pensamento e a arte de aplicá-las corretamente na pesquisa e na demonstração da verdade."
>
> (R. Solivete)

> "A Lógica é a ciência que dirige, por meio de leis, as operações de nossa razão, para que ordenada, facilmente alcance a verdade".
>
> (Sinibaldi)

Por sua vez, podemos entender o ato de raciocinar como um processo de derivação de novos conhecimentos a partir de conhecimentos antigos. Em nosso curso, o conhecimento é expresso através de um conjunto de proposições. Uma **proposição** é uma sentença declarativa à qual podemos atribuir um dos valores verdade: Verdadeiro (V) ou Falso (F). A proposição é o bloco construtor da Lógica. Por exemplo, as seguintes sentenças declarativas são **proposições simples:**

- "Está chovendo"
- "2 é maior que 3"
- "3 é menor que 4"

Neste exemplo, podemos afirmar que, dependendo das condições climáticas em um dado momento, a primeira proposição pode ser V ou F, a segunda é uma proposição F e a terceira é V.

Por outro lado, existem algumas sentenças declarativas às quais não conseguimos atribuir um valor verdade. Por exemplo, as sentenças abaixo não são proposições:

- "x é menor que 100"
- "Esta sentença é falsa"

Neste caso, a não ser que saibamos o valor de x, no primeiro exemplo, e a sentença que estamos afirmando ser falsa, no segundo, não conseguimos atribuir um valor verdade para as sentenças.

Além das proposições simples, estamos acostumados a construir **proposições compostas** a partir da combinação de proposições simples (subproposições) e conectivos (*e, ou, não, se-então, se e somente se*). Por exemplo, as sentenças abaixo são proposições compostas:

- "Está chovendo e 2 é maior que 3"
- "2 é maior que 3 ou 3 é menor que 4"

Neste caso, independentemente das condições climáticas, a primeira proposição é F e a segunda é V (se você tem dúvida, aguarde até a apresentação das tabelas verdade dos conectivos *e* e *ou*).

Uma *teoria* consiste de um conjunto de proposições a respeito de um mundo particular. Por exemplo, o conjunto formado pelas três proposições que descrevem o estado de espírito de Sócrates e Platão pode ser visto como uma teoria:

- "Se Platão estiver disposto a visitar Sócrates então Sócrates está disposto a visitar Platão."
- "Se Sócrates estiver disposto a visitar Platão então Platão não está disposto a visitar Sócrates."
- "Se Sócrates não estiver disposto a visitar Platão então Platão está disposto a visitar Sócrates."

Um **sistema formal** consiste de uma linguagem formal, apropriada para representar teorias, e de uma abstração adequada para os princípios usados para provar quando certas proposições são conseqüências lógicas de proposições que compõem teorias.

A **Lógica Proposicional** é um sistema formal apropriado para a representação de teorias simples, ou seja, aquelas compostas de proposições elementares (proposições que não envolvem quantificadores e variáveis). Veja como a teoria que fala a respeito do estado de espírito de Sócrates e Platão poderia ser representada utilizando-se uma Linguagem Lógica Proposicional:

- $p \rightarrow q$
- $q \rightarrow \neg p$
- $\neg q \rightarrow p$

Representando a Teoria sobre o Mundo de Sócrates e Platão através da linguagem formal acima, podemos fazer uso de vários mecanismos disponíveis para a obtenção de conseqüências lógicas de proposições conhecidas. Por exemplo, utilizando uma Tabela Verdade podemos concluir que Sócrates está disposto a visitar Platão, ou seja:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow \neg p$	$\neg q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg q \rightarrow p)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg q \rightarrow p)) \rightarrow q$
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*
V	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*

Nos próximos capítulos e unidades, desejamos apresentar as linguagens formais Lógica Proposicional e Lógica de Predicados, e os diversos mecanismos de inferência disponíveis para a obtenção de conseqüências lógicas.

Capítulo 2

Lógica Proposicional

Definição de uma Linguagem Proposicional

A definição do sistema formal Lógica Proposicional passa pela definição da **Linguagem Proposicional** e dos princípios que governam os conectivos lógicos pertencentes ao seu alfabeto. Por sua vez, a definição desta linguagem passa pela definição de um **alfabeto** de símbolos, empregados na construção de fórmulas, e das **regras sintáticas** para a geração de fórmulas bem formadas (*fbfs*).

O alfabeto da Linguagem Proposicional é definido a partir do seguinte conjunto de símbolos:

- conjunto de símbolos proposicionais: p, q, r, ...;
- conectivos lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- parênteses: (,) .

Os símbolos proposicionais são empregados na representação das subproposições, ou seja, das proposições simples estabelecidas em linguagem natural (Português, Inglês, etc.). Os conectivos lógicos representam respectivamente as partículas *e, ou, não, se-então* e *se e somente se*. Os parênteses servem para denotar pontuação. Por exemplo, tente perceber a convenção geralmente adotada quando da utilização de parênteses na representação de proposições escritas em linguagem natural:

"3+1 = 5 ou 1=1, implica 3 = 3" representada por $(p \vee q) \rightarrow r$

"3+1 = 5 ou 1=1 implica 3 = 3" representada por $p \vee (q \rightarrow r)$

De acordo com a convenção acima, a primeira e a segunda proposição também podem ser expressas respectivamente das seguintes maneiras: "se 3+1 = 5 ou 1=1, então 3 = 3" e "3+1 = 5 ou se 1=1 então 3 = 3".

As regras sintáticas da Linguagem Proposicional definem o conjunto de fórmulas bem formadas (fbfs) na Linguagem como sendo:

- os símbolos proposicionais são fbfs: p, q, r, ...;
- se p e q são fbfs então $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ são fbfs;
- se p e q são fbfs então $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $\neg(p)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ são fbfs.

A Linguagem Proposicional pode ser definida como o conjunto de todas as fbfs possíveis de serem geradas a partir do alfabeto de símbolos e das regras sintáticas descritas acima.

E, Ou, Não e Tabelas Verdade

Nesta seção, primeiramente, desejamos criar proposições compostas em linguagem natural utilizando as partículas e, ou e não, e representar estas proposições como fbfs em linguagem Lógica Proposicional. De posse de uma fbf particular em Lógica Proposicional, as regras semânticas da linguagem capturam o significado pretendido dos conectivos, associando a cada fórmula um dos valores verdade: V ou F. Posteriormente, utilizamos as Tabelas Verdade como um mecanismo apropriado para o estudo dos significados destas fbfs. A seção foi dividida em quatro subseções principais:

1. Conectivo E
2. Conectivo OU
3. Conectivo NÃO
4. Tabelas Verdade

1. Conectivo E

Se p *e* q são duas proposições então "p *e* q" é também uma proposição. Podemos dizer que:

- *"p e q"* é denominada conjunção de p e q;
- *"p e q"* é representada por $p \wedge q$.

De acordo com o esquema de representação adotado acima, dizemos que:

- se ambas as proposições, p e q, são verdadeiras,

  então $p \wedge q$ é verdadeira

  senão $p \wedge q$ é falsa.

Assim, de acordo com a proposição acima, o significado de $p \wedge q$ pode ser expresso através da seguinte tabela verdade:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Por exemplo, as três primeiras proposições abaixo são falsas (F) e a última é verdadeira (V):

"3+1=6 e 2+2=5"

"2=5 e 2=2"

"2=2 e 2=3"

"2=2 e 3+4=7"

2. Conectivo Ou

Se p e q são duas proposições então "p *ou* q" é também uma proposição. Podemos dizer que:

- *"p ou q"* é denominada disjunção de p e q;
- *"p ou q"* é representada por $p \vee q$.

