Ministério da Educação – MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES
Diretoria de Educação a Distância – DED
Universidade Aberta do Brasil – UAB
Programa Nacional de Formação em Administração Pública – PNAP
Bacharelado em Administração Pública

Matemática para Administradores

Maria Teresa Menezes Freitas

CAPES
2010

F866m Freitas, Maria Teresa Menezes

Matemática para administradores / Maria Teresa Menezes Freitas. – Florianópolis : Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília] : CAPES : UAB, 2010.

204p. : il.

Inclui bibliografia

Bacharelado em Administração Pública

ISBN: 978-85-7988-004-9

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Matrizes (Matemática). 4. Sistemas lineares. 5. Cálculo diferencial. 6. Educação a distância. I. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Brasil). II. Universidade Aberta do Brasil. III. Título.

CDU: 51-77:65

Catalogação na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

COMISSÃO DE AVALIAÇÃO E ACOMPANHAMENTO – PNAP

Alexandre Marino Costa
Claudinê Jordão de Carvalho
Eliane Moreira Sá de Souza
Marcos Tanure Sanabio
Maria Aparecida da Silva
Marina Isabel de Almeida
Oreste Preti
Tatiane Michelon
Teresa Cristina Janes Carneiro

METODOLOGIA PARA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Universidade Federal de Mato Grosso

COORDENAÇÃO TÉCNICA – DED

Tatiane Michelon
Tatiane Pacanaro Trinca
Soraya Matos de Vasconcelos

AUTORA DO CONTEÚDO

Maria Teresa Menezes Freitas

EQUIPE DE DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS DIDÁTICOS CAD/UFSC

Coordenador do Projeto
Alexandre Marino Costa

Coordenação de Produção de Recursos Didáticos
Denise Aparecida Bunn

Supervisão de Produção de Recursos Didáticos
Érika Alessandra Salmeron Silva

Designer Instrucional
Denise Aparecida Bunn
Andreza Regina Lopes da Silva

Auxiliar Administrativa
Stephany Kaori Yoshida

Capa
Alexandre Noronha

Ilustração
Igor Baranenko
Adriano S. Reibnitz
Lívia Remor Pereira

Projeto Gráfico e Editoração
Annye Cristiny Tessaro

Revisão Textual
Gabriela Figueiredo

Créditos da imagem da capa: extraída do banco de imagens Stock.xchng sob direitos livres para uso de imagem.

Prefácio

Os dois principais desafios da atualidade na área educacional do País são a qualificação dos professores que atuam nas escolas de educação básica e a qualificação do quadro funcional atuante na gestão do Estado Brasileiro, nas várias instâncias administrativas. O Ministério da Educação está enfrentando o primeiro desafio através do Plano Nacional de Formação de Professores, que tem como objetivo qualificar mais de 300.000 professores em exercício nas escolas de ensino fundamental e médio, sendo metade desse esforço realizado pelo Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). Em relação ao segundo desafio, o MEC, por meio da UAB/CAPES, lança o Programa Nacional de Formação em Administração Pública (PNAP). Esse Programa engloba um curso de bacharelado e três especializações (Gestão Pública, Gestão Pública Municipal e Gestão em Saúde) e visa colaborar com o esforço de qualificação dos gestores públicos brasileiros, com especial atenção no atendimento ao interior do País, através dos Polos da UAB.

O PNAP é um Programa com características especiais. Em primeiro lugar, tal Programa surgiu do esforço e da reflexão de uma rede composta pela Escola Nacional de Administração Pública (ENAP), do Ministério do Planejamento, pelo Ministério da Saúde, pelo Conselho Federal de Administração, pela Secretaria de Educação a Distância (SEED) e por mais de 20 instituições públicas de ensino superior, vinculadas à UAB, que colaboraram na elaboração do Projeto Político Pedagógico dos cursos. Em segundo lugar, esse Projeto será aplicado por todas as instituições e pretende manter um padrão de qualidade em todo o País, mas abrindo margem para que cada Instituição, que ofertará os cursos, possa incluir assuntos em atendimento às diversidades econômicas e culturais de sua região.

Outro elemento importante é a construção coletiva do material didático. A UAB colocará à disposição das instituições um material didático mínimo de referência para todas as disciplinas obrigatórias e para algumas optativas. Esse material está sendo elaborado por profissionais experientes da área da Administração Pública de mais de 30 diferentes instituições, com apoio de equipe multidisciplinar. Por último, a produção coletiva antecipada dos materiais didáticos libera o corpo docente das instituições para uma dedicação maior ao processo de gestão acadêmica dos cursos; uniformiza um elevado patamar de qualidade para o material didático e garante o desenvolvimento ininterrupto dos cursos, sem paralisações que sempre comprometem o entusiasmo dos alunos.

Por tudo isso, estamos seguros de que mais um importante passo em direção à democratização do ensino superior público e de qualidade está sendo dado, desta vez contribuindo também para a melhoria da gestão pública brasileira, compromisso deste governo.

Celso José da Costa
Diretor de Educação a Distância
Coordenador Nacional da UAB
CAPES-MEC

Sumário

Unidade 2 – Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Unidade 3 – Funções

Unidade 4 – Limite e Continuidade

Unidade 5 – Derivada

Apresentação

Prezado futuro administrador público, saudações!

Com imensa satisfação o convidamos a participar de uma aventura muito interessante. Trata-se de uma viagem formativa em que, juntos, desbravaremos os conhecimentos matemáticos imprescindíveis para o administrador. Para tanto, contamos com seu envolvimento para desfrutarmos de todos os momentos desta jornada com prazer, divertimento e curiosidade.

Veja que essa viagem que estamos prestes a iniciar tem um diferencial, pois nosso curso será desenvolvido na modalidade a distância. Trata-se de uma aventura, pois estaremos em uma constante busca de caminhos que nos levem a ficar bem próximos. Assim, nas páginas seguintes procuraremos utilizar uma linguagem adequada que nos aproxime e que busque estabelecer um diálogo constante para garantirmos a interação, de fato, que tanto almejamos.

Entusiasme-se e sinta-se predisposto para compreender ideias e conceitos que, muitas vezes, julgava ser de difícil compreensão. Nossa intenção aqui é tornar accessível a noção de conceitos matemáticos para melhor lidarmos com os desafios da profissão de Administrador.

Durante nossa viagem, faremos algumas paradas para apreciarmos diferentes paisagens e observarmos detalhes de conceitos matemáticos que desvelarão caminhos para o melhor desempenho na administração pública. Em um primeiro momento, recuperaremos conceitos da Teoria dos Conjuntos e, em seguida, conheceremos as Matrizes e os Sistemas Lineares. Nossa próxima parada nos oferecerá as funções como paisagem de fundo. Em sequência, conheceremos os Limites e os detalhes de Funções Contínuas. Por último, nossos caminhos nos levarão à compreensão do conceito de Derivada de funções e sua aplicabilidade na administração.

