UNIDADE 2

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Descrever e comentar possibilidades de uso do conceito de Matriz relacionado ao contexto da Administração Pública;
- Operar problemas, no ambiente da Administração Pública, utilizando matrizes e suas operações;
- Identificar e resolver Sistemas de Equações Lineares;
- Interpretar situações-problemas relacionadas à Administração que envolvem matrizes e sistemas lineares de equações; e
- Criar matrizes associadas às informações em situações diversas nos assuntos administrativos.

Introdução a matrizes

Caro aluno,

Agora vamos conhecer outras formas de se resolver situações nas quais os dados não estão arrumados. E, antes de obtermos uma solução para o problema, precisamos organizar esses dados. A utilização de matrizes e sistemas de equações lineares quando temos várias informações de distintas áreas abre muitas possibilidades em nosso dia a dia organizacional.

Vamos ver como funcionam? Bons estudos!

Muitas vezes nos encontramos diante de uma situação em que necessitamos organizar dados. Ou seja, temos muitas informações que nos são apresentadas as quais merecem uma organização. Por exemplo: as informações sobre o estoque de remédios do Hospital Escola de uma universidade pública, sobre os nutrientes de um produto de alimentação das crianças da creche da prefeitura, sobre os equipamentos fabricados, importados ou exportados, adquiridos, vendidos, defeituosos, etc. Enfim, são várias as informações que temos de compreender e que demandam uma organização.

Matriz é uma representação matemática útil para resolver problemas em diferentes áreas e se apresenta como uma tabela retangular de números, parâmetros ou variáveis organizados em uma ordem significativa.

Assim, denominamos matriz um grupo ordenado de números que se apresentam dispostos em forma retangular em linhas e colunas. Veja o exemplo:

$$\begin{bmatrix} 50 & 65 & 122 \\ 22 & 32 & 85 \\ 8 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 50 & 65 & 122 \\ 22 & 32 & 85 \\ 8 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Os componentes (parâmetros ou variáveis) são denominados **elementos** da matriz. Os elementos na fileira horizontal constituem uma **linha** da matriz e os elementos na fileira vertical constituem uma **coluna** da matriz. Como podemos observar, os componentes de uma matriz se apresentam delimitados por duas linhas curvas (parênteses ou colchetes).

Reconhecemos a **dimensão** ou **ordem** de uma matriz pela quantidade de linhas e colunas. Assim, podemos dizer que de acordo com o exemplo anterior a matriz é de ordem 4 x 3 (lê-se quatro por três), em que o número 4 se relaciona ao número de linhas e o número 3 se relaciona ao número de colunas. Para você entender melhor, observe o modelo representado a seguir que traz uma matriz de 2 x 3 (duas linhas e três colunas).

$$\begin{array}{cc} & \text{coluna} \downarrow \\ \text{linha} \rightarrow & \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Note que podemos nos referir a um determinado elemento da matriz fazendo uso dos índices i, j. O elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna seria indicado por a_{ij}.

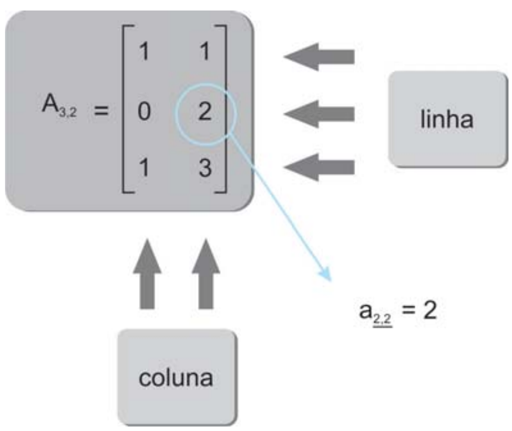
Genericamente podemos dizer que matriz é uma tabela retangular de números organizados em m linhas e n colunas.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\text{Linha,}\\ i = 1, \ldots, m\end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij}
\end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{c}\text{Colunas,}\\ i = 1, \ldots, n\end{array}
\end{array}
$$

Com base nos exemplos, podemos dizer que matriz é uma forma de organizar informações que nos serão úteis para resolvermos problemas?

Exatamente. Podemos afirmar que a matriz relaciona os dados ali organizados, já que o número de linhas e colunas da matriz nos informa o que denominamos de **ordem da matriz**.

Uma matriz pode ser indicada por $A = [a_{i,j}]$.