De acordo com o esquema de representação adotado acima, dizemos que:

- se **pelo menos** uma das proposições, p ou q, é verdadeira

  então $p \vee q$ é verdadeira

  senão $p \vee q$ é falsa.

Além do mais, o significado de $p \vee q$ pode ser expresso através da seguinte tabela verdade:

p	***q***	**p**$\vee$***q***
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Por exemplo, a primeira proposição abaixo é falsa e as três últimas são verdadeiras:

"2=3 ou 2+2=5"

"2=3 ou 3=3"

"2=2 ou 2=3

"2=2 ou 3+4=7"

Esta disjunção também é denominada "ou inclusivo", ou seja, corresponde ao ***e/ou*** algumas vezes encontrada em documentos legais. Neste caso, conforme você pode observar na tabela verdade que a define, a proposição composta é verdadeira, inclusive, quando ambas as subproposições envolvidas são verdadeiras. Na conversação ordinária freqüentemente usamos ou no sentido exclusivo, por exemplo:

"Quando você telefonou eu estava tomando banho ou estava passeando"

Neste caso, a verdade da proposição acima não incluí as duas subproposições, ou seja, ela é verdadeira quando **exatamente uma** das subproposições é verdadeira.

Considerando a observação acima, podemos utilizar a seguinte tabela verdade para definir o ou-excluivo:

p	***q***	**p**$\oplus$***q***
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Observe que, apesar de estarmos apresentando o ou-exclusivo, o símbolo $\oplus$ não pertence ao conjunto de símbolos que define o alfabeto da Linguagem Proposicional. Mais adiante, você poderá observar que este símbolo não precisa fazer parte do alfabeto de símbolos da Linguagem Proposicional, já que é possível construir seu significado, ou melhor, sua a tabela verdade, a partir de pelo menos dois dos conectivos componentes do alfabeto.

3. Conectivo Não

Se p é uma proposição então “não p” é também uma proposição. Podemos dizer que:

- “não p” é denominada negação de p;
- “não p” é representada por ¬p.

De acordo com o esquema de representação adotado acima, dizemos que:

- se uma proposição, p, é verdadeira
  então ¬p é falsa
  senão ¬p é verdadeira.

Além do mais, o significado de ¬p pode ser expresso através da seguinte tabela verdade:

p	***¬p***
F	V
V	F

Observe que existem várias maneiras de negar uma proposição escrita em linguagem natural. Por exemplo, considere as proposições abaixo:

1. “2+2=5”
2. “Não é o caso que 2+2=5”
3. “2+2≠5”
4. “2+2>5”
5. “2+2≤5”
6. “x2 + 5x -1 não é uma equação quadrática”
7. “Não é verdade que x2 + 5x -1 não é uma equação quadrática”
8. “x2 + 5x -1 é uma equação quadrática”

Note que:

- a segunda e a terceira proposições são negações da primeira;
- a quinta proposição é a negação da quarta;
- a sétima e oitava proposições são negações da sexta.

Nesse curso de Noções de Lógica estaremos considerando que o símbolo ¬ se aplica somente ao próximo símbolo proposicional, ou seja:

$\neg p \vee q$ significa $\neg(p) \vee q$
$\neg p \vee q$ não significa $\neg(p \vee q)$

Além do mais, considerando a representação de proposições em linguagem natural, adotaremos a seguinte convenção:

$\neg p \vee q$ representa *“Não é o caso que p, ou q”*
$\neg(p \vee q)$ representa *“Não é o caso que p ou q”*

4. Tabelas Verdade

Como você já deve ter percebido, as tabelas verdade podem ser usadas para expressar os valores verdade possíveis de proposições compostas. A construção das várias colunas de uma tabela verdade pode ser realizada de uma maneira sistemática. Por exemplo, observe a construção da tabela verdade de ¬(p ∨ ¬q):

Passo 1: preencher os valores verdade possíveis de p e q

p	**q**	**¬ (p∨ ¬ q)**
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Passo 2: preencher coluna ¬q

p	**q**	**¬q**	**¬ (p∨ ¬ q)**
F	F	**V**	
F	V	**F**	
V	F	**F**	
V	V	**V**	

Passo 3: preencher coluna p ∨ ¬q

p	q	¬ q	(p∨ ¬ q)	¬ (p∨ ¬ q)
F	F	V	**V**	
F	V	F	**F**	
V	F	V	**V**	
V	V	F	**V**	

Passo 4: preencher coluna ¬(p ∨ ¬q)

p	q	¬ q	(p∨ ¬ q)	¬ (p∨ ¬ q)
F	F	V	V	**F**
F	V	F	F	**V**
V	F	V	V	**F**
V	V	F	V	**F**

Após um período de experiência, alguns dos passos escritos acima podem ser eliminados. Observe que se uma proposição composta envolve n subproposições então sua tabela verdade tem 2n linhas. Por exemplo, uma proposição composta por 3 subproposições tem 23 (oito) linhas.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Atribua valores verdade para as seguintes proposições:

a) $3 \leq 7$ e 4 é um inteiro impar.

b) $3 \leq 7$ ou 4 é um inteiro impar.

c) $2 + 1 = 3$ mas $4 < 4$.

d) 5 é impar ou divisível por 4.

e) Não é verdade que $2 +2 = 5$ e $5 > 7$.

f) Não é verdade que $2 + 2 = 5$ ou $5 > 7$.

g) $3 \geq 3$.

2. Suponha que p represente a proposição “7 é um inteiro par”, q represente “$3 + 1 = 4$” e r represente “24 é divisível por 8”.

a) Escreva as seguintes proposições em formas simbólicas e atribua valores verdade:

i) $3 +1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

ii) Não é verdade que 7 é impar ou $3 + 1 = 4$.

iii) $3 + 1 = 4$ mas 24 não é divisível por 8.

b) Escreva as seguintes formas simbólicas em palavras e atribua valores verdade:

i) $p \vee \neg q$.

ii) $\neg(r \wedge q)$.

iii) $\neg r \vee \neg q$.

3. Construa tabelas verdade para

a) $\neg p \vee q$.

b) $\neg p \wedge p$.

c) $(\neg p \vee q) \wedge r$.

d) $\neg(p \wedge q)$.

e) $\neg p \wedge \neg q$.

f) $\neg p \vee \neg q$.

g) $p \vee \neg p$.

h) $\neg(\neg p)$.

4. Apresente negações adequadas para

a) $3 - 4 < 7$.

b) $3 + 1 = 5$ e $2 \leq 4$.

c) 8 é divisível por 3 mas 4 não é.

5. Suponha que definamos o conectivo © da seguinte maneira: se p é falsa e q é verdadeira então p © q é verdadeira, senão p © q é falsa.

a) Escreva a tabela verdade para p © q.

b) Escreva a tabela verdade para q © p.

c) Escreva a tabela verdade para (p © p) © q.

