UNIDADE 3

Funções

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Descrever e comentar possibilidades de associação de relações entre grandezas com o conceito de Função em contextos administrativos;
- Analisar gráficos de funções que envolvem relações entre variáveis de diferentes contextos, em especial, administrativos;
- Resolver problemas utilizando funções;
- Interpretar situações-problemas que envolvem funções; e
- Identificar diferentes tipos de funções e suas particularidades.

Relação – Variação – Conservação

Caro estudante,

Estamos iniciando a Unidade 3 de nossos estudos, na qual vamos conversar um pouquinho sobre a relação entre elementos de dois conjuntos. Lembre-se que estamos aqui para lhe auxiliar, por isso, em caso de dúvida, não hesite em conversar com o seu tutor.

Na Matemática, bem como em outras ciências, muitas vezes estabelecemos relações entre conjuntos. Comumente estamos estabelecendo relações entre grandezas variáveis. A variação é uma importante ideia matemática que pode ser explorada usando as ferramentas da álgebra.

A relação ocorre quando emparelhamos elementos entre dois conjuntos. Por exemplo, poderíamos pensar na seguinte relação: conjunto de pessoas do setor público o qual pertencemos e o conjunto dos diferentes salários do funcionário público. Ou, ainda, poderíamos estabelecer uma relação entre os funcionários que ocupam cargos de chefia da nossa instituição e o número de reuniões agendadas para um determinado mês. Perceba que cada funcionário que ocupa cargo de chefia poderia ter participado em mais de uma reunião agendada para um determinado mês, ou quem sabe não ter participado de reunião alguma. No outro exemplo temos que, em geral, a cada funcionário público, relacionamos um único e determinado salário.

Podemos formar pares ou emparelhar elementos para cada situação. Entretanto, as duas relações exemplificadas se diferenciam substancialmente.

No caso em que a relação apresentar a especificidade de que cada elemento do primeiro conjunto se relacionar a um único elemento correspondente no segundo, a relação será denominada de **função**.

Na maioria das vezes as **funções** envolvem conjuntos numéricos e alguma lei de formação que as regem.

Observe no exemplo apresentado na Tabela 1 a seguir, que relaciona o peso da correspondência com as tarifas praticadas pelo correio brasileiro para o envio de carta comercial e cartão-postal.

Tabela 1: Carta não comercial e cartão-postal – Nacional

Peso (em gramas)	Valor básico (em reais)
Até 20	0,27
Mais de 20 até 50	0,45
Mais de 50 até 100	0,70
Mais de 100 até 250	1,00
Mais de 250 até 500	2,00
Acima de 500 gramas serão aplicadas as mesmas condições de valor e prestação do Sedex.	

Fonte: Adaptado do *Site* dos Correios, maio de 2000

Essa tabela nos permite encontrar respostas a várias perguntas, tais como:

- Qual o valor a ser pago por uma carta que pesa 73 g?
- Qual o peso máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?
- É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo peso?
- É possível que duas cartas com pesos diferentes tenham a mesma tarifa?

Observe que, nesta relação, o peso da carta é a variável independente, e a tarifa, a variável dependente. Podemos notar, ainda, que a cada peso de carta a ser enviada corresponde uma única tarifa. A tarifa **depende** do peso da carta.

Para facilitar a visualização e compreensão do comportamento de um fenômeno em estudo, as relações ou funções geralmente são expressas em tabelas ou gráficos.

A relação que é denominada por função, portanto, tem algumas características especiais:

- a todos os valores da variável independente estão associados algum valor da variável dependente; e
- para um dado valor da variável independente está associado um **único** valor da variável dependente.

As relações que têm essas características são chamadas **funções**. Assim, podemos dizer que a tarifa postal é dada em **função** do peso da carta.

Em outras palavras, podemos dizer que uma **função** é uma relação entre dois conjuntos de variáveis de tal modo que, a cada valor do primeiro conjunto, associamos exatamente um valor do segundo conjunto.

Logo, dados dois conjuntos A e B não vazios e f uma relação de A em B. A relação **f** será uma **função** de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B.

Usualmente denominamos de x a variável independente, e y é a denominação utilizada para a variável dependente.

Nem toda relação pode ser considerada uma função. Acompanhe o exemplo: seja R o conjunto dos funcionários de um órgão público que constam da lista telefônica da cidade M. Seja T o conjunto de números de telefone dos residentes na cidade M que constam da lista telefônica.

Será que a relação que associa os elementos de R ao correspondente elemento em T é uma função?

Alguns funcionários têm mais de um número de telefone. Assim, a relação não é uma função.

Observe que uma equação pode representar uma função.

Por exemplo, a equação $y= 2x + 5$ representa uma função. A notação mais utilizada para expressar uma função é $f(x)$. Assim, teríamos $f(x) = 2x + 5$.