Sempre que necessário, revisaremos conteúdos anteriormente estudados, e, aos poucos e sem mesmo perceber, estaremos compreendendo alguns conceitos de Cálculo Diferencial essenciais para resolver problemas administrativos.

Temos certeza que você já está animado e quase preparando a máquina fotográfica e arrumando as malas para iniciar nossa viagem. Vale lembrar o quão importante será estar com caderno, lápis e caneta à mão para anotar, registrar e resolver os problemas que aparecerão pelo nosso caminho. O computador também será de grande valia nessa empreitada.

Contamos com você. Sucesso a todos!

Professora Maria Teresa

UNIDADE 1

Recuperando conceitos

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Utilizar a nomenclatura e simbologia da teoria dos conjuntos em situações que envolvem contextos administrativos;
- Reconhecer e exemplificar diferentes conjuntos;
- Solucionar problemas que envolvam conjuntos e suas operações; e
- Identificar os conjuntos numéricos e utilizá-los adequadamente em situações-problemas.

Teoria dos Conjuntos

Caro estudante,

Nesta Unidade iremos relembrar a Teoria dos Conjuntos. Como já vimos algumas noções na disciplina *Matemática Básica*, agora vamos verificar como aplicá-la no contexto administrativo.

Pronto para começar?

Inicialmente iremos abordar e/ou rever um conceito de Matemática importante para o desenvolvimento de quase todo o conteúdo que se seguirá. Trata-se da ideia de conjunto e suas respectivas simbologia e notações associadas. Essas formas e símbolos especiais que utilizamos para denominar, indicar ou nomear entes matemáticos são necessários para que todos nós possamos nos comunicar bem e com a mesma linguagem.

Conjunto é considerado um conceito primitivo e, assim, para compreendermos esse conceito, não necessitamos de uma definição a partir de outros conceitos matemáticos.

Para compreendermos o que é conjunto, basta nos remetermos àquela ideia que a linguagem usual nos leva, ou seja, uma coleção, ou um agrupamento, de quaisquer elementos. Assim, um conjunto poderá ter em sua formação pessoas, objetos, numerais ou qualquer outro elemento ou ideia possível de agrupamento.

Trataremos em nosso curso apenas dos conjuntos bem definidos.

Dizemos que um conjunto está bem definido quando podemos estabelecer com certeza se um elemento **pertence** ou **não pertence** a ele. Assim, o conjunto dos setores da prefeitura da cidade X com melhor propaganda ou com mais de duas funcionárias bonitas não caracteriza um conjunto bem definido, pois melhor propaganda e funcionária bonita tratam de compreensões que envolvem a subjetividade.

Ao utilizarmos a linguagem de conjuntos e seus elementos, surge a chamada **relação de pertinência**, ou seja, uma vez determinado um conjunto, este normalmente é designado por uma letra latina maiúscula (A; B; C...), um elemento pode ou não pertencer ao conjunto.

Assim, se A é o conjunto dos funcionários do Hospital Municipal da Cidade Tirolex e Fernando é um funcionário deste órgão público, então dizemos que Fernando **pertence** ao conjunto A e indicamos:

Fernando $\in$ A (Lê-se: Fernando **pertence** ao conjunto A.)

Para o caso de Mauro, que não é um funcionário do Hospital citado, dizemos que Mauro **não pertence** ao conjunto A e indicamos:

Mauro $\notin$ A (Lê-se: Mauro **não pertence** ao conjunto A.)

Podemos representar um conjunto explicitando seus elementos entre chaves e cada um entre vírgulas. Assim, se o conjunto B é formado pelos números naturais ímpares menores que 10, indicamos:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Utilizando a intuição podemos adotar as reticências como símbolo para indicar um conjunto com um número muito grande de elementos ou que tenha uma quantidade sem fim de elementos. Por exemplo, imagine um dado conjunto C formado pelos números ímpares naturais menores que 100. Podemos então representar o conjunto C como:

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 99\}$$

Assim, as reticências indicam os elementos não citados entre chaves e, vale lembrar, ao explicitarmos o numeral 99 como último elemento, significa que o conjunto tem um número determinado de elementos.

As reticências são também utilizadas para indicar elementos não explicitados no conjunto. Alertamos que, para um conjunto com uma quantidade sem fim de elementos, a notação utilizada se mantém, porém não se indica um último elemento após as reticências. Como exemplo para esta situação, tome um conjunto D formado pelos números naturais ímpares.

$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ (Note: as reticências indicam que os elementos continuam infinitamente.)

Poderíamos, então, pensar na seguinte relação entre elemento e conjunto: $1 \in D$ e $2 \notin D$

Uma maneira simples de representar um conjunto pode ser obtida por meio de uma curva fechada simples (não entrelaçada) conhecida como Diagrama de Venn. Observe como seria a representação do conjunto das vogais:

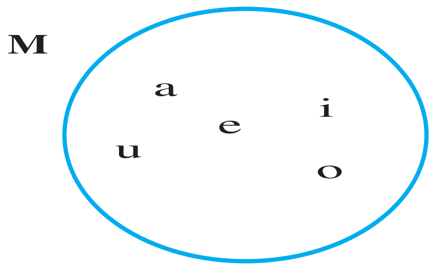
- Representação por listagem dos elementos.

$M = \{a, e, i, o, u\}$

Saiba mais — **Diagrama de Venn**

O Diagrama de Venn foi criado em 1881 pelo filósofo inglês John Venn. A maioria das pessoas pode facilmente reconhecer um Diagrama de Venn mesmo sem ter conhecimento de seu nome. Os diagramas se tornaram bem aceitos e conhecidos tendo se mostrado muito úteis por oferecerem uma representação visual nas situações em que existem relações entre vários grupos ou coisas. Fonte: <http://tinyurl.com/lqp65o>. Acesso em: 5 nov. 2009.

- Representação por Diagrama.



Podemos também representar um conjunto explicitando a propriedade de seus elementos. Assim, no conjunto M representado anteriormente, a característica de seus elementos é ser vogal e, logo, poderíamos representá-lo com a seguinte notação:

M = {x/x é uma vogal} (Lê-se: x tal que x é uma vogal.)

Conjuntos especiais

Embora a palavra "conjunto" nos leve a pensar em uma coleção de coisas ou objetos, eventualmente a quantidade de elementos pertencentes ao conjunto pode ser apenas um ou, por vezes, o conjunto pode nem ter elemento.