6. Denotemos o "ou exclusivo", algumas vezes utilizado em nossas conversações ordinárias, por $\oplus$. Na definição de p $\oplus$ q, se exatamente uma das formas p, q é verdadeira então p $\oplus$ q é verdadeira, senão p $\oplus$ q é falsa.

a) Escreva a tabela verdade para p $\oplus$ q.

b) Escreva as tabelas verdade para p $\oplus$ p e (p $\oplus$ q) $\oplus$ q.

c) Mostre que "e/ou" realmente significa "e ou ou", isto é, que a tabela verdade para p $\vee$ q é a mesma que (p $\wedge$ q) $\oplus$ (p $\oplus$ q).

d) Mostre que as formas (p $\wedge$ q) $\vee$ (p $\vee$ q), (p $\vee$ q) $\oplus$ (p $\oplus$ q) possuem o mesmo significado, ou seja, "e ou ou" pode ser representado tanto por (p $\wedge$ q) $\vee$ (p $\vee$ q) quanto por (p $\wedge$ q) $\oplus$ (p $\oplus$ q).

Implicação e o Bi-condicional

Uma das mais importantes formas matemáticas é a implicação. A maioria dos teoremas matemáticos é descrita neste formato, ou seja, como uma proposição do tipo "se hipótese então conclusão". O Bi-condicional é uma forma matemática que pode ser composta a partir de duas implicações e uma conjunção. Podermos demonstrar esta afirmação a partir do momento que apresentarmos uma definição para o conceito de equivalência lógica. Dividimos esta seção em três subseções principais:

1. Equivalência Lógica

2. Implicação

3. Bi-condicional

1. Equivalência Lógica

Se duas proposições p, q têm a mesma tabela verdade então p é logicamente equivalente a q. Podemos dizer que:

p é **logicamente equivalente** a q é representada por p $\Leftrightarrow$ q.

Quando duas proposições são logicamente equivalentes, elas têm a **mesma forma e**, **conseqüentemente, podemos substituir uma pela outra em qualquer proposição ou teorema** (aguarde um pouco mais e você poderá verificar o que estamos mencionando). Veja a equivalência lógica através da construção das tabelas verdade das proposições $\neg$(p $\wedge$ q) e $\neg$p $\vee$ $\neg$q:

p	q	¬p	¬q	(p ∧ q)	¬(p ∧ q)	¬p ∨ ¬q
F	F	V	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
V	V	F	F	V	**F**	**F**

Observe que, independentemente de sabermos o que p e q representam, podemos afirmar que a fbf $\neg(p \wedge q)$ é logicamente equivalente a fbf $\neg p \vee \neg q$. É importante ressaltar que a forma de uma proposição é que determina se a ela é (ou se ela não é) logicamente equivalente a uma outra proposição, e não o valor verdade das proposições envolvidas.

Por exemplo, as proposições "2 + 5 = 7" e "3 - 1 = 2" são proposições verdadeiras mas elas não são logicamente equivalentes. Para comprovar, represente a primeira proposição pelo símbolo proposicional p e a segunda por q e, em seguida, verifique as tabelas verdade das duas fbfs.

Por outro lado, "2 + 5 = 7 ou 3 - 1 = 2" e "3 - 1 = 2 ou 2 + 5 = 7", além de serem proposições verdadeiras, são logicamente equivalentes. Para comprovar, considerando o esquema de representação adotado no parágrafo anterior, represente a primeira proposição por $p \vee q$ e a segunda por $q \vee p$ e, em seguida, verifique se as formas têm tabelas verdade idênticas.

As **Leis de DeMorgan** utilizam a idéia de equivalência lógica para estabelecer a relação existente entre a negação, a conjunção e a disjunção:

- se p e q são proposições então:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Em palavras, as Leis de DeMorgan estabelecem que a negação de uma disjunção é logicamente equivalente a conjunção de negações, e que a negação de uma conjunção é logicamente equivalente a disjunção de negações.

2. Implicação

Se p, q são proposições então "se p então q" é também uma proposição. Podemos dizer que:

- "se p então q" é denominada condicional entre p e q;
- "se p então q" é representada por $p \rightarrow q$.

Nesta proposição, p é denominada premissa (ou hipótese ou antecedente) e q é denominada conclusão (ou conseqüência ou conseqüente).

De acordo com o esquema de representação adotado acima, dizemos que:

- se p é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa

  então $p \rightarrow q$ é falsa

  senão $p \rightarrow q$ é verdadeira.

Além do mais, o significado de $p \rightarrow q$ pode ser expresso através da seguinte tabela verdade:

p	q	p→q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Por exemplo, a primeira, a segunda e a quarta proposições abaixo são verdadeiras e a terceira é falsa:

“Se verde é vermelho então a lua é feita de queijo”
“Se verde é vermelho então 2=2”
“Se 2=2 então verde é vermelho”
“Se 2=2 então a lua não é feita de queijo”

Podemos compreender melhor a tabela verdade da implicação, buscando um esclarecimento para o significado de uma proposição do tipo se p então q. Uma proposição deste tipo nos diz exatamente que se p, o antecedente, ocorrer (verdadeiro) então q, o conseqüente, também deve ocorrer. Neste caso, dizemos que a ocorrência de p é **suficiente** para garantir a ocorrência de q, e, também, que quando p ocorrer q deve **necessariamente** ocorrer.

Considerando este significado, podemos justificar a quarta linha da tabela verdade do condicional, ou seja, na situação em que o antecedente e o conseqüente são *V*, o condicional é, também, *V*, já que o significado da proposição se **antecedente** então **conseqüente** está sendo respeitado.

Seguindo esta linha de raciocínio, somente a terceira linha da tabela parece violar o significado deste tipo de proposição, já que, nesta linha, o antecedente ocorre e o conseqüente não ocorre (falso), ou seja, quando o antecedente é *V* e o conseqüente é *F*, o condicional das subproposições é falso.

Além do mais, observe que a proposição se **antecedente** então **conseqüente** não nos diz nada a respeito de qual deve ser o estado do conseqüente (*V* ou *F*?) quando o antecedente é *F*. Isto significa que tanto a primeira linha da tabela (antecedente *F* e conseqüente *F*) quanto a segunda (antecedente *F* e conseqüente *V*) não violam o significado da proposição se-então, ou seja, o condicional de subproposições cujos valores verdade são semelhantes aos destas linhas é *V*.

Uma melhor compreensão do significado de uma proposição no formato de um condicional, também, dá origem às seguintes equivalência lógicas:

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg (p \rightarrow q)$

Ou seja: quando $p \rightarrow q$ é verdadeira então $\neg q \rightarrow \neg p$ é verdadeira e vice-versa; e quando $p \wedge \neg q$ é verdadeira então é porque $\neg (p \rightarrow q)$ é verdadeira (isto é, $p \rightarrow q$ é falsa) e vice-versa. A proposição $\neg q \rightarrow \neg p$ é denominada **contrapositiva** de $p \rightarrow q$.

Além do formato se p então q, existem outras maneiras de se estabelecer o condicional em português:

“Se p então q”
“p implica q”
“p é mais forte que q”
“q é mais fraca que q”
“p somente se q
“q se p”
“p é suficiente para q”
“q é necessária para p”
“Uma condição necessária para p é q”
“Uma condição suficiente para q é p”

3. Bi-condicional

Se p, q são proposições então "p se e somente se q" (algumas vezes abreviado sss) é também uma proposição. Podemos dizer que:

- *"p se e somente se q"* é denominada bi-condicional entre p e q;
- *"p se e somente se q"* é representada por $p \leftrightarrow q$.