Observe que o elemento em destaque na matriz de ordem 3 por 2 (3x2) representada acima se situa na segunda linha e segunda coluna e, portanto, indicamos este elemento por $a_{2,2}$, e que neste caso é igual a 2.

Matrizes Especiais

As matrizes recebem uma denominação especial dependendo do número de linhas ou colunas que possuem ou por alguma especificidade de seus elementos.

Veja como a nomenclatura utilizada se apresenta coerente e de fácil compreensão:

- **Matriz linha** (ou vetor linha): é uma matriz com apenas uma linha e pode ser representada genericamente por $\vec{r} = (r_1 \; r_2 \; r_3 \; \ldots \; r_n)$. Um exemplo de matriz linha é [9 -5 7 0].
- **Matriz coluna** (ou vetor coluna): é uma matriz com apenas uma coluna, como mostrado a seguir.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- **Matriz nula**: é uma matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Por exemplo $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- **Matriz quadrada**: é a matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas. Este tipo de matriz apresenta uma forma semelhante à figura geométrica conhecida por quadrado. Um exemplo de uma matriz quadrada seria uma de ordem 2x2. Podemos ainda dizer que a matriz é quadrada de ordem 2.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Em uma matriz quadrada de ordem qualquer n, os elementos a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \ldots,$ a_{nn} formam o que denominamos de **diagonal principal da matriz** e representam os elementos a_{ij} com i = j. A outra diagonal é denominada de **diagonal secundária** da matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3/2 & -9 & 56 & 0 \\ -6 & \sqrt{5} & 5 & 7 \\ 8 & 0 & 1 & -20 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

- **Matriz diagonal**: é a matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade I_n**: é a matriz quadrada, de ordem nxn, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a um, e todos os outros elementos são iguais a zero. Observe a seguir o exemplo de uma matriz identidade de ordem 4x4.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos compreender melhor, com o exemplo a seguir, o que vem a ser matriz e como esta forma de organizar os dados pode nos ajudar?

Supondo que você seja um auditor público e deva proceder a fiscalização em uma empresa com filiais em vários Estados.

Ao chegarem a uma das lojas, os colaboradores lhe apresentam algumas tabelas e entre elas há a Tabela 1, a seguir, que exibe os dados de material para *camping* para um mês (junho) de dois produtos.

Tabela 1: Material para *camping*

	Estoque (1º de junho)		Venda (junho)		Entrada de produto novo (junho)	
	Pequeno	Grande	Pequeno	Grande	Pequeno	Grande
Mesa de piquenique	8	10	7	9	15	20
Grelha de churrasco	15	12	15	12	18	24

Fonte: Elaborada pela autora

De acordo com a tabela, note que há o estoque (em 1º de junho), a venda (durante o mês de junho) e os produtos adquiridos (entregues no mês de junho). Perceba que podemos representar esses dados da tabela em diferentes matrizes, por exemplo:

M será a Matriz que representa o estoque da firma em 1º de junho:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{mesa} \\ \text{grelha} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{pequena} & \text{grande} \end{array} & \end{array}$$

Observe que as linhas nos informam o tipo de produto. Temos na primeira linha as mesas e na segunda linha, as grelhas.

Já as colunas nos informam o tamanho dos produtos. Na primeira coluna temos os produtos pequenos e na segunda, os produtos de tamanho grande.

Da mesma forma, poderíamos representar por uma matriz S a venda do mês de junho e por D os produtos adquiridos no mês de junho.

Que tal começarmos pensando genericamente na matriz S? Que número estaria na primeira linha e segunda coluna? Ou seja, quem seria o elemento S_{12}?

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Se você respondeu que seria o número 9, você está correto. O que significa que em junho foram vendidas 9 mesas de piquenique de tamanho grande.

*Agora é com você: continue e registre a matriz **S** e também a matriz **D**. Em caso de dúvida, consulte seu tutor. Ele, com certeza, terá o maior prazer em lhe ajudar. Não carregue dúvidas com você, pois contamos com o seu entendimento para continuarmos nossa viagem por este conteúdo. Vamos lá! Anime-se!*

Operações com Matrizes

Nesta seção vamos iniciar uma conversa sobre a álgebra das matrizes e, por vezes, voltaremos ao nosso exemplo (em que o auditor se encontrava em uma loja de material de *camping*) para ilustrarmos nossos caminhos e buscarmos uma compreensão deste conteúdo.

As matrizes nos oferecem uma maneira fácil de combinarmos informações de diferentes tabelas. Para tal, teremos de compreender como funciona a aritmética das matrizes.