Conjunto com apenas um elemento é denominado **Conjunto Unitário** e, para o caso de o conjunto não possuir elementos, temos o **Conjunto Vazio**.

Pensemos na situação em que precisemos registrar em cada semana o conjunto P, cujos elementos são os colaboradores que compõem a equipe de trabalhadores da Escola Pública X afastados por licença médica.

Note que almejamos que este conjunto não possua elemento na maioria das semanas registradas, mas eventualmente este conjunto poderá ter apenas um elemento ou até mais elementos.

Para entender melhor, imagine que na primeira semana o funcionário Vagner tenha faltado por motivo de saúde, logo: $P_1 = \{\text{Vagner}\}$.

Já na segunda semana, suponha que não houve falta de funcionários por motivo de saúde e, assim, o registro ficaria $P_2 = \{\ \}$ ou, ainda, podemos representar como $P_2 = \varnothing$.

Subconjuntos – relação de inclusão

Acreditamos que nesta altura da nossa conversa já estejamos familiarizados com a relação de pertinência, isto é, a relação entre ***elemento*** *e* ***conjunto****. Vamos agora relacionar* ***conjunto*** *com outro* ***conjunto****?*

Considere o conjunto **S** formado pelas vogais da palavra “janeiro” e o conjunto K formado pelas vogais do alfabeto. Teremos:

$$S = \{a, e, i, o\}$$

$$K = \{a, e, i, o, u\}$$

Veja que todo elemento de **S** é também elemento de K, ou seja, todo elemento de S pertence também ao conjunto K. Quando esta particularidade ocorre, dizemos que S é um **subconjunto** de K, ou que S é parte de K, e indicamos:

$S \subset K$ (Lê-se: S está contido em K.) ou $K \supset S$ (Lê-se: K contém S.)

Se introduzíssemos nessa história o conjunto H, composto pelas letras da palavra “firma”, teríamos:

$$H = \{f, i, r, m, a\}$$

Note que existem elementos do conjunto S que não pertencem ao conjunto H e, assim, S **não está contido** em H e indicamos:

$S \not\subset H$ (Lê-se: S não está contido em H.)

Poderíamos também pensar que o conjunto H **não contém** o conjunto **S** e, neste caso, indicaríamos $H \not\supset S$.

Um conjunto não está contido em outro se existe pelo menos um elemento do primeiro que não seja elemento do segundo.

Geralmente, para o caso em que a inclusão entre dois conjuntos não existe, utilizamos o símbolo $\not\subset$ (não está contido). Porém, a lógica nos leva a pensar, de um lado, que um conjunto com menor número de elementos **está contido** ou **não está contido** em outro conjunto com maior número de elementos. Por outro lado, um conjunto com maior número de elementos **contém** ou **não contém** outro conjunto com menor quantidade de elementos.

Assim, basta ficarmos atentos aos conjuntos que estamos relacionando.

Conjuntos Iguais

Você já ouviu falar em Conjuntos Iguais? O que você entende por este termo?

Simples, os Conjuntos Iguais fazem referência a dois conjuntos quaisquer A e B que são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, quando todo elemento de A também pertence a B e todo elemento de B também pertence ao conjunto A.

O símbolo utilizado para indicar a igualdade entre dois conjuntos é aquele que já estamos acostumados e, assim, indicamos a igualdade entre os conjuntos por $A = B$.

Para o caso em que algum elemento de um deles não for elemento do outro, dizemos que A é diferente de B e indicamos $A \neq B$.

Note que se dois conjuntos M e N são iguais, isto é, $M = N$, teremos que $M \subset N$ e $N \subset M$. De outra maneira, poderemos dizer que se dois conjuntos M e N são iguais, então M é subconjunto de N e, ao mesmo tempo, vale dizer que N é subconjunto de M.

Observações importantes
O conjunto vazio $\varnothing$ é considerado como um subconjunto de qualquer conjunto.
Todo conjunto é subconjunto dele mesmo.
Um conjunto formado por todos os subconjuntos de um dado conjunto A é denominado Conjunto das Partes de A e indicamos por P (A).

Conjunto Universo

É importante estudarmos a procedência dos conjuntos que estamos trabalhando, ou seja, é fundamental conhecermos o conjunto do qual podemos formar vários subconjuntos em estudo.

Este conjunto em que todos os outros são subconjuntos dele em um determinado estudo é denominado **Conjunto Universo**.

Podemos considerar, por exemplo, como Conjunto Universo de um determinado estudo o conjunto formado pelos colaboradores das prefeituras de todas as cidades do Brasil.

Associados a este conjunto podemos determinar vários outros conjuntos. Você consegue identificá-los?

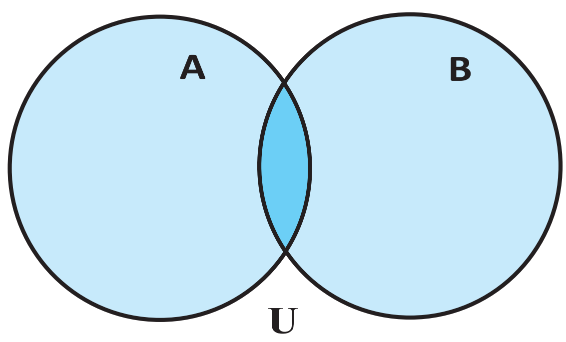
Simples, pense no conjunto dos funcionários das prefeituras das cidades do Estado de Minas Gerais ou, ainda, no conjunto dos funcionários das prefeituras das cidades do Estado de São Paulo.

Agora, imagine, por exemplo, que nosso universo seja o conjunto de colaboradores da prefeitura da Cidade X e que façamos parte da equipe da administração. Em nosso banco de dados, podemos listar endereços de colaboradores com diferentes características: menos de 40 anos, sexo feminino, sexo masculino, moradores do mesmo bairro da sede da prefeitura, moradores do bairro vizinho etc.

*Nos próximos parágrafos, iremos esclarecer a importância da relação lógica que utiliza as palavrinhas "**e**" e "**ou**" associadas ao Diagrama de Venn. Esteja atento, pois será de grande importância essa compreensão para vários assuntos que teremos de abordar. Vamos continuar?*

Note que alguns dos subconjuntos citados podem se sobrepor ao outro quando utilizamos a representação por diagramas. Para entender melhor, imagine que o conjunto A tenha como elementos os funcionários com menos de 40 anos e o conjunto B tenha como elementos os colaboradores do sexo feminino. Ambos podem ter elementos comuns e, desta forma, os diagramas terão uma parte sobreposta. A parte sobreposta é denominada de **interseção** dos conjuntos.