De acordo com o esquema de representação adotado acima, dizemos que:

- se p e q têm o mesmo valor verdade

  então $p \leftrightarrow q$ é verdadeira

  senão $p \leftrightarrow q$ é falsa.

Além do mais, o significado de $p \leftrightarrow q$ pode ser expresso através da seguinte tabela verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Por exemplo, a primeira e a quarta proposições abaixo são verdadeiras, e a segunda e a terceira são falsas:

"verde é vermelho se e somente se a lua é feita de queijo"
"verde é vermelho se e somente se 2=2"
"2=2 se e somente se verde é vermelho
"2=2 se e somente se a lua não é feita de queijo"

Existem outras maneira de se estabelecer o bi-condicional em português:

- "p é necessária e suficiente para q"
- "p é equivalente a q"

De acordo com o que o nome bi-condicional indica, existe uma conexão entre este conectivo e o condicional. Por exemplo, observe que "p se e somente se q" significa que $q \rightarrow p$ e $\neg q \rightarrow \neg p$, ou seja:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (q \rightarrow p) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Além do mais, de acordo com a subseção anterior, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$. Assim, a relação entre o bi-condicional e o condicional pode, também, ser expressa, de uma maneira mais simples, através da seguinte equivalência lógica:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Ou seja, quando $p \leftrightarrow q$ é verdadeira então $p \rightarrow q$ é verdadeira e $q \rightarrow p$ é verdadeira, e vice-versa.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Quais das formas abaixo são logicamente equivalentes?

a) $p \land \neg q$.

b) $p \rightarrow q$.

c) $\neg(\neg p \lor q)$.

d) $q \rightarrow \neg p$.

e) $\neg p \lor q$.

f) $\neg(p \rightarrow q)$.

g) $p \rightarrow \neg q$.

h) $\neg p \rightarrow \neg q$.

2. Mostre que os seguintes pares (formas) são logicamente equivalentes:

a) $p \land (q \lor r)$; $(p \land q) \lor (p \land r)$.

b) $p \lor (q \land r)$; $(p \lor q) \land (p \lor r)$.

c) $p \leftrightarrow q$; $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$.

d) $p \rightarrow q$; $\neg q \rightarrow \neg p$.

3. Mostre que os seguintes pares (formas) não são logicamente equivalentes:

a) $\neg(p \land q)$; $\neg p \land \neg q$.

b) $\neg(p \lor q)$; $\neg p \lor \neg q$.

c) $p \rightarrow q$; $q \rightarrow p$.

d) $\neg(p \rightarrow q)$; $\neg p \rightarrow \neg q$.

4. Indique quais proposições são verdadeiras:

a) Se 2 + 1 = 4 *então* 3 + 2 =5.

b) *Vermelho é branco se e somente se verde é azul.*

c) 2 + 1 = 3 e 3 + 1 = 5 *implica* 4 *é impar.*

d) *Se* 4 *é impar então* 5 *é impar.*

e) *Se* 4 *é impar então* 5 *é par.*

f) *Se* 5 *é impar então* 4 *é impar.*

5. Dê exemplos de proposições ou fale porque o exemplo não existe:

a) Uma implicação verdadeira com uma conclusão falsa.

b) Uma implicação verdadeira com uma conclusão verdadeira.

c) Uma implicação falsa com uma conclusão verdadeira.

d) Uma implicação falsa com uma conclusão falsa.

e) Uma implicação falsa com uma hipótese falsa.

f) Uma implicação falsa com uma hipótese verdadeira.

g) Uma implicação verdadeira com uma hipótese verdadeira.

h) Uma implicação verdadeira com uma hipótese falsa.

6. Transforme em símbolos:

a) *p sempre que q.*

b) *p a menos que q.*

7. Dê uma negação para $p \leftrightarrow q$ em uma forma que não envolva o bi-condicional.

8. Suponha que p, $\neg q$ e *r* são verdadeiras. Quais formas possuem interpretações verdadeiras?

a) $p \rightarrow q$.

b) $q \rightarrow p$.

c) $p \rightarrow (q \vee r)$.

d) $p \leftrightarrow q$.

e) $p \leftrightarrow r$.

f) $(p \vee q) \rightarrow p$.

g) $(p \wedge q) \rightarrow q$.

9. Temos cinco "conectivos" lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\neg$, cada um corresponde à uma construção de nossa linguagem ordinária. Do ponto de vista lógico, poderíamos expressar todos estes conectivos em termos de (somente) $\neg$ e $\wedge$. Mais ainda, se definirmos p/q como sendo falsa quando tanto p e q são verdadeiras e p/q como sendo verdadeira em qualquer outro caso, poderíamos expressar todas as cinco formas em termos deste único conectivo. Verifique parcialmente as declarações dadas acima:

a) Achando uma proposição que é equivalente a $p \vee q$ usando somente $\wedge$ e $\neg$.

b) Escrevendo a tabela verdade para p/q.

c) Mostrando que p/p é equivalente a $\neg p$.

d) Mostrando que (p/q)/(q/p) é equivalente a $p \wedge q$.

Tautologias

As tautologias formam uma classe de proposições muito importante. São proposições compostas sempre verdadeiras, isto é, suas tabelas verdade contêm somente valores verdadeiros (Vs) na coluna final. O fato de uma proposição ser uma tautologia depende do formato da proposição, ou seja, da ordem em que os símbolos proposicionais são combinados com os conectivos e com os parênteses para a formação da fbf (representação da proposição que estamos considerando ser uma tautologia). Por exemplo, a fbf $p \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia:

p	q	$(p \vee q)$	$p \rightarrow (p \vee q)$
F	F	F	**V**
F	V	V	**V**
V	F	V	**V**
V	V	V	**V**

Observe na tabela verdade anterior, o fato de $p \rightarrow (p \vee q)$ ser uma tautologia independe dos significados atribuídos às subproposições envolvidas (dos significados de p e q), ou seja, toda proposição composta possível de ser representada por esta fbf configura uma tautologia. Por exemplo, considerando que p e q representem respectivamente *"bananas são laranjas"* e *"bananas são bananas"* (ou que p e q representem quaisquer outras duas proposições), o valor verdade de $p \rightarrow (p \vee q)$ é V, ou seja, "se bananas são laranjas então bananas são laranjas ou bananas são bananas" é uma proposição verdadeira (assim como, "se 2=2 então 2=2 ou 3+1 =5" é, também, uma proposição verdadeira).

É importante que façamos a distinção entre proposições verdadeiras e tautologias. Nem sempre uma proposição verdadeira é uma tautologia. Por exemplo, "2+2=4" é uma proposição verdadeira mas não é uma tautologia pois, considerando sua representação por meio do símbolo proposicional p, a tabela verdade desta fbf nem sempre é verdadeira:

p
F
V

Por outro lado, para reforçar a idéia de uma tautologia, podemos dizer que a proposição "5 é a raiz primitiva de 17 ou 5 não é a raiz primitiva de 17" é uma tautologia, independentemente do que venha a ser a definição de raiz primitiva. Por exemplo, representando "5 é a raiz primitiva de 17" pelo símbolo proposicional p, observe que a tabela verdade da fbf $p \vee \neg p$ contém somente valores verdadeiros:

p	**q**	**$\neg$ p**	**p $\vee$ $\neg$ p**
F	F	V	**V**
F	V	V	**V**
V	F	F	**V**
V	V	F	**V**

A negação de uma tautologia, isto é, uma proposição cuja tabela verdade contém somente valores falsos, é denominada contradição. Por exemplo, a fbf $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ configura uma contradição:

p	**q**	**$\neg$ q**	**(p $\rightarrow$ q)**	**(p $\wedge$ $\neg$ q)**	**(p $\rightarrow$ q) $\wedge$ (p $\wedge$ $\neg$ q)**
F	F	V	V	F	**F**
F	V	F	V	F	**F**
V	F	V	F	V	**F**
V	V	F	V	F	**F**

Observe que, como as tautologias, o fato de $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ ser uma contradição independe dos significados atribuídos às subproposições envolvidas, ou seja, toda proposição composta possível de ser representada pela fbf $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ configura uma contradição.