Mas, como vimos anteriormente, uma tabela também pode expressar uma relação que é uma função.

Notação

Diante da correspondência entre os valores de um conjunto (domínio) x e valores de outro conjunto y, que é uma função, dizemos que $y = f(x)$, e o par (x, y) pode ser escrito como $(x, f(x))$.

A notação $f(x)$ é lida como "f de x". O número representado por $f(x)$ é o valor da função f em x.

Vamos compreender melhor as **diferentes maneiras de expressar uma função**.

Saiba mais **Cupom Resposta Internacional**

O Cupom Resposta Internacional adquirido no exterior, além de poder ser trocado por selos (no valor equivalente a um documento prioritário de 20g para o país escolhido), também pode ser trocado por um aerograma internacional ou um envelope pré-franqueado Carta Mundial 20g. Fonte: <http://www.correios.com.br/servicos/precos_tarifas/internacionais/tarifas_inter.cfm>. Acesso em: 12 nov. 2009.

Por uma tabela

Aerograma Internacional	
	Vigência: 09/03/2007
Produtos Internacionais	Preços em Reais
Aerograma Internacional	R$ 1,70
Envelope Pré-franqueado Carta Mundial 20g	R$ 2,00
Envelope Pré-franqueado Carta Mundial 50g	R$ 3,70
Envelope Pré-franqueado Carta Mundial 100g	R$ 6,70
Cupom Resposta Internacional	R$ 5,00

A seguir, apresentamos outro exemplo de tabela que também representa uma função:

X (Número de Artigos)	Y (Custo Operacional Diário, em R$)
0	500
1	700
2	900
3	1.100
4	1.300

Por uma lei que rege a relação (por uma regra)

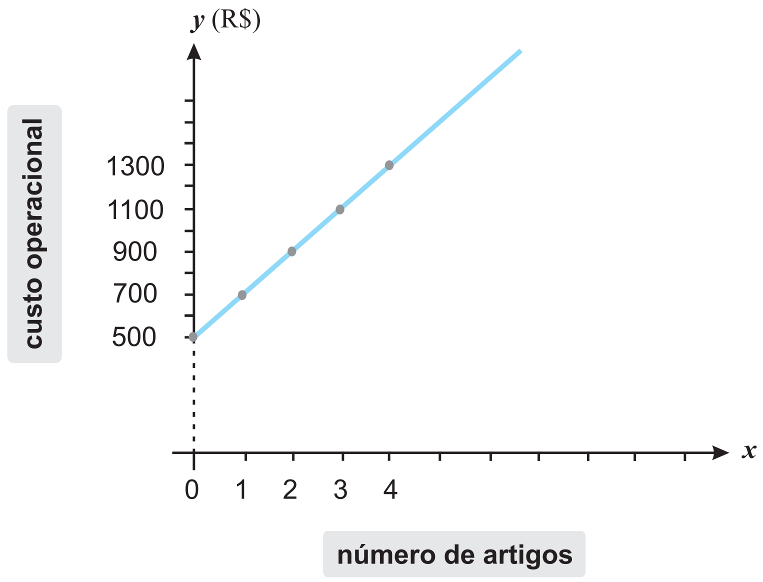
Para obter o custo operacional diário no exemplo exposto anteriormente na forma de tabela, para 0, 1, 2, 3 ou 4 unidades, multiplique o número de itens por 200 e adicione 500 ao resultado.

Por uma equação

Para obter o custo diário no exemplo anterior, temos $y = 200x + 500$, em que x é o número de artigos e y é o custo operacional diário.

Fique atento! Embora uma função possa ser representada por uma equação, nem toda equação representa uma função.