Comecemos compreendendo quando podemos considerar que duas matrizes são iguais.

Igualdade de Matrizes

Precisamos inicialmente entender o que significam **elementos correspondentes** entre duas matrizes. Trata-se de uma denominação bem intuitiva. Veja a seguir.

Entre matrizes de mesma ordem, os elementos que ocupam idêntica posição se denominam **elementos correspondentes**.

Atenção, só as de mesma ordem.

Para entender melhor, considere as matrizes A e B expressas na forma genérica a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Agora, vamos identificar os pares de **elementos correspondentes** das matrizes A e B:

a_{11} e b_{11} a_{12} e b_{12}

a_{21} e b_{21} a_{22} e b_{22}

a_{31} e b_{31} a_{32} e b_{32}

Uma vez que já compreendemos o significado da expressão **elementos correspondentes de uma matriz**, podemos identificar quando duas matrizes são iguais. Ou seja, duas ou mais matrizes são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e possuem seus elementos correspondentes iguais.

Exemplo 1

Verifique se as matrizes M e N a seguir são iguais.

$$M = \begin{pmatrix} 2^2 & (12-3) \\ \sqrt{49} & 11 \\ -3(9) & \frac{24}{3} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2(2) & \sqrt{81} \\ 7 & \frac{44}{4} \\ -(30-3) & 2^3 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Inicialmente vamos relembrar as características que fazem com que duas matrizes sejam iguais:

- As duas matrizes devem ser de mesma ordem. Temos que tanto a matriz M como a matriz N possuem 3 linhas e 2 colunas e, portanto, ambas são de ordem 3 por 2 (3x2).
- Se simplificarmos os elementos das matrizes M e N chegaremos, em ambos os casos, como resultado, à matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 11 \\ -27 & 85 \end{pmatrix}$$

Assim podemos concluir que os elementos correspondentes das matrizes M e N são iguais. Logo, as matrizes M e N são iguais.

Exemplo 2

Encontre os valores de x e y para que as matrizes abaixo sejam iguais.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & -5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Como a proposta solicita que as matrizes sejam iguais, devemos observar se estas são de mesma ordem e, além disso, avaliar as condições em que os elementos que ocupam idêntica posição sejam iguais. Assim devemos considerar $2x + 4 = 12$ e $-3y + 5 = 5y - 3$.

Resolvendo as duas equações, encontraremos $x = 4$ e $y = 1$.

Tudo bem até aqui? Podemos dar continuidade à Aritmética das Matrizes?

Adição e Subtração de Matrizes

Uma matriz é uma representação visualmente interessante e útil para o armazenamento de dados. Entretanto, algumas vezes os dados apresentam mudanças e, assim, sentimos a necessidade de somar e subtrair matrizes.

Para somar ou subtrair matrizes, estas devem ser de mesma dimensão, ou seja, ambas devem ser de mesma ordem, mesmo número de linhas e mesmo número de colunas.

Para somar ou subtrair duas matrizes de mesma ordem, basta efetuar a soma ou a subtração dos elementos correspondentes. Veja os exemplos:

- Soma das matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Subtração das matrizes M e N:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ 14 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ 14 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -4 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ -14 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+(-2) & 10+(8) & (-4)+1 \\ 4+(-14) & 16+0 & (-12)+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -3 \\ -10 & 16 & -16 \end{pmatrix}$$

Portanto $M - N = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -3 \\ -10 & 16 & -16 \end{pmatrix}$

Exemplo 3

Retorne ao exemplo em que figuramos, imaginariamente, como auditor público e retomemos a tabela sobre o estoque (em 1º de junho), a venda (durante o mês de junho) e os produtos adquiridos (entregues no mês de junho) da loja de material para *camping*. A matriz **M** representou o estoque da firma em 1º de junho. A matriz **S** representou a venda do mês de junho, e a matriz **D** representou os produtos adquiridos no mês de junho.
Agora, encontre a matriz resultante da operação M – S + D e interprete o significado da matriz encontrada.

Resolução:

Note que podemos efetuar a adição e subtração de matrizes em uma etapa.

$$M - S + D = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-7+15 & 10-9+20 \\ 15-15+18 & 12-12+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{mesa} \\ \text{grelha} \end{array} \end{array}$$

Podemos interpretar o resultado da seguinte maneira:

No final de junho, a loja de materiais para *camping* tem 16 mesas de piquenique pequenas e 21 mesas grandes em estoque. A loja também tem em estoque 18 grelhas de churrasco de tamanho pequeno e 24 grelhas de tamanho grande.