Também, é importante que façamos a distinção entre proposições falsas e contradições. Nem sempre uma proposição falsa é uma contradição. Por exemplo, "2+2=5" é uma proposição falsa mas não é uma tautologia pois, considerando que ela pode ser representada pelo símbolo proposicional q, sua tabela verdade nem sempre é falsa:

q
F
V

Por outro lado, "2+2=5 e 2+2≠5" é uma contradição. Por exemplo, considerando que esta proposição pode ser representada pela fbf $p \wedge \neg p$, observe que suaa tabela verdade contém somente valores falsos:

q	¬ q	q ∧ ¬ q
F	V	**F**
V	F	**F**

Utilizando a idéia de tautologia, podemos clarear a **diferença** entre *"equivalente"* e *"logicamente equivalente"*:

Duas proposições p, q são logicamente equivalentes *se e somente se* $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia,

ou seja,

$(p \Leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q$ *é verdadeira*).

Por exemplo, observe que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ é uma equivalência lógica, isto é, $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$:

p	q	¬ p	¬ q	(p → q)	(¬ q → ¬ p)	(p → q) ↔ (¬ q → ¬ p)
F	F	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
V	V	F	F	V	V	**V**

Além do mais, utilizando a idéia de tautologia, podemos apresentar a definição de ***implicação lógica***:

$p \rightarrow q$ é uma implicação lógica *se* $p \rightarrow q$ for uma tautologia.

Neste caso, dizemos que *"p implica logicamente q" ou que "q é uma conseqüência lógica de p".*

Uma implicação lógica deste tipo será denotada por:

$p \Rightarrow q$.

Além do mais, considerando este esquema de representação, note que:

$(p \Rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q$ *é verdadeira*).

Por exemplo, observe que $(p \wedge q) \rightarrow p$ é uma implicação lógica, ou seja, $(p \wedge q) \Rightarrow p$, e $p \rightarrow (p \wedge q)$ não é:

p	q	(p ∧ q)	(p ∧ q) → p	p → (p ∧ q)
F	F	F	**V**	**V**
F	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**V**	**F**
V	V	V	**V**	**V**

Note que, se *"p implica logicamente q"*, e p é verdadeira, então q deve também ser verdadeira. Por exemplo, a posição 4x3 da tabela acima demonstra esta proposição (quando $p \wedge q$ é V então p é V). Observe que, no caso em que uma implicação não é uma implicação lógica esta proposição é violada, por exemplo, a posição 3x3 da tabela demonstra o que estamos mencionando (quando p é V então $p \wedge q$ é F).

Esta propriedade das tautologias, o fato delas serem sempre verdadeiras independentemente dos significados das subproposições envolvidas, é muito importante. Na realidade, as tautologias formam as regras pelas quais raciocinamos. A seguir apresentamos um conjunto destas regras. Em geral estas regras são utilizadas quando raciocinamos durante os processos de demonstração da validade de nossos argumentos (aguarde até a próxima seção para comprovar o que estamos mencionando):

Observe na lista de tautologias a seguir na próxima página:

- **4-16** são equivalências lógicas enquanto **17-25** são implicações lógicas;
- **p**, **q**, **r** e **s** representam proposições;
- **t** representa tautologia;
- **c** representa contradição.

Assim, se quisermos raciocinar corretamente, deveremos empregar estas regras na obtenção de conseqüências lógicas de duas proposições conhecidas. Elas precisam estar incorporadas em nossa maneira de pensar. Observe atentamente todas as tautologias e tente compreender porque elas são sempre verdadeiras, independentemente do que p, q, r e s estejam representando.

Por exemplo, se uma pessoa diz *"esta blusa é feita de algodão ou de seda"* e, em seguida, uma outra pessoa observa melhor e diz *"ela não é feita de algodão"* o que você poderia dizer a respeito? Raciocinando corretamente, por exemplo, representando *"esta blusa é feita de algodão"* por p e "esta blusa é feita de seda" por q e empregando a tautologia 22, você poderia dizer que *"a blusa é feita de seda"* pois *"se a blusa é feita de algodão ou de seda, e ela não é feita de algodão então a blusa é feita de seda"*, ou seja, $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$.

Além do **silogismo disjuntivo** descrito acima, vale apresentar um tipo de raciocínio muito comum em nossas conversações ordinárias, ou seja, o raciocínio **modus ponens**. Por exemplo, se é verdade que uma pessoa disse, em algum momento, "se eu fizer os exercícios de fixação, é porque eu gostei da aula" e, atualmente, essa mesma pessoa diz "eu vou fazer os exercícios de fixação", o que poderíamos concluir a respeito de nossa amiga? Considerando a tautologia 19, $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$, poderíamos afirmar que "Danielle gostou da aula".

1.	$p \vee \neg p$	
2.	$\neg(p \wedge \neg p)$	
3.	$p \rightarrow p$	
4.	a) $p \leftrightarrow (p \vee p)$	"idempotent laws"
	b) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$	
5.	$\neg\neg p \leftrightarrow p$	"double negation"
6.	a) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$	"commutative laws"
	b) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	
	c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	

7.	a) $(p \vee (q \vee r) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$	"associative laws"
	b) $(p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$	
8.	a) $(p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	"distributive laws"
	b) $(p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	
9.	a) $(p \vee c) \leftrightarrow p$	"identity laws"
	b) $(p \wedge c) \leftrightarrow c$	
	d) $(p \vee t) \leftrightarrow t$	
	d) $(p \wedge t) \leftrightarrow p$	
10.	a) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	"DeMorgan's laws"
	b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	
11.	a) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	"equivalence"
	b) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	
	c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$	
12.	a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	"implication"
	b) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	
13.	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	"contrapositive"
14.	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \rightarrow c)$	"reductio ad absurdum"
15.	a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$	
	b) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$	
16.	$((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	"exportation law"
17.	$p \rightarrow (p \vee q)$	"addition"
18.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	"simplification"
19.	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	"modus ponens"
20.	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	"modus tollens"
21.	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	"hypothetical syllogism"
22.	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	"disjunctive syllogism"
23.	$(p \rightarrow c) \rightarrow \neg p$	"absurdity"
24.	$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$	
25.	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$	

Com relação à lista de tautologias, é importante que tentemos assimilar as formas das tautologias tal que possamos reconhecer quando às estivermos utilizando. Além do mais, é importante reconhecermos o raciocínio incorreto; isto é, quando estivermos considerando incorretamente uma nova proposição como sendo conseqüência lógica de duas proposições conhecidas.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Verifique que as formas 7 a), 9 b), 13 e 14 na lista são tautologias.