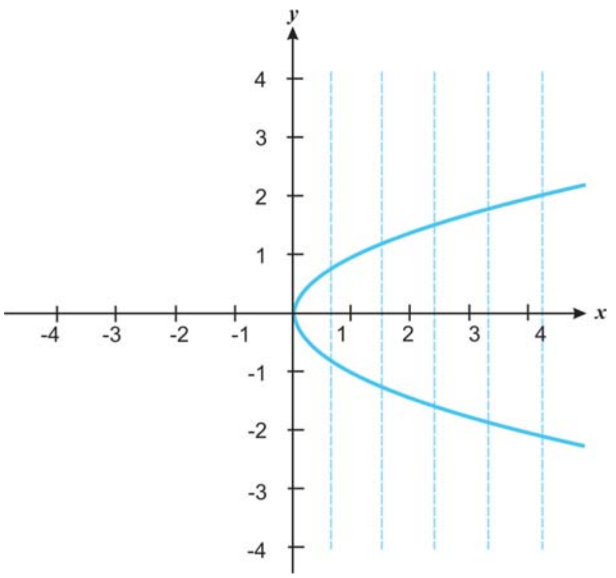
Por um gráfico



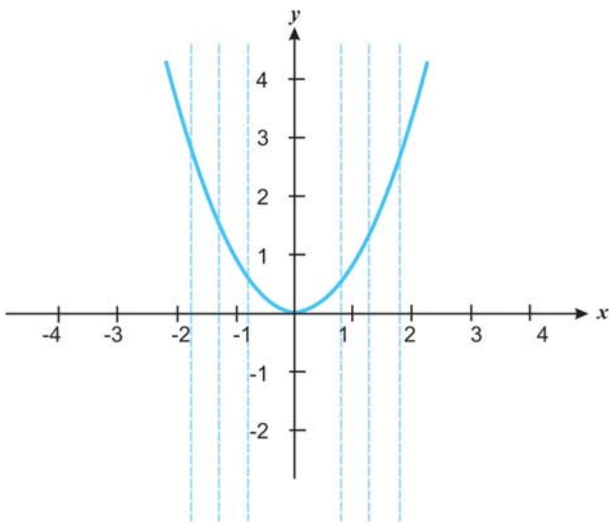
Observe que nem toda representação gráfica representa uma função!

Para rapidamente identificarmos se um gráfico é uma função, basta imaginarmos retas verticais, paralelas ao eixo das ordenadas "y", **passando pelos elementos do domínio**.

Se todas as retas que imaginarmos tocarem o gráfico em **apenas um ponto**, será uma função. Isto porque com este recurso identificamos que, para cada x (elemento do domínio), associa-se apenas um y (imagem de x).



A seguir veremos alguns gráficos para uma reflexão sobre o conceito de função.



Observe, no gráfico anterior, que a cada elemento x, existe mais de um correspondente *y*. As retas imaginadas (pontilhadas) tocam o gráfico mais de uma vez.

Observe que o gráfico anterior representa uma função. E veja que as retas imaginadas (pontilhadas) tocam o gráfico uma única vez.

Compreendeu o que vimos nesta seção? Buscando lhe auxiliar, preparamos uma breve síntese. Em caso de dúvida, faça uma releitura da seção e converse com seu tutor.

Uma relação entre duas grandezas variáveis em que cada valor da primeira variável se relaciona a exatamente um valor da segunda é chamada de **função**.

Nomeamos de **domínio da função** o conjunto de todos os possíveis valores da primeira variável (comporão o primeiro conjunto) e nomeamos de **imagem da função** o conjunto dos valores do segundo conjunto que corresponde a elementos do domínio.

Domínio da função é o conjunto de todos os valores que a variável independente poderá assumir. Imagem da função é o conjunto de todos os valores correspondentes da variável dependente.

Assim, podemos afirmar que uma função f com domínio A e imagens em B será denotada por f: $A \to B$ (função que associa a valores do conjunto A valores do conjunto B). Logo, $x \to y = f(x)$, e a cada elemento x de A, corresponde um único y de B.

O conjunto A é denominado **domínio da função**, indicado por D. O domínio da função, também denominado por campo de definição, ou campo de existência da função, identifica o conjunto do contexto envolvido, isto é, os valores possíveis para a variável x.

O conjunto B é denominado **contradomínio da função**, que pode ser indicado por CD. No contradomínio, encontram-se os elementos que podem ser os possíveis correspondentes dos elementos do domínio.

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y nomeamos de **imagem de x** pela função f. O conjunto de todos os valores de y que são imagens de valores de x forma o **conjunto imagem da função**, que indicaremos por Im. Note que o conjunto imagem da função é um subconjunto do contradomínio desta.

Exemplo 1

Dados os conjuntos A = {-1, 0, 1, 3} e B = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, qual o conjunto imagem da função f: $A \to B$ definida por:

$$f(x) = 2x + 1.$$

Resolução

Vamos determinar o valor correspondente de cada elemento do domínio (A):

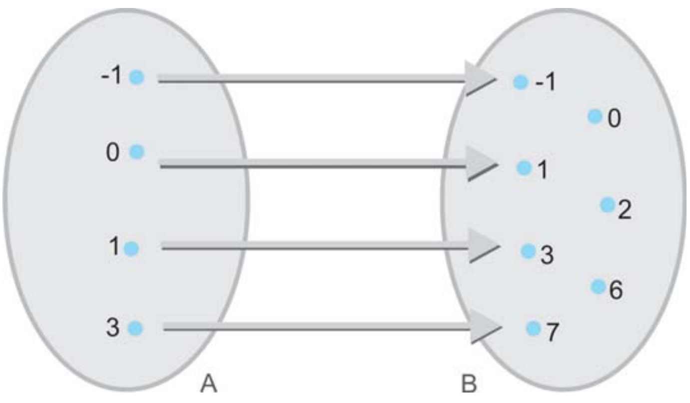
$f(-1) = 2\,(-1) + 1 = -1$

$f(0) = 2\,(0) + 1 = 1$

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$f(3) = 2(3) + 1 = 4$

Agora, observe o diagrama a seguir:



Im: {-1, 1, 3, 7}

f: A $\to$ B

$x \to y = \mathrm{f}\,(\mathrm{x})$

D = A, CD = B, Im = {$y \in$ CD | y é o elemento correspondente de algum valor de x}

Exemplo 2

Seja a função dada por $f(x) = \dfrac{x+4}{x-5}$, encontre seu domínio.