A representação por meio do Diagrama de Venn é feita com círculos (ou uma linha fechada) que representam os conjuntos.

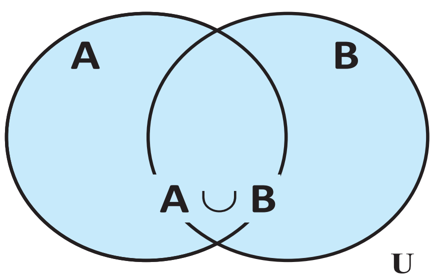


Assim, a interseção dos conjuntos A e B é formada por aqueles elementos que pertencem ao conjunto A "**e**" ao conjunto B simultaneamente. Portanto, o conjunto interseção tem como elementos da intersecção colaboradores do sexo feminino com menos de 40 anos, ou seja, cada elemento do **conjunto interseção** tem as duas características ao mesmo tempo: tem menos de 40 anos "**e**" são do sexo feminino.

A interseção entre dois conjuntos é representada com o símbolo $\cap$. Desta forma, a interseção entre os conjuntos A e B é indicada por $A \cap B$.

Retomando novamente o banco de dados da prefeitura da cidade X, poderíamos querer listar os funcionários que têm idade menor que 40 anos "**ou**" que sejam do sexo feminino. Esta relação lógica expressa com a palavra "**ou**" representa a **união** entre dois conjuntos e consiste de todos os elementos dos dois conjuntos.

No Diagrama de Venn, a união entre os conjuntos A e B é indicada por $A \cup B$. Representamos a união de dois conjuntos sombreando os dois conjuntos. O símbolo $\cup$ representa união.



Muitas vezes nos referimos a **União** e **Interseção** como operações entre conjuntos, mas, atenção: não somamos ou subtraímos conjuntos como somamos e subtraímos os números.

O que podemos fazer é somarmos ou subtrairmos a quantidade de elementos dos conjuntos envolvidos quando necessário.

Diante do exposto, podemos notar a importância de compreendermos bem os conceitos relacionados à Teoria dos Conjuntos, em especial a representação com o Diagrama de Venn, para ilustrarmos os conceitos de União, Interseção e outros.

O Diagrama de Venn ajuda a motivar e esclarecer algumas definições e leis de probabilidade quando o estudo for a Estatística.

Outras relações entre conjuntos:

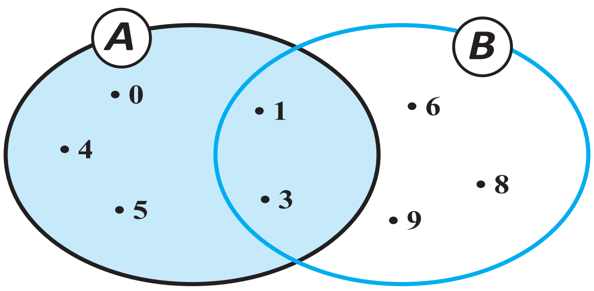
diferença e complementar

Denominamos **diferença** entre os conjuntos A e B, indicada por A – B, o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

Podemos, em símbolos, indicar: $A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Observe a representação a seguir, em que $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 6, 8, 9\}$:

A – B



Para o caso em que B é um subconjunto de A, ou seja, B está contido em A ($B \subset A$), a diferença é chamada de **complementar de B em relação a A** e pode ser indicada por: C_A^B.

Desta forma, $C_A^B = A - B$ (sendo $B \subset A$).

Atividades de aprendizagem

Para verificarmos seu entendimento, faça as atividades a seguir. Esta também é uma maneira de você se autoavaliar. Vamos lá?

1. Em uma pesquisa em um setor da secretaria municipal, verificou-se que 15 pessoas utilizavam os produtos A ou B, sendo que algumas delas utilizavam A e B, ou seja, ambos. Sabendo que o produto A era utilizado por 12 dessas pessoas e o produto B, por 10 delas, encontre o número de pessoas que utilizavam ambos os produtos.
2. Em um seminário de administradores públicos de certa cidade, foram servidos, entre diversos salgados, enroladinho de queijo e coxinha de frango com queijo. Sabe-se que, das 100 pessoas presentes, 44 comeram coxinha de frango com queijo e 27 comeram enroladinho de queijo. Também se tem a informação de que 20 pessoas comeram dos dois – enroladinho de queijo e coxinha de frango com queijo. Ao final do evento, verificou-se que o queijo utilizado no enroladinho e na coxinha estava com uma bactéria que provocava desconforto estomacal. Encontre para o organizador do evento a quantidade de pessoas que não comeu nem coxinha de frango nem enroladinho de queijo.
3. Imagine que na cantina da escola que você administra trabalham os seguintes funcionários: Maria, Carlos, Clara e Beatriz. Por curiosidade o diretor lhe solicita que encontre todas as possibilidades de pedidos de licença de saúde para certo dia de trabalho

destes funcionários. E, lembre-se: o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto e todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

a) Nomeie o conjunto de funcionários da cantina de G e indique o conjunto G listando todos os seus elementos.

b) Como se denomina o conjunto formado por todos os subconjuntos de G?

c) Indique e encontre o conjunto das partes de G listando todos os seus elementos.

4. Considere o diagrama a seguir, no qual: A, B e C são três conjuntos não vazios. Marque V para a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) e F para a(s) afirmativa(s) falsa(s).

a) ( ) $A \subset B$

b) ( ) $C \subset B$

c) ( ) $B \subset A$

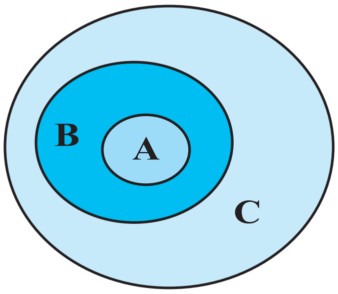
d) ( ) $A \subset C$

e) ( ) $B \not\subset A$

f) ( ) $A \not\subset C$

g) ( ) $B \supset A$

h) ( ) $A \not\subset B$



Agora, antes de seguirmos para um novo assunto, vamos juntos resolver o próximo exercício.

Exemplo 1

Em uma seleção de pessoal para uma nova vaga de um setor público, a equipe responsável recebeu currículos de 60 candidatos. Os três quesitos principais que seriam analisados são as principais habilidades de um gestor. Quais sejam: habilidades conceituais; habilidades humanas; e habilidades técnicas. Do total, 15 deles tinham habilidades conceituais; 18 tinham habilidades humanas;

25 possuíam habilidades técnicas; 6 candidatos tinham tanto habilidades humanas, quanto conceituais; 08 possuíam tanto habilidades humanas, quanto técnicas; 2 candidatos possuíam as três; e 18 não tinham nenhuma das três habilidades. Com base nessas informações, responda:

a) Quantos candidatos possuíam só habilidades conceituais?

b) Quantos candidatos possuíam só habilidades humanas?