2. Determine quais das seguintes formas abaixo têm a forma de uma das tautologias apresentadas na lista em anexo (por exemplo, $(\neg q \wedge p) \rightarrow \neg q$ tem a forma de 18).

a) $\neg q \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$.

b) $q \rightarrow (q \wedge \neg p)$.

c) $(r \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (\neg r \vee \neg p)$.

d) $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$.

e) $(\neg r \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow r)$.

f) $(p \rightarrow (\neg r \vee q)) \leftrightarrow ((r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$.

g) $r \rightarrow \neg(q \wedge \neg r)$.

h) $((\neg q \vee p) \wedge q) \rightarrow p$.

3. Dê exemplos de proposições ou fale porque o exemplo não existe:

a) Uma implicação lógica com uma conclusão falsa.

b) Uma implicação lógica com uma conclusão verdadeira.

c) Uma implicação lógica com uma hipótese verdadeira e uma conclu são falsa.

4. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras:

a) $(p \rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

b) $((p \vee q) \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.

c) $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$.

d) $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$.

5. Quais das seguintes formas são tautologias, contradições ou nem uma e nem outra coisa?

a) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$.

b) $\neg p \rightarrow p$.

c) $\neg p \leftrightarrow p$.

d) $(p \wedge \neg p) \rightarrow p$.

e) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

f) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$.

g) $[(p \rightarrow q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \leftrightarrow r)]$.

6. Quais das seguintes formas abaixo são corretas?

a) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

b) $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$.

c) $(p \rightarrow q) \Rightarrow q$.

7. Será que $\rightarrow$ é associativa; isto é, será que $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$?

8. Será que $\leftrightarrow$ é associativa; isto é, será que $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$?

9. Quais das seguintes proposições verdadeiras são tautologias?

a) Se 2 + 2 = 4 então 5 é impar.

b) 3 + 1 = 4 e 5 + 3 = 8 implica 3 + 1 = 4.

c) 3 + 1 = 4 e 5 + 3 = 8 implica 3 + 2 = 5.

d) Vermelho é amarelo ou vermelho não é amarelo.

e) Vermelho é amarelo ou vermelho é vermelho.

f) 4 é impar ou 2 é par e 2 é impar implica que 4 é impar.

g) 4 é impar ou 2 é par e 2 é impar implica que 4 é par.

10. Quais das seguintes conclusões são conseqüências lógicas do conjunto de proposições $p \vee q$, $r \rightarrow \neg q$, $\neg p$?

a) q.

b) r.

c) $\neg p \vee s$.

d) $\neg r$.

e) $\neg(\neg q \wedge r)$.

f) $q \rightarrow r$.

Argumentos

Argumentos são proposições descritas no formato de implicações. Em geral, o antecedente de um argumento é uma conjunção de subproposições, simples ou compostas, e o conseqüente é uma subproposição, do mesmo tipo do antecedente. Sendo assim, podemos representar os argumentos de uma pessoa através da seguinte **forma geral:**

$$(p1 \wedge p2 \wedge \ldots \wedge pn) \rightarrow q;$$

Onde $\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ **e q** representam proposições em linguagem natural, que estão ligadas por meio de conectivos.

Por exemplo, o quadro abaixo apresenta um argumento em Português e sua representação em Linguagem Proposicional. Observe que o antecedente deste argumento é uma conjunção de três proposições compostas e o conseqüente é uma proposição simples:

Argumento em Português
p_1 - *"Se Platão estiver disposto a visitar Sórates então Sócrates está disposto a visitar Platão"*
$\mathbf{p_2}$ - *"Se Sócrates está disposto a visitar Platão então Platão não está disposto a visitar Sócrates"*
$\mathbf{p_3}$ - *"Se Sócrates não está disposto a visitar Platão então Platão está disposto a visitar Sócrates"*
q - *"Sócrates está disposto a visitar Platão"*

Argumento em Linguagem Proposicional
Considerando: *p - "Sócrates está disposto a visitar Platão" e* *r - "Platão está disposto a visitar Sócrates",* temos: $\boldsymbol{p_1}$ - $r \rightarrow p$ $\boldsymbol{p_2}$ - $p \rightarrow \neg r$ $\boldsymbol{p_3}$ - $\neg p \rightarrow r$ $\boldsymbol{q}$ - p. Na forma geral: $((r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow r)) \rightarrow p$

Vale ressaltar, os **teoremas matemáticos** podem ser representados no formato dos argumentos. Além do mais, observe a definição de **Programa em Lógica** e **Consulta a um Programa**. Um **Programa em Lógica** é um conjunto de proposições (programa = teoria) a respeito de um mundo particular, e uma **Consulta a um Program**a em lógica é uma proposição (consulta = conseqüência lógica, ou não, da teoria) a respeito deste mundo.

Isto nos sugere uma analogia entre argumentos, e programas e consultas. Na realidade, esta analogia e o entendimento do processo de demonstração da validade de argumentos são úteis para a assimilação da idéia de se programar em Lógica. De acordo com esta analogia, um programa em Lógica pode ser representado pelo conjunto de fbfs que compõem o antecedente da forma geral de um argumento correspondente, ou seja:

$$\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots, p_n;}$$

e a consulta ao programa pela fbf que compõe o conseqüente do argumento, ou seja:

$$\boldsymbol{q.}$$

Por exemplo, considerando o argumento apresentado no início desta seção, temos o seguinte programa e consulta em Lógica Proposicional:

Programa em Linguagem Lógica Proposicional
$\boldsymbol{p_1}$ - $r \rightarrow p$ $\boldsymbol{p_2}$ - $p \rightarrow \neg r$ $\boldsymbol{p_3}$ - $\neg p \rightarrow r$
Consulta em Linguagem Lógica Proposicional
$\boldsymbol{q}$ - p ?

Na realidade, a idéia de Programação em Lógica fundamenta-se na analogia entre os argumentos, e os programas e as consultas. Nesta disciplina, exploramos esta analogia programando em Linguagem Formal Lógica. Mas, antes disso, ainda precisamos considerar o processo de demonstração de validade de argumentos e os meios que podem ser empregados para esta finalidade.

Validade de Argumentos

O que precisamos fazer para ganhar uma argumentação? Ou seja, o que precisamos fazer para demonstrar que um certo argumento é válido? Primeiro, devemos agir de uma maneira convincente, ou seja, devemos convencer a(s) pessoa(s) a respeito da verdade lógica de nossa posição. Por exemplo, você pode começar perguntando para uma pessoa: você aceita que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são verdadeiras? Se a resposta for sim, você pode dizer: então segue que q, também, é verdadeira. Em seguida, para você ganhar a argumentação você deve provar que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia, ou seja, demonstrando que:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q.$$

Mais precisamente, devemos mostrar que se a conjunção $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ for verdadeira (*V*), então q é também verdadeira (*V*); neste caso, $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia (na tabela verdade do argumento não existe uma situação em que a conjunção das hipóteses é *V* e a conclusão é *F*) e q é conseqüência lógica de $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$.

Na **Lógica Proposicional**, podemos empregar, por exemplo, os seguintes meios para demonstrar que um argumento é válido:

- Tabelas Verdade,
- Princípio da Demonstração e
- Extensão do Princípio da Demonstração.