Resolução

Devemos sempre estar atentos para elementos de x em que possa existir dificuldade para encontrar a imagem y da função.

Com base na lei da função, teremos: $f(5) = \dfrac{5+4}{5-5} = \dfrac{7}{0}$, o que não é definido no conjunto dos números reais.

Portanto, nunca podemos considerar x = 5 no domínio dessa função.

Assim, $D = \{x \in R \mid x \neq 5\}$ e CD = R.

Ou seja, qualquer número real faz parte do domínio, exceto o 5.

Atividades de aprendizagem

Antes de prosseguirmos, vamos verificar se você entendeu tudo até aqui! Para sabermos, procure, então, atender às atividades a seguir.

1. Encontre o dominío das funções abaixo:

   a) $y = \dfrac{1}{x+5}$

   b) $y = 4x - 17$

   c) $y = \sqrt{x+9}$

   d) $y = x^2 + 99$

De acordo com nosso estudo, podemos afirmar que em muitas situações a função é apresentada pela sua lei de formação. Isto significa que nos é apresentada uma sentença ou equação que nos dá condições de encontrarmos a correspondência entre as variáveis.

Neste caso, convenciona-se que o **domínio** é o maior conjunto onde se pode definir a referida função.

Mas você sabe o que significa então encontrar o domínio de uma função quando se conhece a sua lei de formação?

Significa que teremos de encontrar o maior conjunto, isto é, o conjunto cujos elementos são todos os possíveis valores x para os quais existe um único *y* em correspondência.

E o que é necessário para esboçar o gráfico de uma função?

Nem sempre temos à mão recursos como programas de computadores e calculadoras científicas para construção de um gráfico; portanto, conhecermos alguns pontos especiais desta representação nos possibilita encontrarmos uma boa aproximação do gráfico da função.

E lembre-se: nesta representação é importante identificarmos os pontos em que o gráfico intercepta os eixos. Sempre considerando que:

- Os pontos sobre o eixo das abscissas são do tipo $(x,0)$, isto é, $y = 0$; e
- Os pontos sobre o eixo das ordenadas são do tipo $(0,y)$, isto é, $x = 0$.

Vale lembrarmos, ainda, que os valores de x em que $f(x) = 0$ (ou seja, $y = 0$) são chamados de **zeros**, **ou raízes da função**.

Exemplo 3

Vamos representar graficamente a função $\mathbf{y = x + 2}$, ou seja, $\mathbf{f(x) = x + 2}$.

- **1° passo**: atribuindo valores a x (por exemplo: -3, -2, -1, 0, 1, 2), encontraremos a respectiva imagem. Claro que poderíamos atribuir a x alguns valores fracionários, mas para facilitar a construção do gráfico atribuímos valores mais convenientes, ou seja, atribuiremos alguns valores inteiros. Assim, temos:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3	4

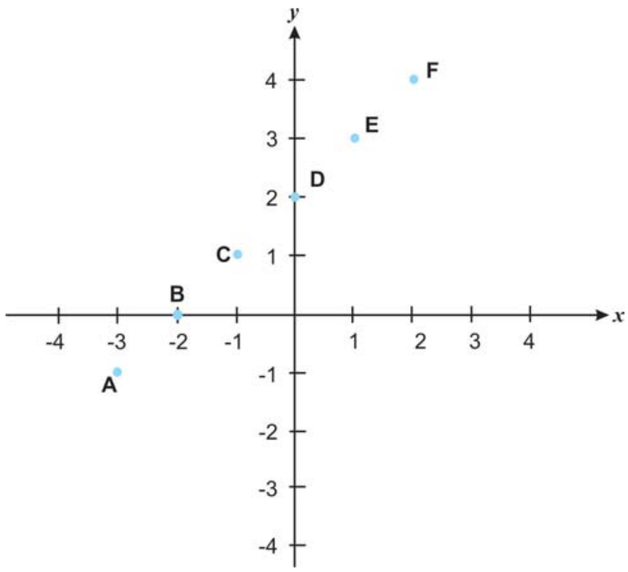
Também podemos dispor a tabela na vertical:

X	Y
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

Assim, temos os pares ordenados (-3, -1); (-2, 0); (-1, 1); (0, 2); (1, 3); (2, 4).