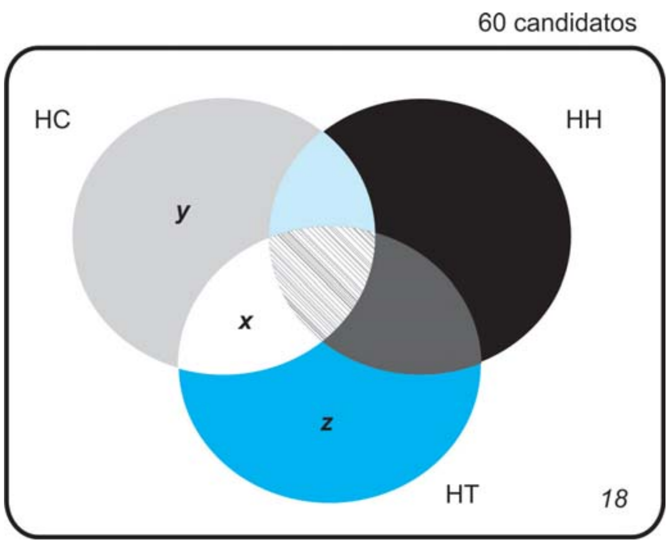
c) Quantos candidatos possuíam só habilidades técnicas?

Resolução

Primeiramente vamos separar os dados do problema.

Total de 60 candidatos	Com habilidades conceituais (HC) = 15
	Com habilidades humanas (HH) = 18
	Com habilidades técnicas (HT) = 25
	Sem nenhuma das três habilidades = 18
	Com habilidades humanas e conceituais (HH ∩ HC) = 6
	Com habilidades humanas e técnicas (HH ∩ HT) = 8
	Com as três habilidades (HH ∩ HT ∩ HC) = 2

Agora, vamos elaborar o Diagrama de Venn com os dados e compreender o que representa cada parte.



- cinza claro + branco + hachurado + azul claro = 15 = candidatos com HC
- Azul escuro + branco + cinza escuro + hachurado = 25 = candidatos com HT
- Azul claro + preto + hachurado + cinza escuro = 18 = candidatos com HH
- Azul claro + hachurado = candidatos com HC e HH
- Branco + hachurado = candidatos com HC e HT
- Branco + cinza escuro = candidatos com HH e HT

Olhando para o Diagrama de Venn, podemos descobrir a quantidade de elementos que figuram em cada uma das partes preenchidas pelas cores: azul claro, hachurado e cinza escuro. Vejamos com mais detalhes:

O número de candidatos que possuem HH é igual a 18. Para encontrarmos o número de candidatos que possuem somente a HH, basta fazermos o seguinte: subtraímos de 18 a quantidade que corresponde à quantidade de elementos dos conjuntos que correspondem às partes em – azul claro – cinza escuro – hachurado.

Sabemos que hachurado + azul claro tem 6 elementos (dado fornecido no enunciado do problema) e que cinza escuro + hachurado tem 8 elementos (dado fornecido no enunciado do problema) e que hachurado tem 2 elementos (dado fornecido no enunciado do problema).

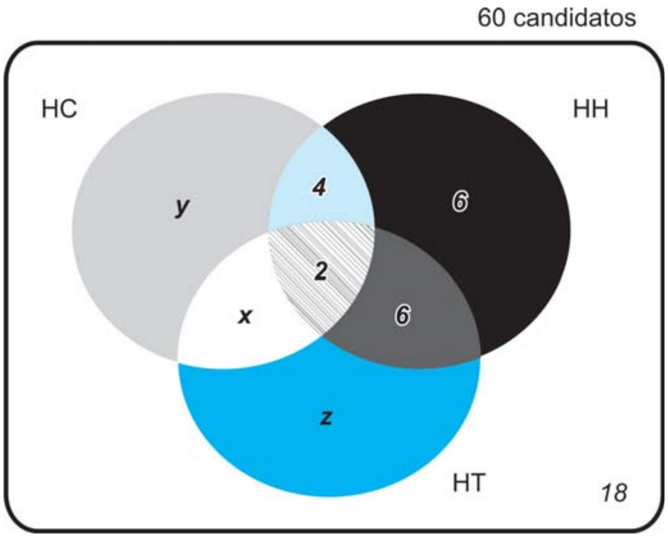
Assim, efetuando os cálculos com os dados que possuímos, descobrimos que a parte em azul claro tem 4 elementos e que a parte cinza escuro tem 6 elementos. A ilustração do diagrama poderá clarear essas ideias.

Para descobrir quantos candidatos possuem apenas a habilidade humana (região preto), basta retirarmos a quantidade de elementos correspondentes à parte sombreada com as cores azul, hachurado e cinza escuro.

Assim: 18 – (4 + 2 + 6) = 18 – 12 = 6, ou seja, 6 candidatos possuem somente HH.

Para descobrirmos quantos candidatos possuem somente habilidade conceitual e quantos possuem somente habilidade técnica, vamos chamar a região cinza – que é uma parte de HC – de y, a região azul escuro – que é uma parte de HT – será denominada por z e a região branca – que é uma parte da interseção de HC e HT – será denominada por x.

Veja a representação no diagrama a seguir:



Vamos poder registrar o seguinte sistema de equações com os dados que possuímos:

$$\begin{cases} x + y + 4 + 2 = 15 \\ x + z + 6 + 2 = 25 \\ x + y + 4 + 2 + 6 + 6 + z + 18 = 60 \end{cases}$$

Podemos reescrever o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y + 6 = 15 \\ x + z + 8 = 25 \\ x + y + z + 36 = 60 \end{cases}$$

Ainda podemos reescrever o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y \ = 9 \text{ (equação 1)} \\ x + z = 17 \text{ (equação 2)} \\ x + y + z = 24 \text{ (equação 3)} \end{cases}$$

Utilizando a informação da equação 1 ($x + y = 9$) na equação 3 obtemos:

$9 + z = 24$ e, assim, obtemos que $z = 15$.

Sabendo o valor de z, poderemos substitui-lo na equação 2 e, assim, encontramos o valor de x. Substituindo o valor de x na equação 1, obtemos o valor de y.

Assim teremos:

$x = 2$ e $y = 7$

Encontramos, assim, que 15 candidatos possuem somente habilidade técnica e 7 possuem apenas habilidade conceitual.