Além do mais, todos os meios empregáveis na demonstração da validade de argumentos, podem ser empregados na obtenção de respostas para consultas. Na realidade, nas próximas quatro subseções utilizaremos três meios, utilizados na demonstração da validade de argumentos, para implementar a idéia de Programação em Lógica Proposicional. Assim, dividimos esta Seção em mais três subseções:

1. Validade e as Tabelas Verdade
2. Validade e o Princípio da Demonstração
3. Validade e a Extensão do Princípio da Demonstração

1. Validade e as Tabelas Verdade

Utilizando uma tabela verdade podemos provar a validade de um argumento e, conseqüentemente, programar em Lógica Proposicional. Por exemplo, considere o argumento a respeito do mundo de Sócrates e Platão e o método da Tabela Verdade respondendo *'sim'* para a consulta *"Sócrates está disposto a visitar Platão?"*:

Hipóteses do Argumento
$r \rightarrow p$ $p \rightarrow \neg r$ $\neg p \rightarrow r$
Conclusão do Argumento
p

Método de Demonstração da Validade do Argumento

Tabela Verdade

p	r	$\neg p$	$\neg r$	$r \rightarrow p$	$p \rightarrow \neg r$	$\neg p \rightarrow r$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V

$(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow r)$	$(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow r) \rightarrow p$
F	V
F	V
V	***V***
F	V

Como sempre que $(r \rightarrow p)\ (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ é V, p é V (ver terceira linha da tabela verdade), então $(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow r) \rightarrow p$ é uma tautologia, conseqüentemente, um argumento válido, ou seja, $(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow r) \Rightarrow p$.

Logo, a ***Resposta*** é ***'sim'***, *ou seja, "Sócrates está disposto a visitar Platão".*

Além do mais, observe abaixo o Método da Tabela Verdade demonstrando que um argumento não é válido, ou seja, respondendo que *'a consulta não é conseqüência lógica do programa'*:

Hipóteses do Argumento

"Se 2 + 2 = 4 então 3 + 5 = 7"
"2 + 2 ≠ 4"

Conclusão Argumento

"3 + 5 ≠ 7 ?"

Hipóteses do Argumento

Considerando:

p - *"2 + 2 ≠ 4"* e

q - *"3 + 5 = 7"*,

temos:

$\boldsymbol{p_1}$ - $\neg p \rightarrow q$

$\boldsymbol{p_2}$ - p

Conclusão do Argumento

$\boldsymbol{q}$ - $\neg q$.

Assim, argumento na forma geral: $((\neg p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$

Método de Demonstração da Validade do Argumento

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow q$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge p$	$((\neg p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	***F***	V	***V***	***F***

Como nem sempre que $(\neg p \to q) \wedge p$ é ***V***, $\neg q$ é ***V*** (ver quarta linha da tabela verdade), então $((\neg p \to q) \wedge p) \to \neg q$ não é uma tautologia, conseqüentemente, um argumento não-válido, ou seja, $\neg q$ não é conseqüência lógica de $(\neg p \to q) \wedge p$.

Neste caso, consideraremos que a ***Resposta*** é ***'3 + 5 ≠ 7 não é conseqüência lógica do programa'***.

Observe que se o número de subproposições diferentes envolvidas em um argumento/programa-consulta for muito grande então pode ser inconveniente checar a validade de argumentos/responder a uma consulta utilizando uma tabela verdade, pois esta tabela pode conter muitas linhas. Esta restrição impossibilita a utilização generalizada de Tabelas Verdade na demonstração da validade de argumentos e/ou na Programação em Lógica Proposicional.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Onde for possível dê exemplos; se não for possível diga porque:

a) Um argumento não-válido com uma conclusão falsa.

b) Um argumento válido com uma conclusão verdadeira.

c) Um argumento não-válido com uma conclusão verdadeira.

d) Um argumento válido com uma conclusão falsa.

e) Um argumento válido com uma hipótese verdadeira e uma conclusão falsa.

f) Um argumento não-válido com uma hipótese verdadeira e uma conclusão falsa.

g) Um argumento válido com uma hipótese falsa e uma conclusão verdadeira.

2. Determine a validade dos argumentos descritos em Linguagem Lógica Proposicional, usando tabelas verdade:

a) $p \to q$
$\underline{\neg p \vee q}$
$q \to p$

b) $p \vee q$
$r \to q$
$\underline{q \quad\quad}$
$\neg r$

c) $p \vee \neg q$
$\underline{\neg p \quad\quad}$
$\neg q$

d) $q \vee \neg p$
$\underline{\neg q}$
p

e) $\underline{\neg p}$
$p \to q$

f) $(p \wedge q) \to (r \wedge s)$
$\underline{\neg r}$
$\neg p \vee \neg q$

g) $p \to q$
$\neg q \to \neg r$
$s \to (p \vee r)$
$\underline{s}$
q

h) $p \vee q$
$q \to \neg r$
$\underline{\neg r \to \neg p}$
$\neg (p \wedge q)$

i) $p \to q$
$\neg r \quad \neg q$
$\underline{r \to \neg p}$
$\neg p$

j) $\underline{p \to \neg p}$

$\neg p$

k) $p \vee q$

$p \to r$

$\underline{\neg r}$

q

l) p

$q \to \neg p$

$\neg q \to (r \vee \neg s)$

$\underline{\neg r}$

$\neg s$

3. A seguir, apresentamos alguns argumentos. Determine a validade dos argumentos/responda às consultas descritas em Português, utilizando tabelas verdade:

a) ***Hipóteses do Argumento 1***

"Se o dia está bonito então vou à praia"

"Não vou à praia"

Conclusão do Argumento 1

"O dia não está bonito ?"

b) ***Hipóteses do Argumento 2***

"Se Nazaré Coelho está na Universidade então Pedro está no hospital e José mudou de emprego"

"José mudou de emprego"

"Pedro está no hospital"

Conclusão do Argumento 2

"Nazaré Coelho está na Universidade ?"

c) ***Hipóteses do Argumento 3***

"Se João descobre a conspiração e der valor a sua vida, então abandonará o país"

"João dá valor a sua vida"

Conclusão do Argumento 3

"Se João descobre a conspiração então abandonará o país ?"

d) ***Hipóteses do Argumento 4***

"Se Talita conseguir arranjar um carro emprestado e for pela auto-estrada, então chegará antes de terminar o prazo"

"Talita chegará antes de terminar o prazo"

Conclusão do Argumento 4

"Se Talita consegue arranjar um carro emprestado então vai pela auto-estrada ?"

e) ***Hipóteses do Argumento 5***

"Se Gerson não está em condições então Bira será zagueiro de área ou Miguel será o zagueiro de área"

"Bira não é o zagueiro de área"

Conclusão do Argumento 5

"Se Miguel não é o zagueiro de área então Gerson está em condições ?"

f) ***Hipóteses do Argumento 6***

“Se Almir apoia o presidente então Jader apoia o novo candidato”

“Se Jader apoia o novo candidato então Hélio abandonará o partido”

“Se Hélio abandona o partido então Almir não apoia o presidente”

Conclusão do Argumento 6

“Almir não apoia o presidente ?”

g) ***Hipóteses do Argumento 7***

“Se Paulo se retira da reunião então Basílio será nomeado ou Clara ficará desapontada”

“Basílio não será nomeado”

Conclusão do Argumento 7

“Se Paulo se retira da reunião então Clara ficará desapontada ?”