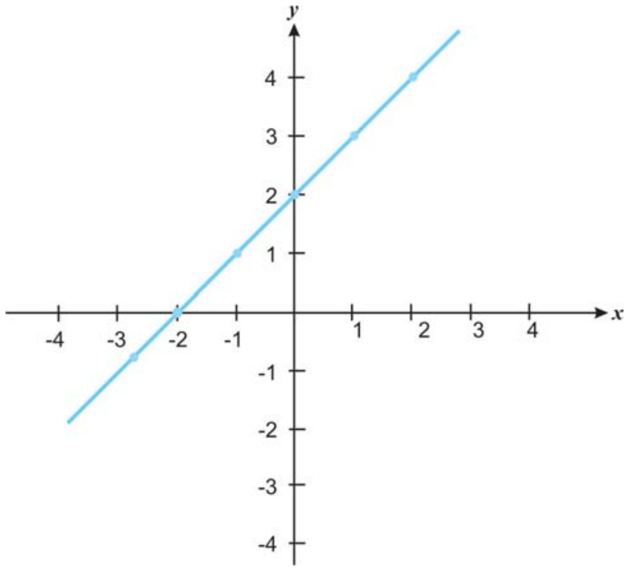
- **2° passo**: agora vamos representar os pares ordenados, encontrados na tabela anterior, por pontos no plano cartesiano.

  A (-3, -1); B (-2, 0); C (-1, 1); D (0, 2); E (1, 3); f (2, 4).



Dependendo do contexto que representa a função, os pontos não poderão ser ligados, como veremos mais adiante.

- **3°passo**: trace o esboço do gráfico ligando os pontos encontrados e que satisfazem a lei $y = x + 2$. Perceba que é uma reta:



Diante do exposto podemos afirmar que existem vários termos relacionados a função. Observe a Figura 1:

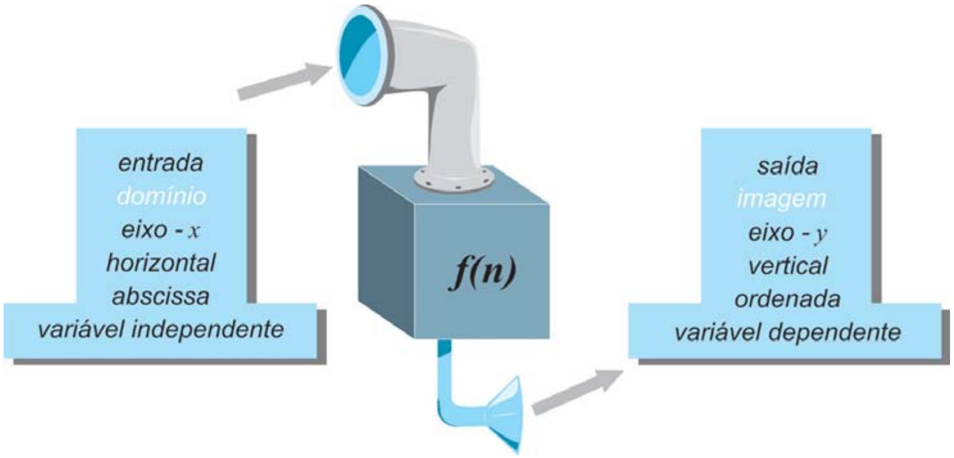
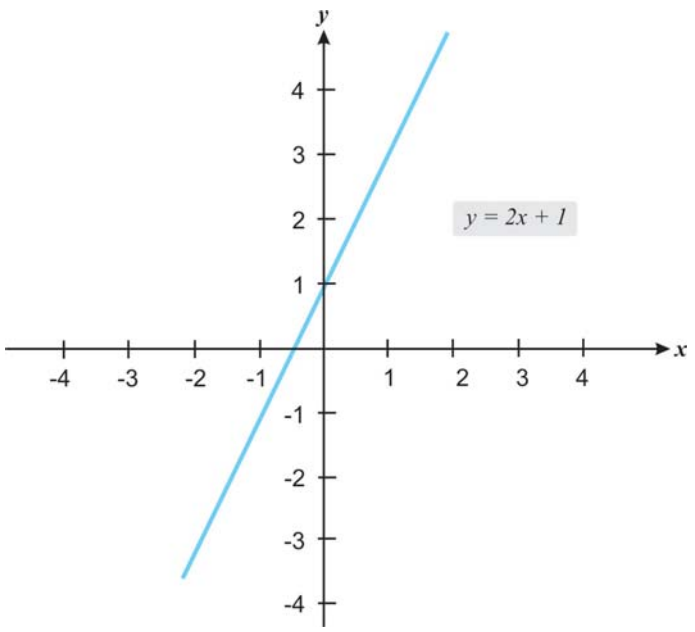