Portanto, a resposta de cada item solicitado na questão é:

a) 7 possuem apenas habilidades conceituais.

b) 6 possuem apenas habilidades humanas.

c) 15 possuem apenas habilidades técnicas.

Conjuntos Numéricos

No nosso dia a dia os conjuntos numéricos assumem um lugar de destaque. Estamos constantemente lidando com quantidades de pessoas, objetos, produtos, preços, porcentagens, lucros, temperatura etc. Enfim, podemos dizer que vivemos no mundo dos números.

Contudo, vale lembrarmos que, desde o reconhecimento da necessidade dos números, foram precisos séculos e séculos de descobertas e aperfeiçoamentos para chegarmos à atual forma de escrita e representação deles. A nomenclatura relacionada tem, muitas vezes, sido confundida e usada indiscriminadamente, mas parece ser importante alertarmos sobre o significado de alguns conceitos.

Denominamos de **número** a ideia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Assim, estamos pensando em números quando contamos as portas de um automóvel, enumeramos a posição de uma pessoa numa fila ou medimos o peso de uma caixa.

À palavra "**numeral**" associamos toda representação de um número, seja ela escrita, falada ou indigitada.

E a palavra "**algarismo**" se refere ao símbolo numérico que usamos para formar os numerais escritos.

Os símbolos – 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 – ficaram conhecidos como a notação de *al-Khowarizmi*, de onde se originou o termo latino *algorismus*. Daí o nome **algarismo**. Esses números criados pelos matemáticos da Índia e divulgados para outros povos pelo árabe *al-Khowarizmi* constituem o nosso sistema de numeração decimal, sendo conhecidos como **algarismos indo-arábicos**.

Seria muito interessante e curioso, porém, para o nosso curso, consideramos mais conveniente reduzir os caminhos para conseguirmos chegar a nossa meta, que é aprender a lidar com a Matemática essencial para o Administrador Público.

Para compreendermos todo o processo de desenvolvimento dos sistemas de numeração e os aspectos históricos envolvidos, precisaríamos de um tempo disponível para nos embrenharmos em todas as histórias dos povos que fizeram parte deste processo.

Assim, vamos apenas dizer que com o tempo surgiram os conjuntos numéricos para especialmente atender às necessidades da Matemática. Os conjuntos numéricos receberam a seguinte nomeação:

- Conjunto dos Números Naturais (N);
- Conjunto dos Números Inteiros (Z);
- Conjunto dos Números Racionais (Q);
- Conjunto dos Números Irracionais (I); e
- Conjunto dos Números Reais (R).

Conjunto dos Números Naturais (N)

Agora, vamos ver alguns detalhes de cada um dos conjuntos referenciados anteriormente, o que certamente não será muita novidade para você.

Vamos começar relembrando o Conjunto dos Números Naturais N, que é infinito e contável.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Uma notação muito interessante que podemos utilizar é o asterisco próximo de uma letra que designa um conjunto numérico. Este símbolo indica que estamos excluindo o zero do conjunto em questão. Portando, temos:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

N* é chamado de conjunto dos números naturais não nulos e a leitura é simples e óbvia: lê-se N asterisco.

Operações com Números Naturais

- **Adição de Números Naturais**: é o resultado a que se chega ao realizarmos a operação de adição partindo dos números naturais a e b, chamados parcelas, ou seja, é a soma de a e b $(a + b)$. A soma de dois números naturais é sempre um número natural, isto é, se $a \in N$ e $b \in N$, então $(a + b) \in N$.
- **Subtração de Números Naturais**: no conjunto dos naturais a subtração só é possível quando o primeiro número (minuendo) for maior ou igual ao segundo número (subtraendo). O fato de dois números naturais quaisquer não poderem ser subtraídos de modo a se obter como resultado outro número natural nos leva a inferir ser esta uma das razões que despertaram a necessidade de ampliação do conjunto.
- **Multiplicação de Números Naturais**: o produto do número natural a pelo número natural b ("$a \cdot b$" ou "a x b") é o resultado a que se chega ao realizarmos a operação de multiplicação partindo dos números naturais a e b denominados fatores.
- **Divisão dos Números Naturais**: o quociente entre dois números naturais a e b é o resultado a que se chega ao realizarmos a operação de divisão partindo do número natural a, chamado dividendo, e do número natural b, chamado divisor. Nem sempre é possível encontrar como resultado da divisão entre dois números naturais outro número também natural, e também aqui percebemos a necessidade de ampliação do conjunto dos naturais.

Conjunto dos Números Inteiros

O Conjunto dos Números Inteiros pode ser considerado como uma ampliação do conjunto dos números naturais.

O conjunto formado pelos inteiros positivos, pelos inteiros negativos e pelo zero é chamado conjunto dos números inteiros e é representado pela letra Z.

$Z = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$

Não é preciso sempre escrever o sinal + à frente dos números positivos. Assim, 1 e +1 indicam o mesmo numeral.

Podemos identificar alguns subconjuntos dos conjuntos dos inteiros:

- Retirando do conjunto Z o numeral zero, temos o conjunto:

  $Z^* = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$ denominado de conjunto dos inteiros não nulos.

- Extraindo de Z os números negativos, temos o conjunto:

  $Z_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$ que constitui o conjunto dos inteiros não negativos.

- Retirando de Z os números positivos, temos o conjunto:

  $Z_- = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ denominado de conjunto dos inteiros não positivos.

- Extraindo de Z_+ e de Z_- o número zero, temos os conjuntos:

$Z^*_+ = \{ +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$ que constitui o conjunto dos inteiros positivos; e

$Z^*_- = \{ . . ., -5, -4, -3, -2, -1\}$ que forma o conjunto dos inteiros negativos.

$\boxed{\text{Logo, } Z_+ = N \text{ e } N \subset Z.}$

Operações com Números Inteiros

As operações anteriormente descritas para os conjuntos naturais são também válidas para os Números Inteiros com a vantagem de que quaisquer dois inteiros podem ser subtraídos obtendo como resultado um número que também pertence ao conjunto dos números inteiros.

Contudo, em se tratando da operação de divisão, não podemos dizer o mesmo, pois nem sempre temos como resultado de uma divisão um número que também pertença ao conjunto dos números inteiros. Eis aqui mais uma razão para se justificar a ampliação, ou seja, a criação de outros conjuntos numéricos, como veremos a seguir.

Conjunto dos Números Racionais

O conjunto constituído pelos números inteiros e pelas frações positivas e negativas é chamado conjunto dos números racionais, e é representado pela letra Q.