Validade, Programação e o Princípio da Demonstração

Além da tabela verdade, também, podemos provar a validade de um argumento empregando o Princípio da Demonstração. Veja o enunciado deste Princípio:

“Uma demonstração que o argumento

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$

é válido, é uma seqüência de proposições

$s_1 , s_2 , \ldots , s_k$

tal que

s_k (última proposição na seqüência) = q (a conclusão)

e cada

$s_i , \quad 1 \leq i \leq k$

satisfaz um ou mais dos requisitos:

a) s_i é uma das hipóteses do argumento ($p_1 , p_2 , \ldots , p_n$,)

b) s_i é uma tautologia

c) s_i é uma conseqüência lógica de proposições recentes na seqüência.”

Por exemplo, observe o Princípio da Demonstração mostrando que o argumento sobre o mundo de Sócrates e Platão é válido, ou seja, que a resposta à consulta é *“sim”*:

Hipóteses do Argumento
$\boldsymbol{p_1}$ - $r \rightarrow p$ $\boldsymbol{p_2}$ - $p \rightarrow \neg r$ $\boldsymbol{p_3}$ - $\neg p \rightarrow r$

Conclusão do Argumento
q - *p*.

Método de Demonstração da Validade do Argumento

Princípio da Demonstração

$s_1 = r \to p$ $\quad$ $s_2 = p \to \neg r$

$s_3 = (r \to p) \wedge (p \to \neg r)$ $\quad$ $s_4 =$ Tautologia 21 - $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r))$

$s_5 = (r \to \neg r)$ $\quad$ $s_6 =$ Tautologia 12.a) - $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

$s_7 = \neg r \vee \neg r$ $\quad$ $s_8 = (\neg r \vee \neg r) \leftrightarrow \neg r$

$s_9 = \neg r$ $\quad$ $s_{10} = \neg p \to r$

utilizando *Tautologia 20 – $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$*

$s_{11} = \neg(p)$ $\quad$ $s_{12} =$ Tautologia 5 - $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

$s_{13} = p$

Assim, como a última proposição na seqüência, s_{13} , é a conclusão do argumento/consulta ao programa então o argumento é válido e, consequentemente, a resposta é ***'sim'***.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Para cada um dos argumentos que você considerou como válidos na Atividade de Avaliação 3 na Seção "Validade e as Tabelas Verdade", utilize a Adaptação do Princípio da Demonstração para a Programação em Lógica e mostre que cada uma das respostas correspondentes é ***'sim'***.

Validade, Programação e a Extensão do Princípio

A Extensão do Princípio da Demonstração é uma outra forma de se provar a validade de argumentos e, conseqüentemente, de se programar em lógica. É um método de prova indireta ou **prova por contradição**. A Tautologia 14 - $(p \to q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to \mathbf{c})$, fundamenta a prova por contradição. Podemos perceber melhor este método empregando esta tautologia à forma geral do argumento, ou seja:

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \to \mathbf{c}).$$

Assim, de acordo com a equivalência lógica acima, a extensão nos diz que para mostrarmos que o argumento é válido/que a resposta é ***'sim'***, devemos mostra que a conjunção das hipóteses do argumento/fbfs do programa com a negação da conclusão do argumento/consulta ao programa implica em uma contradição, ou seja:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow c.$$

Mais especificamente, aplicando a Extensão do Princípio da Demonstração para provar a validade de um argumento/responder à consulta, o processo de prova deve terminar quando a última proposição na seqüência, s_k, for uma contradição e, somente neste caso, a resposta será ***'sim'***. Observe a Extensão mostrando que o argumento sobre o mundo de Sócrates e Platão é válido, ou seja, que a resposta à consulta é *"sim"*:

Hipóteses do Argumento

p_1 - $p \vee q$
p_2 - $q \rightarrow \neg p$
p_3 - $p \rightarrow q$

Conclusão do Argumento

q - q.

Negação da Conclusão do Argumento

$\neg q$ - $\neg q$.

Novas Hipóteses do Argumento

p_1 - $p \vee q$

p_2 - $q \rightarrow \neg p$

p_3 - $p \rightarrow q$

p_4 - $\neg q$

Nova Conclusão do Argumento

q - **contradição**.

Método de Demonstração da Validade do Argumento

Extensão do Princípio da Demonstração

$$\underbrace{s_1 = \neg q \qquad s_2 = p \vee q}_{s_3 = p}$$

utilizando *Tautologia 22 –*
(p ∨ q) ∧ ¬p) → q

$$\underbrace{s_3 = p \qquad s_4 = p \rightarrow q}_{s_5 = q}$$

utilizando *Tautologia 19 –*
(p ∧ (p → q)) → q

$$\underbrace{s_5 = q \qquad s_6 = \neg q}_{s_7 = q \wedge \neg q}$$

$$\underbrace{s_7 = q \wedge \neg q \qquad s_8 = (q \wedge \neg q) \leftrightarrow \textbf{contradição}}_{s_9 = \textbf{contradição}}$$

Observe, na seqüência de proposições (s_1 , s_2 , ... , s_9), cada uma das proposições satisfaz pelo menos um dos requisitos descritos no enunciado do Princípio da Demonstração, ou seja:

a) s_1 , s_2 , s_4 , s_6 - são hipóteses do argumento/fbf's do programa, inclusive a consulta negada, s_6;

b) s_8 - é uma tautologia;

c) s_3 , s_5 , s_7, s_9 - são conseqüências lógicas de proposições recentes na seqüência.

Assim, como a última proposição na seqüência, s_9, é a nova conclusão do argumento/nova consulta ao programa, isto é, a negação da conclusão do argumento/negação da consulta ao programa é uma **contradição**, então o argumento é válido, consequentemente a resposta é ***'sim'***.

Diferentemente da Tabela Verdade, o Princípio da Demonstração e a Extensão do Princípio não demonstram que um argumento é não-válido; o fato de não se demonstrar a validade não garante que o argumento seja não-válido.

Para se demonstrar a não validade de um argumento, além da Tabela Verdade, podemos tentar encontrar um contra-exemplo, ou seja, uma interpretação para as subproposições envolvidas no argumento tal que suas hipóteses, p_1 ,p_2 , ... , p_n , sejam todas verdadeiras e a conclusão, q, seja falsa. Neste caso, o argumento é não-válido pois, $(V \wedge V \wedge ... \wedge V) \rightarrow F$ é F. Por exemplo, o argumento

p_1 - $p \rightarrow q$

p_2 - $\neg p \vee q$

q - $q \rightarrow p$,

Mais precisamente, $((p \quad q) \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow (q \rightarrow p)$, é não-válido pois se, por exemplo, p for interpretado como *"2 < 1"* (uma subproposição F), e q como *" 3 > 2"* (uma suproposição V), todas as hipóteses do argumento serão verdadeiras,

p_1 - $F \rightarrow V$ é V

p_2 - $V \vee V$ é V,

e a conclusão do argumento é falsa,

q - $V \rightarrow F$ é F;

Logo, estas interpretações produzem um argumento não-válido, $(V \wedge V) \rightarrow F$ é F.

Assim,

"se 2 < 1 então 3 > 2"

"2 > 1 ou 3 >2"

"se 3 >2 então 2 < 1"

É um **contra-exemplo** para o argumento.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Para cada um dos argumentos que você considerou como válidos na Atividade de Avaliação 3 na Seção “Validade e as Tabelas Verdade”, utilize a Extensão do Princípio da Demonstração e mostre que cada uma das respostas correspondentes é ***‘sim’***.

2. Para cada um dos argumentos que você considerou como não-válidos na Atividade de Avaliação 3 na Seção “Validade e as Tabelas Verdade”, encontre um contra-exemplo.