Figura 1: Termos relacionados a função
Fonte: Elaborado pela autora

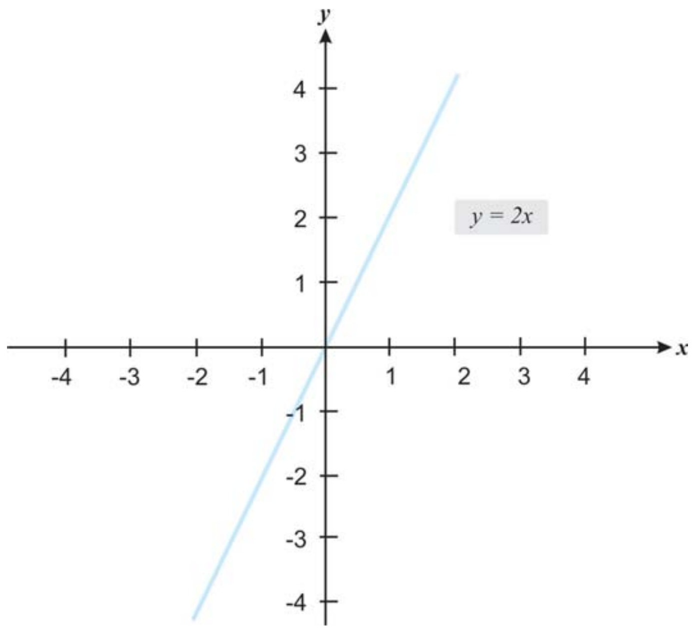
Funções Especiais

Algumas funções recebem nomes especiais que variam de acordo com seu comportamento.

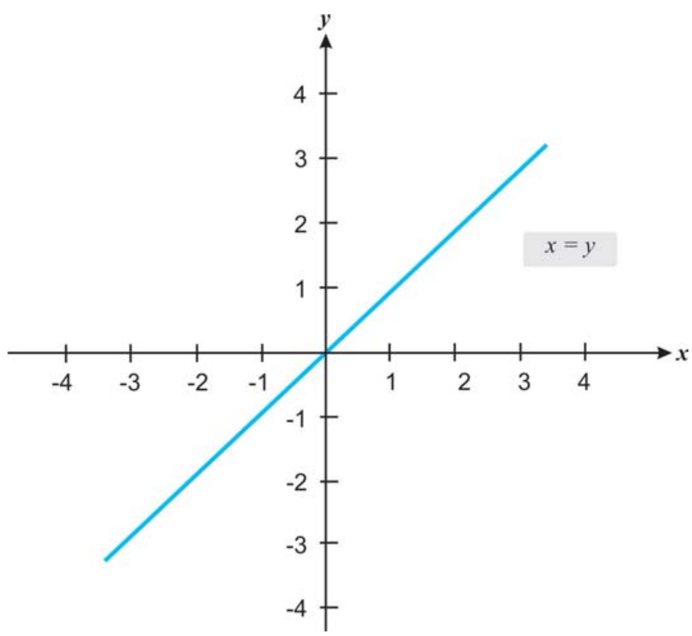
- A função definida por uma equação da forma: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ é chamada de **função polinomial**. A representação gráfica da função polinomial de grau zero ou de grau um é uma reta.
- A função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0; b \neq 0)$ recebe o nome de **função afim**. Tomando como exemplo a função $f(x) = 2x + 1$, então $a = 2$ e $b = 1$. Veja a seguir a representação gráfica.



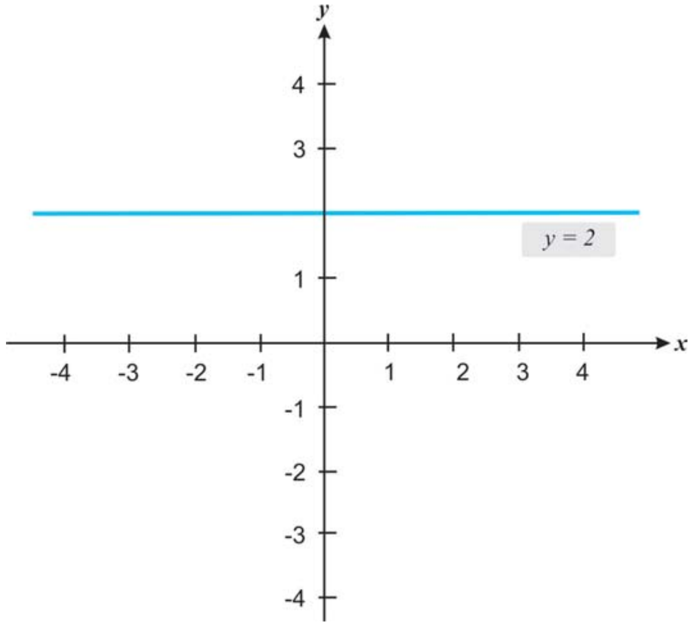
- A função f(x) = ax é denominada **função linear**. Por exemplo, f(x) = 2x (a=2).



- A função f(x) = x é denominada **função identidade**. A função identidade associa um valor do domínio x com o mesmo valor na imagem.