Expor informações de tabelas em matrizes por vezes facilita a visualização e operação com os dados ali dispostos.

Multiplicação de uma matriz por um número real

Em algumas situações será necessário multiplicar uma matriz por um número real. Este procedimento é muito simples. Acompanhe a explicação a seguir:

Para multiplicar uma matriz A por um número real, k, basta multiplicar todos os elementos da matriz A por k. Esta operação é denominada de multiplicação por um escalar. Na álgebra das matrizes um número real é muitas vezes chamado de escalar.

Entendeu? Vamos compreender melhor?

Seja k um escalar (um número real diferente de zero) e $A = (a_{ij})_{mxn}$ uma matriz. Definimos a multiplicação do escalar k pela matriz A como outra matriz $C = k \cdot A$, em que $c_{ij} = k \cdot (a_{ij})$ para todo i e todo j. Note que, embora tenhamos utilizado algumas letras e símbolos, a informação é a mesma, ou seja, multiplicam-se todos os elementos da matriz pelo número real para se chegar, então, ao resultado da operação. Acompanhe o exemplo:

$$4\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,(-2) & 4\,(0) \\ 4\,(4) & 4\,(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 16 & -4 \end{bmatrix}$$

No caso particular em que o número real *k* seja igual a –1, isto é, k = –1, o produto –1A = -A é denominado matriz oposta de A.

Note que sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$, a matriz $(-A) = (a'_{ij})_{m \times n}$ é tal que $A + (-A) = 0$, em que 0 é a matriz nula do tipo m x n. Temos que $(a'_{ij}) = (-a_{ij})$. Em outras palavras, os elementos da matriz oposta (-A) são os opostos dos elementos da matriz A.

Multiplicação de Matrizes

As operações com matrizes fazem uso dos conhecimentos básicos da aritmética e da álgebra. A maioria delas, como as operações adição e subtração, é realizada de uma maneira natural. Outras operações, como a multiplicação, têm uma lógica que muitas vezes nos parece um pouco estranha.

Antes de iniciarmos nossa conversa sobre multiplicação de matrizes, gostaríamos de alertar sobre um detalhe importante ao qual devemos ficar sempre atentos.

> Lembre-se: O produto de duas matrizes só será possível se o número de colunas da primeira matriz for o mesmo número de linhas da segunda matriz. Vale também lembrar que o produto terá o mesmo número de linhas da primeira matriz e o mesmo número de colunas da segunda matriz.

Para compreender a lógica da multiplicação de matrizes, acompanhe a ilustração a seguir considerando os detalhes que devem ser observados ao multiplicar uma matriz M de ordem 3x2 (três linhas e duas colunas) por uma matriz G de ordem 2x2 (duas linhas e duas colunas).

MATRIZ M 3x2 **MATRIZ G** 2x2

devem ser iguais

O resultado é do tipo 3x2

Agora imagine que uma prefeitura decida contratar funcionários para confeccionar brinquedos para sua creche. A equipe produz 3 tipos de bichos de pelúcia: urso, canguru e coelho.

A produção de cada animal de pelúcia exige o corte do material, a costura do material e o arremate do produto.

Podemos representar em uma matriz a quantidade de horas que cada tipo de trabalho requer para a confecção de cada tipo de brinquedo. Veja a seguir:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{urso} & \text{canguru} & \text{coelho} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada elemento da matriz tem um significado. Olhando nossa matriz podemos encontrar quantas horas de corte são necessárias na confecção de um coelho de pelúcia?

Exatamente, 0,4, ou 4 décimos de hora.

Já para a costura de um urso de pelúcia são necessários 48 minutos de costura (48 = 0,8 x 60).

Continuemos testando nossa interpretação sobre as informações que a matriz nos oferece. Podemos encontrar o total de horas de trabalho necessárias para a produção de dois ursos, que seria igual a 3,8, ou seja, duas vezes (0,5 + 0,8 + 0,6).

Agora imagine que a equipe contratada tenha recebido uma solicitação para atender às prefeituras das cidades próximas para o mês de outubro e novembro. A matriz, a seguir, nos mostra a quantidade de cada tipo de brinquedo que deverá ser produzido para atender ao pedido de cada mês.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Urso} \\ \text{Canguru} \\ \text{Coelho} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Outubro} & \text{Novembro} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.000 & 1.100 \\ 600 & 850 \\ 800 & 725 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que essa matriz também nos traz muitas informações. Quantos cangurus devem ser produzidos em novembro? Quantos bichos de pelúcia devem ser produzidos em outubro?