Q = {a/b: a e b em Z, b diferente de zero}, ou seja,
Q = { ... -2, ..., -5/3, ..., 0, ..., 2/3, ... , +1, ... }

Dentro do conjunto dos racionais, podemos identificar alguns subconjuntos. Entre estes:

- Retirando do conjunto Q o zero, obteremos o conjunto:

  $Q^* = Q - \{0\}$ denominado de conjunto dos racionais não nulos.

- Extraindo de Q os números racionais negativos, obtemos:

  Q_+ = conjunto dos números racionais não negativos.

- Retirando de Q os números racionais positivos, temos:

  Q_- = conjunto dos números racionais não positivos.

- Extraindo de Q_+ e de Q_- o número zero, obtemos:

  Q^*_+ = conjunto dos números racionais positivos; e

  Q^*_- = conjunto dos números racionais negativos.

Conjunto dos Números Irracionais

Existem alguns resultados numéricos que não representam um número inteiro e também não podem ser representados por uma fração. Estes são denominados de números irracionais, que têm uma representação decimal com infinitas casas decimais e não periódicas. Por exemplo: $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ e $\pi = 3{,}14159...$ dentre outras situações.

Conjunto dos Números Reais

Denominamos de número real qualquer número racional ou irracional. Podemos dizer, portanto, que número real é todo número com representação decimal finita ou infinita.

A letra que designa o conjunto dos números reais é R, e R* indica o conjunto dos números reais não nulos, isto é:

R = {x | x é número racional ou irracional}; e

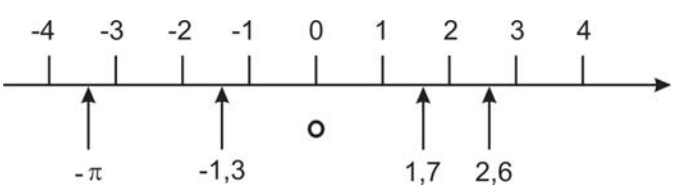
R* = {x | x é número real diferente de zero}

Representação do Conjunto dos Números Reais – Eixo Real

Considerando uma reta r, observe que a cada ponto dessa reta se associa um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto dessa reta.

Para melhor compreender, observe os passos descritos a seguir:

- associe o número 0 (zero) a um ponto O qualquer da reta r;
- a cada ponto A de uma das semirretas determinadas por O em r, associe um número positivo x, que indica a distância de A até O, em uma certa unidade u; e
- a cada ponto A, simétrico de A em relação a O, associe o oposto de x.



Essa representação recebe o nome de **eixo real**, cuja origem é o ponto O e o sentido é o que concorda com o crescimento dos valores numéricos.

Subconjunto dos Números Reais

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Podemos utilizar uma representação específica para os subconjuntos dos números reais denominada por **intervalos reais**. Estes intervalos podem ser:

- Intervalo limitado fechado

  $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$

Você se lembra como é realizada a leitura do intervalo, expresso em forma simbólica como apresentado acima? Vamos relembrar juntos?

Os elementos do conjunto estão designados pela letra x e, portanto, os símbolos nos dizem que os elementos, ou seja, os elementos designados por x pertencem ao conjunto dos reais, e cada elemento x é menor ou igual ao número b e maior ou igual ao número a.

- Intervalo limitado aberto

  $\{x \in R \mid a < x < b\} =]a,b[$

- Intervalo limitado semiaberto

  $\{x \in R \mid a < x \leq b\} =]a,b]$

  $\{x \in R \mid a \leq x < b\} = [a,b[$

- Intervalo ilimitado

  $\{x \in R \mid x \geq a\} = [a,+\infty[$

  $\{x \in R \mid x > a\} =]a,+\infty[$

  $\{x \in R \mid x \leq a\} =]-\infty,a]$

  $\{x \in R \mid x < a\} =]-\infty,a[$

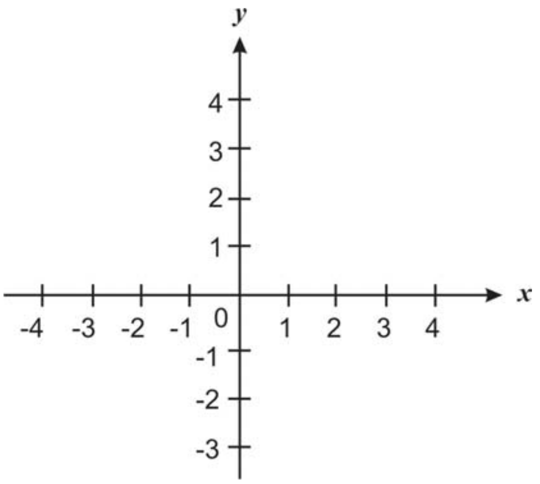
  $R =]-\infty,+\infty[$

Sistemas de Coordenadas

Para localizarmos precisamente um ponto qualquer de uma figura plana, usamos como referência duas retas numéricas e, assim, obtemos o que denominamos de **coordenadas** do ponto. Para isso, desenhamos duas retas numeradas e perpendiculares entre si que se cruzam no ponto zero de ambas.

A representação na reta numérica nos será muito útil para nossos estudos no curso de Administração Pública.

As retas numeradas, ou eixos, como são comumente nomeadas, dividem o plano em quatro regiões denominadas **quadrantes**. O conjunto formado pelas retas e pelos quadrantes recebe a denominação de **sistema de coordenadas**. Esta representação é muito útil para a construção de gráficos conforme veremos mais adiante no curso.

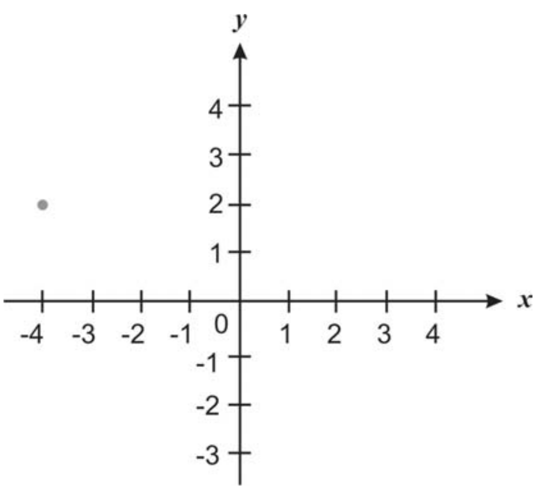


A localização de cada ponto no plano tem como referência um par ordenado de números reais em que o primeiro elemento se relaciona ao eixo horizontal, denominado de abscissa, e o segundo elemento se relaciona ao eixo vertical, denominado de ordenada do ponto. O par ordenado se denomina coordenada do ponto.