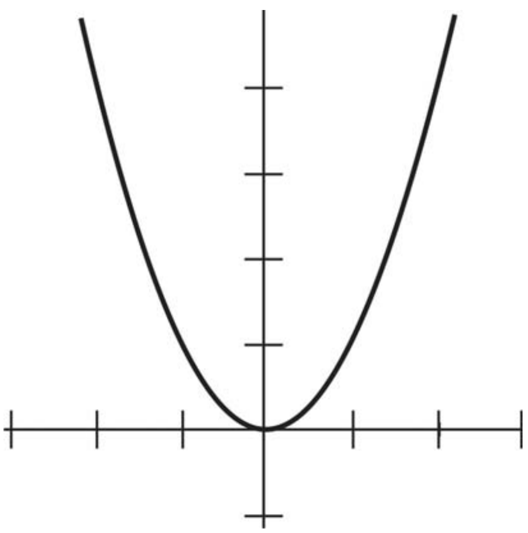


▶ A função $f(x) = k$ recebe o nome de **função constante**. Por exemplo, $f(x) = 2$.



Observe que a função constante associa a cada valor x um mesmo valor na imagem, que neste exemplo é o 2.

▶ A função polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ recebe o nome de **função quadrática**, e sua representação gráfica é uma curva denominada **parábola**. Veja abaixo a representação gráfica de $f(x) = x^2$.



É importante destacarmos ainda que:

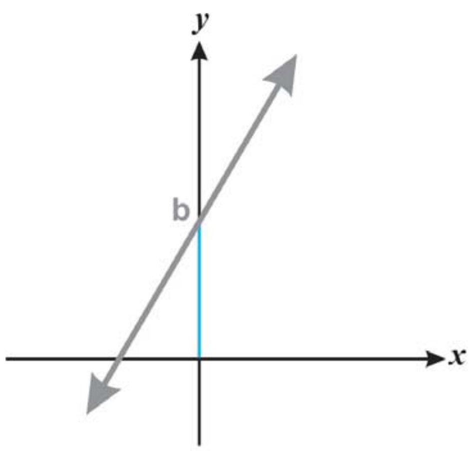
- A representação gráfica das funções polinomiais: afim, linear, identidade e constante é uma reta.
- Podemos pensar que a função linear $f(x) = ax$ e a função identidade $f(x) = x$ são casos particulares da função afim $f(x) = ax + b$.

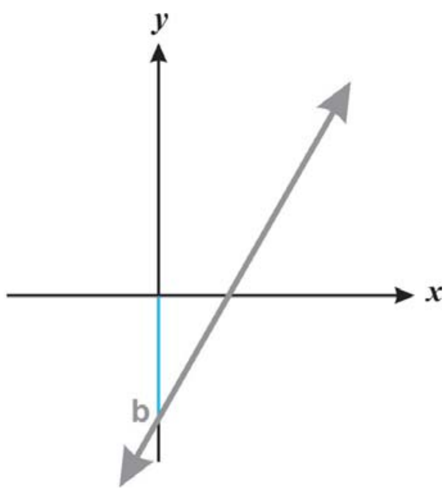
Significado dos coeficientes a e b da função $f(x) = ax + b$

A imagem do zero é b, isto é, o gráfico contém o ponto (0, b), que é o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas.

$$\boxed{f(0) = a\,(0) + b, \text{ ou seja, } f\,(0) = b}$$

Logo, o coeficiente b é chamado coeficiente linear, e representa a ordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas.



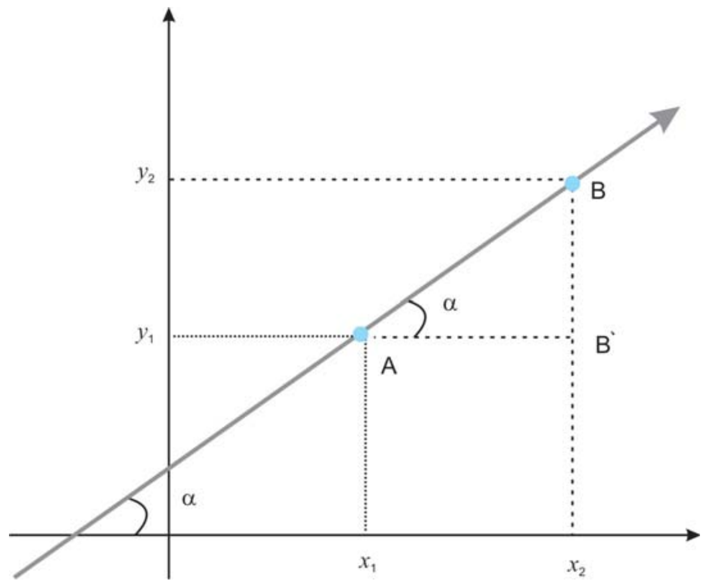


Agora vamos compreender o significado do coeficiente **a** na função $y = ax + b$. Para tanto, tomemos dois pontos A e B pertencentes ao gráfico da função, isto é, as coordenadas dos pontos satisfazem a lei da função.