Resolução:

Isso mesmo, em novembro devem ser produzidos 850 cangurus.

Em outubro devem ser produzidos 2.400 bichos de pelúcia (1000 + 600 + 800 = 2.400).

$$\begin{array}{cccc} & \text{urso} & \text{canguru} & \text{coelho} \\ \text{Corte} & & & \\ \text{Costura} & & & \\ \text{Arremate} & & & \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ \text{Urso} \\ \text{Canguru} \\ \text{Coelho} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Outubro} & \text{Novembro} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.000 & 1.100 \\ 600 & 850 \\ 800 & 725 \end{pmatrix} \end{array}$$

Agora suponha que a secretaria de Recursos Humanos solicite saber quantas horas de trabalho de corte dos bichos serão necessárias em outubro. Pense por etapas:

Resolução:

- Quantas horas são necessárias para o corte dos ursos em outubro?

  500 (0,5 x 1.000 = 500)

- Quantas horas são necessárias para o corte dos cangurus em outubro?

  480 (0,8 x 600 = 480)

- Quantas horas são necessárias para o corte dos coelhos em outubro?

  320 (0,4 x 800 = 320)

- Qual o total de horas de corte de bichos necessárias em outubro?

  500+ 480 + 320 = 1.300

Vencida esta etapa, vamos encontrar a quantidade de horas necessárias para costura em novembro para cada tipo de bicho e, depois, a quantidade total de horas necessárias para arremate no mês de outubro.

Não hesite em consultar seu tutor em caso de dúvida.

- horas de costura para urso = 800 (0,8 x 1000)
- horas de costura para canguru = 600 (1,0 x 600)
- horas de costura para coelho = 400 (0,5 x 800)
- total de horas de costura = 1800 (800 + 600 + 400)

O processo utilizado para responder às questões anteriores, sobre corte e costura, pode ser interpretado como uma operação com matriz.

Para visualizarmos o número total de horas de arremate para o mês de outubro é mais fácil, pois basta escrevermos a linha de arremate da primeira matriz próxima da coluna do mês de outubro – conforme mostrado a seguir.

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Observe como é simples: multiplicamos o primeiro número (elemento) da primeira matriz pelo primeiro número da segunda matriz e, depois, multiplicamos o segundo número, o terceiro etc., e finalmente adicionamos os produtos:

$$(0{,}6 \text{ x } 1.000) + (0{,}4 \text{ x } 600) + (0{,}5 \text{ x } 800) = 1.240$$

Vamos neste ponto expressar em uma matriz o total de horas, no mês de outubro, necessárias para o corte, a costura e o arremate. Como já encontramos esses dados anteriormente, basta dispormos em uma matriz.

$$\begin{array}{r c} & \text{Outubro} \\ \begin{array}{r} \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.300 \\ 1.800 \\ 1.240 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dando continuidade ao exemplo anterior, vamos supor que o setor de finanças da prefeitura precise calcular o total de horas de trabalho necessárias (em cada tipo de trabalho) para os dois meses – outubro e novembro. Volte a olhar as matrizes que nos informam o tipo de trabalho por tipo de bicho e o tipo de bicho encomendado por mês. Lá temos já o total de horas de trabalho necessárias, em cada tipo de trabalho, para outubro.

$$\begin{pmatrix} 1.300 & -- \\ 1.800 & -- \\ 1.240 & -- \end{pmatrix}$$

Mas, você pode estar se perguntando: como encontrar o total de horas de trabalho – elementos da coluna do mês de novembro?

Exatamente, utilizando o mesmo procedimento anterior.

$$\begin{pmatrix} 1.300 & (0,5 \text{ x } 1100 + 0,8 \text{ x } 850 + 0,4 \text{ x } 725) \\ 1.800 & (0,8 \text{ x } 1100 + 1,0 \text{ x } 850 + 0,5 \text{ x } 725) \\ 1.240 & (0,6 \text{ x } 1100 + 0,4 \text{ x } 850 + 0,5 \text{ x } 725) \end{pmatrix}$$

O processo que fizemos é chamado de **produto de matrizes** e, assim, encontramos as informações desejadas na matriz produto, que nos mostra o total de horas de cada tipo de trabalho por mês.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Outubro} & \text{Novembro} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Corte} \\ \text{Costura} \\ \text{Arremate} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.300 & 1.520 \\ 1.800 & 2.092,5 \\ 1.240 & 1.362,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Veja a seguir uma ilustração (descontextualizada) de como efetuar a multiplicação de uma matriz de ordem 2x3 por outra de ordem 3x3. Note que obtemos como resultado uma matriz de ordem 2x3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 5 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & \boxed{27} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Na multiplicação de matrizes, se uma matriz A tem dimensão mxn e uma matriz B tem dimensão nxr, então o produto AB será uma matriz de dimensão mxr.