Muitas vezes iremos nos referir aos eixos que compõem o sistema de coordenadas como: eixo das abscissas e eixo das ordenadas.

O par (0, 0) é denominado **origem** e é uma importante **referência** para o sistema de coordenadas.

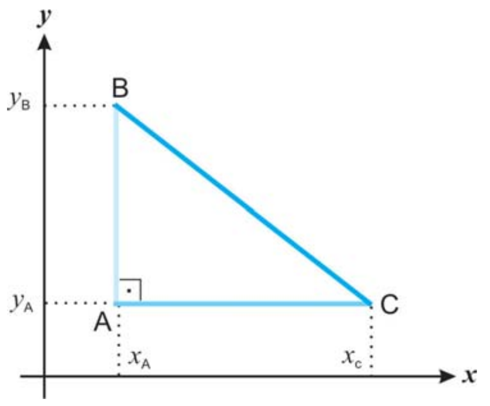
Para ilustrar, citamos o ponto P (-4, 2). As coordenadas de P são -4 e 2. Assim, podemos localizar o ponto P tendo como referência o sistema de eixos. P está localizado a 4 unidades para a esquerda do zero e 2 unidades para cima. Isto é, para atingirmos o ponto P, deslocamos no sistema, a partir da origem, 4 unidades para a esquerda e, em seguida, 2 unidades para cima.



Vale lembrar a importância da ordem dos números, na qual as coordenadas são escritas. Por exemplo, o ponto de coordenadas (2, 4) é diferente do ponto de coordenadas (4, 2).

Desta forma, a posição de qualquer ponto do plano será determinada por um par de números (x, y) os quais indicam as distâncias deste ponto às retas de referência (eixo das abscissas e eixo das ordenadas). Estas distâncias são medidas usando-se a escala estabelecida a partir de retas paralelas às duas retas de referência que determinam a malha coordenada.

Considerando apenas uma reta numérica (reta real), é fácil perceber que encontramos a distância entre dois pontos x e y sobre uma reta por $|x - y|$. Perceba que utilizamos o módulo da diferença para garantir que o valor seja positivo, pois se trata de distância entre dois pontos. Por exemplo, considere os pontos A (x_A, y_A), B (x_A, y_B) e C (x_C, y_A).



Perceba que os pontos A e B estão sob um segmento paralelo ao eixo das ordenadas. Assim, podemos considerá-los sob um eixo e, ao subtrairmos as ordenadas correspondentes, encontramos a distância entre eles: $y_B - y_A$.

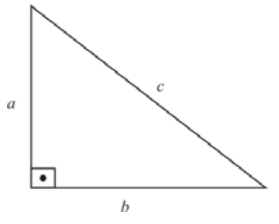
Repare que, como foi tomado na subtração o valor maior menos o menor, garantimos o resultado positivo independentemente de tomarmos o módulo.

Analogamente, para descobrirmos a distância de A até C, basta subtrairmos suas abscissas e atentarmos para a particularidade de que A a C estão sob um segmento que é paralelo ao eixo das abscissas: $x_C - x_A$.

Perceba que a figura nos apresenta a forma de um triângulo retângulo e, portanto, para descobrirmos a distância de B até C, basta utilizarmos o Teorema de Pitágoras, que consiste em: $a^2 = b^2 + c^2$, em que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Saiba mais — **Teorema de Pitágoras**



Considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo. O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e é localizada oposta ao ângulo reto. Considerando catetos (a e b) e hipotenusa (c) o teorema diz que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Fonte: <http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-pitagoras.htm>. Acesso em: 9 nov. 2009.

Atividades de aprendizagem

Conseguiu acompanhar o que foi exposto até aqui? Verifique fazendo a atividade a seguir. Se aparecer alguma dúvida, não hesite em consultar o seu tutor.

5. Imagine que um helicóptero do serviço de emergência do Hospital A esteja situado a 4 km a oeste e a 2 km ao norte de um acidente do carro a serviço da prefeitura em que você trabalha. Outro helicóptero está posicionado no Hospital B, que está a 3 km a leste e a 3 km ao norte do acidente. Qual helicóptero deverá ser acionado por estar mais próximo do acidente?

Antes de começar a resolver, veja algumas dicas que preparamos para você:

- Represente as localizações em um plano cartesiano. Como as localizações dos hospitais foram fornecidas tendo como referência o acidente, posicione o ponto que representa o acidente na origem do sistema de eixos – o ponto O terá como coordenada (0,0).
- Situe os pontos no plano que representam cada local em que se encontram os helicópteros - HA (-4,2) e HB (3,3) e encontre as distâncias entre os pontos OHA e OHB.

Saiba mais **Laurence Bardin (1723-1790)**

Embora o plano representado pelo sistema de eixos seja denominado por muitos de Plano Cartesiano em homenagem a Descartes, alguns historiadores revelam que na mesma época de Descartes, outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), também chegou aos mesmos princípios, isoladamente. Assim, para sermos justos parece ser importante lembrarmos que, na realidade, o estabelecimento das bases da Geometria Analítica deve-se a ambos – Descartes e Pierre Fermat. Se você desejar conhecer mais sobre conjuntos e conjuntos numéricos, reserve um tempo para passear no *site* <http://br.geocities.com/paulomarques_math/arq11-1.htm> e aproveite para exercitar mais um pouquinho.

Resumindo

Nesta primeira Unidade aprendemos e relembramos a nomenclatura e a simbologia da teoria dos conjuntos numéricos.

Evidenciamos a notação a fim de que os símbolos não se apresentem como empecilho para a sua aprendizagem no contexto administrativo.

Vimos ainda problemas que envolvem conjuntos numéricos e suas operações.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. 7 pessoas utilizavam os dois produtos.
2. 49 pessoas não comeram salgados que continham queijo.
3.
   a) G = {Maria, Carlos, Clara, Beatriz} = {Ma, Ca, Cl, Be}

   b) Conjunto das partes de G;

   c) P (G) = {Ø, {Ma}, {Ca}, {Cl}, {Be}, {Ma, Ca}, {Ma, Cl}, {Ma, Be}, {Ca, Cl}, {Ca, Be}, {Cl, Be}, {Ma, Ca, Cl}, {Ma, Cl, Be}. {Ca, Cl, Be}, {Ma, Ca, Be}, {Ma, Ca, Cl, Be}.
4. V – F – F – V – V – F – V – F
5. $OH_B = \sqrt{18}$ km, ou seja, está a 4,24 km; e

   OH_A está à distância de $\sqrt{20}$ km, ou seja, a 4,47 km. Logo, o helicóptero que está estacionado no Hospital B está mais perto do acidente.