Para encontrarmos o elemento da linha i e coluna j da matriz produto AB, é necessário encontrar a soma dos produtos dos elementos que se correspondem na linha i da matriz A e da coluna j da matriz B. Simbolicamente podemos representar por:

$$c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, b_{k\,j}$$

Embora esta notação pareça confusa, ela é simples e bem fácil de ser compreendida. Pois, em se tratando de matrizes, quando escrevemos uma letra – no caso a letra c – e dois índices logo abaixo – no caso i j –, estamos representando um elemento da matriz que se situa na linha i e coluna j. Neste caso, então, cada elemento da matriz produto é obtido, ou seja, é igual à somatória – representado pelo símbolo $\sum$ – dos produtos dos elementos correspondentes das duas outras matrizes que se situam na linha i coluna k da primeira matriz com os elementos da linha k e coluna j da segunda.

Assim, cada elemento da matriz produto é obtido desta soma de produtos.

$$C_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,k}b_{k,j}$$

Exemplo 4

Sejam as matrizes A e B. Calcule a matriz C formada pelo produto da matriz A por B (AB).

$$A_{4,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{3,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad AB = C_{4,2} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para entender melhor, veja os detalhes dos elementos da matriz produto e que operações devem ser realizadas para encontrar cada um destes:

- $\boldsymbol{C_{11}}$ – elemento da matriz produto localizado na primeira linha e primeira coluna;
- $\boldsymbol{C_{12}}$ – elemento da matriz produto localizado na primeira linha e segunda coluna;
- $\boldsymbol{C_{21}}$ – elemento da matriz produto localizado na segunda linha e primeira coluna;

$$C_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$$
$$C_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 4$$
$$C_{2,1} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8$$

E assim por diante...

Exemplo 5

Agora vamos multiplicar as matrizes que seguem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Antes de iniciar os cálculos, é importante lembrar de verificar se é mesmo possível multiplicar a matriz **A** pela matriz **B**. Como? Verifique as dimensões das duas matrizes.

$$\mathbf{C}_{3x2} = \mathbf{A}_{3x3}\ \mathbf{B}_{3x2}$$

Agora efetue o produto das duas matrizes em seu caderno de registro. E, em seguida, confira seu resultado.

Resolução

$$C = A\,.\,B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1+3.2 & 1.1+2.2+3.1 \\ 2.2+1.1+4.2 & 2.1+1.2+4.1 \\ 1.2+4.1+3.2 & 1.1+4.2+3.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 13 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

O produto de duas matrizes **não é comutativo**. Em outras palavras, para duas matrizes A e B, $AB \neq BA$ na maioria das situações.

Continuando com mais algumas Matrizes Especiais

- **Matriz Transposta**: quando permutamos as linhas e colunas de uma matriz, obtemos uma nova matriz, denominada matriz transposta. Veja o exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3x5} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5x3}$$

Logo, se A é uma matriz de ordem mxn, denomina-se **transposta** de A a matriz de ordem nxm obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas.

- **Matriz Inversa**: seja uma matriz quadrada A que possui *n* linhas e *n* colunas. Se existe uma matriz B quadrada de mesma ordem (nxn) tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (em que I_n é a matriz identidade de ordem nxn), então A e B são denominadas matriz inversa uma da outra. A inversa de uma matriz A é denotada por A^{-1}. (Note que $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$).

Mas, atenção: uma matriz A terá inversa se, e somente se, o det (A) ≠ 0.

A cada matriz quadrada podemos associar um número real denominado de **determinante da matriz**.

Você sabe o que é determinante de uma matriz?

Vamos ver juntos como se define o determinante de uma matriz de ordem 2x2, por exemplo. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. O determinante de A, denotado por det (A) ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, é definido por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemplo 6

Agora vamos calcular o determinante de $A = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 11 & 8 \end{vmatrix}$.

Resolução:

det (A) = (–5)(8) – (–7)(11)

det (A) = –40 – (–77)

det (A) = –40 + 77

Assim, temos que det (A) = 37

Assim como as operações inversas são úteis para solucionar equações, a matriz inversa será útil para solucionar alguns sistemas lineares de equações quando expressos por uma multiplicação de matrizes.

Introdução a Sistemas de Equações

Sistemas de Equações são frequentemente utilizados para modelar eventos que acontecem na vida diária e podem ser adequados para diferentes situações.

Sistema de equações é uma coleção de equações com as mesmas variáveis.

A solução de um sistema de duas equações lineares em x e y é todo par ordenado (x, y) que satisfaz ambas as equações. Veremos mais adiante que (x, y) também representa o ponto de interseção das retas que representam cada equação do sistema.

Uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é denominada equação linear.

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas; e
- b é o termo independente.

Caso o termo independente b seja igual a zero, a equação linear recebe a denominação de equação linear homôgenea.

Um **sistema linear de equações** pode ser expresso em forma matricial como um produto de matrizes. Por exemplo:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{32} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Perceba que a multiplicação das matrizes indicadas nos leva a obter um sistema.

Seja o sistema: $\begin{cases} 2x + 5y - 2z = 0 \\ 8x - 4y + 10z = -5 \\ 4x + y - 12z = 9 \end{cases}$

Ele pode ser representado por meio de matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 8 & -4 & 10 \\ 4 & 1 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7

Suponha que, como gerente do departamento de finanças de uma autarquia, você pretende investir R$ 50.000,00 colocando algum dinheiro em um investimento de baixo risco, com um pretenso ganho de 5% ao ano. Também pretende aplicar alguma quantia do dinheiro em um investimento de alto risco, com possibilidade de ganho de 14% ao ano. Com essas informações, quanto deve ser investido em cada tipo de aplicação para que se possa ganhar R$ 5.000,00 por ano?

Resolução:

Inicialmente, vamos "matematizar" as informações. Denomine x e y as quantias desconhecidas a serem investidas, assim:

- x a quantia a ser investida a 5%; e
- y a quantia a ser investida a 14%.

Logo, podemos obter um sistema linear para representar a situação.

$$\begin{cases} x + y = 50.000 \\ 0{,}05x + 0{,}14y = 5.000 \end{cases}$$

Observe que este sistema pode ser representado por uma equação com matrizes.

AX = B A → matriz coeficiente
X → matriz variável
B → matriz constante

Representemos o sistema por uma multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Observe que resolver uma equação matriz da forma AX = B é muito semelhante a resolver uma equação com números reais ax = b, com a ≠ 0.

Números Reais	Matrizes
$a.x = b$	$AX = B$
$\frac{1}{a}(a.x) = \frac{1}{a}.(b)$	$A^{-1}(A.X) = A^{-1}B$
$(\frac{a}{a}).x = \frac{b}{a}$	$(A^{-1}A).X = A^{-1}B$
$x = \frac{b}{a}$	$I.X = A^{-1}B$
	$X = A^{-1}B$

Agora vamos encontrar a matriz inversa. Mas, primeiramente, precisamos resolver a equação.

Resolução:

$$\begin{cases} x + y = 50.000 \\ 0{,}05x + 0{,}14y = 5.000 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Veja que precisaremos encontrar a matriz inversa de A, ou seja, A^{-1} e, mais ainda, é importante lembrar que o produto de uma matriz pela sua inversa resulta na matriz identidade, ou seja, $A \cdot A^{-1} = I$.

Vamos então encontrar a matriz inversa de A?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a + c) & (b + d) \\ (0{,}05a + 0{,}14c & (0{,}05b + 0{,}14d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes, poderemos encontrar os valores de a, b, c, d e, consequentemente, a matriz inversa. E, efetuando os cálculos, encontramos a matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{-100}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{100}{9} \end{pmatrix}$$

Ficaremos, então, com a seguinte equação de matrizes:

$X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{-100}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{100}{9} \end{pmatrix}}_{\boxed{A^{-1}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 50.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}}_{\boxed{B}}$$

Efetuando o produto das matrizes, encontramos a matriz resultante e, consequentemente, encontramos os valores x e y.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.222{,}22 \\ 27.777{,}78 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos afirmar que o valor a ser investido é R$ 22.222,22 a 5% e R$ 27.777,78 a 14% para que seja alcançada a meta de ganho de R$ 5.000,00 ao ano.

Você pode estar se perguntando: para solucionar sistemas lineares utilizamos sempre o mesmo método?

Não. Existem diferentes métodos para solucionar sistemas de equações lineares. Entre estes destacamos o **método de substituição**, que consiste em isolar uma variável de uma das equações e, por substituição, encontrar a solução.

Outro método muito prático é denominado de **método de escalonamento**, que consiste em fazer alterações nas equações do sistema de modo a obter um novo sistema equivalente ao primeiro e que seja mais conveniente para encontrar a solução.

Ainda podemos citar a **resolução gráfica**, que consiste em encontrar o ponto comum das representações das respectivas equações.

Vamos ver, com um pouco mais de detalhes, a resolução de um sistema pelo método de escalonamento. Preparado? Podemos continuar?

Este processo de resolução envolve a eliminação de incógnitas. Para escalonar um sistema, podemos usar os seguintes artifícios:

- trocar as posições de duas equações;
- mudar as incógnitas de posições;
- dividir uma das equações por um número real diferente de zero; e
- multiplicar uma equação por um número real e adicionar o resultado a outra equação.

Agora, acompanhe o exemplo proposto, a seguir, para verificar como tudo acontece.

Exemplo 8

Vamos resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

Resolução:

Basta trocar de posição a primeira equação com a segunda equação, de modo que o primeiro coeficiente de x seja igual a 1,

temos: $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

Para eliminarmos a incógnita x na segunda equação, precisamos multiplicar a primeira equação por (-2) e somar com a segunda equação. Observe com atenção esse procedimento conforme mostrado a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3\ (-2) \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Para eliminar a incógnita x na terceira equação, multiplica-se a primeira equação por (-3) e soma-se com a terceira equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3\ (-3) \\ \quad -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ \quad -7y - 3z = -2 \\ \quad -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Agora vamos eliminar a incógnita y na terceira equação. Para isso, basta multiplicar por (-1) a segunda equação e somar com a terceira equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ \quad -7y - 3z = -2\ \ (-1) \\ \quad -7y - 5z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ \quad -7y - 3z = -2 \\ \qquad\quad -2z = -6 \end{cases}$$

Então na 3ª equação teremos -2z = -6, que, multiplicando ambos os membros por (-1), resulta em 2z = 6. Simplificando, tem-se $z = \frac{6}{2} \rightarrow \ z = 3$.

Logo z = 3. E, substituindo o valor de z na segunda equação, $-7y - 3z = -2$ substitui a incógnita z pelo valor 3.

$-7y - 3(3) = -2 \Rightarrow -7y - 9 = -2 \Rightarrow -7y = -2 + 9 \Rightarrow$

$-7y = 7 \Rightarrow 7y = -7 \Rightarrow y = \frac{-7}{7} \Rightarrow y = -1$

Agora que temos valores de y e de z, podemos assim encontrar o valor da incógnita x. Basta substituirmos os valores de y e z na primeira equação:

Calculamos que $y = -1$ e $z = 3$.

$x + 2y + z = 3 \Rightarrow x + 2(-1) + 3 = 3 \Rightarrow x - 2 + 3 = 3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 \Rightarrow x = 2$

Logo, o conjunto solução do sistema será S = {x, y, z} = {2, –1, 3}.

Atividades de aprendizagem

Certifique-se que você entendeu como calcular o determinante fazendo a atividade proposta a seguir.

1. Seja $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. Calcule o determinante.

Dando continuidade aos nossos estudos, vamos ver como encontrar o determinante de uma matriz quadrada 3x3. Para tanto, considere a matriz genérica B de ordem 3 a seguir:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

O determinante é dado por:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

De uma maneira simples, o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser obtido pela regra denominada de regra de Sarrus, que resulta no seguinte cálculo:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

Para melhor compreendermos, suponha uma dada matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

det(A) = 3 . 1 . 4 + 2 . 3 . 2 + 5 . 4 . 3 - 2 . 4 . 4 - 2 . 4 . 4 - 3 . 3 . 3 - 5 . 1 . 2

det(A) = 12 + 12 + 60 – 32 – 27 – 10

det (A) = 15

Complementando....

Amplie seus conhecimentos buscando as leituras propostas a seguir:

- *Matemática básica para decisões administrativas* – de Fernando Cesar Marra e Silva e Mariângela Abrão. São Paulo: Editora Atlas, 2007.
- Sistemas lineares. Amplie seus conhecimentos navegando no *site* <http://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas.php>. Acesso em: 15 nov. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade vimos que as operações entre matrizes estiveram em evidência, assim como a compreensão sobre sistemas de equações lineares e sua aplicabilidade.

Diante do exposto, foi possível ampliar o seu conhecimento sobre matrizes, além de discutir sua aplicação para os administradores públicos.

Resposta da Atividade de aprendizagem

1. 17