$A\ (x_1,y_1)$ e $B\ (x_2, y_2)$

$y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$

Logo, $y_1 = ax_1 + b(1)$ e $y_2 = ax_2 + b(2)$. Para entender melhor, observe atentamente a ilustração gráfica a seguir:



Observe os pontos $A\ (x_1,y_1)$ e $B\ (x_2, y_2)$ da ilustração gráfica e perceba a formação do triângulo retângulo. Lembre-se que a tangente do ângulo é obtida pela razão entre os catetos.

$$\textit{tangente de um ângulo} = \frac{\textit{cateto oposto ao ângulo}}{\textit{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Assim, $tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (também conhecido como quociente da diferença)

Subtraindo as equações (1) e (2),

$y_1 = ax_1 + b \quad (1)$

$y_2 = ax_2 + b \quad (2)$

$$y_2 - y_1 = ay_2 + \cancel{b} - ax_2 - \cancel{b}$$

$$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1) \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \begin{matrix} \rightarrow \boxed{BB'} \\ \rightarrow \boxed{AB'} \end{matrix}$$

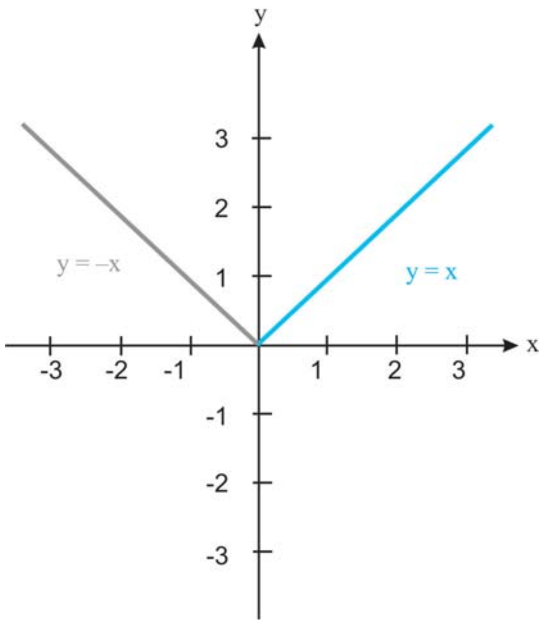
Perceba que o coeficiente **a** é igual à tangente de α e, portanto, só depende do ângulo α. Veja também que α é responsável pela inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (eixo x) e, assim, **a** é denominado coeficiente angular.

Nomenclaturas Especiais

Vamos dar continuidade aos nomes especiais de funções e aos respectivos comportamentos quando ilustrados graficamente. Respire fundo e se concentre para obter a compreensão que almejamos!

A função que associa cada valor de x ao módulo de x, isto é, f(x) = |x|, recebe o nome de **função módulo,** ou **função valor absoluto**. Portanto, pela definição de módulo teremos para todo x real:

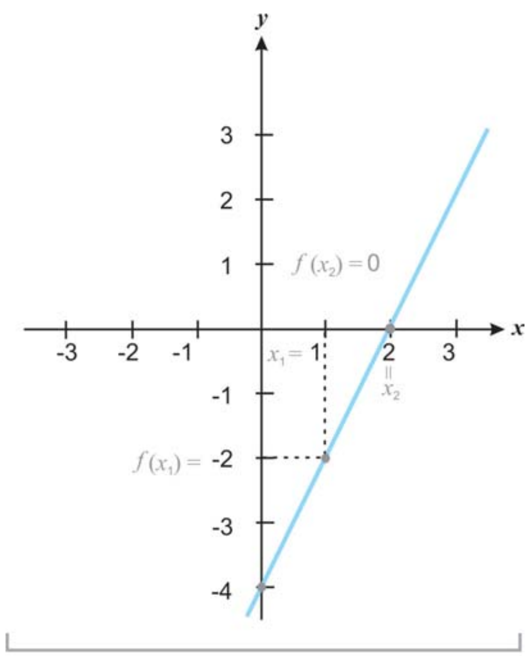
$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$



Ainda sobre comportamentos de função, é importante destacarmos que, muitas vezes, as funções assumem comportamentos diferentes em intervalos do domínio. Assim, dependendo do comportamento em um intervalo do domínio I, poderemos classificar a função em **crescente** ou **decrescente**.

A função *f* é **crescente** em um intervalo *I* se, para quaisquer que sejam x_1 e x_2 de I com $x_1 < x_2$, obtiver em correspondência $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, podemos dizer que a função é crescente em um determinado intervalo do domínio quando, ao tomarmos valores maiores de x, tivermos em correspondência valores maiores em *y*.

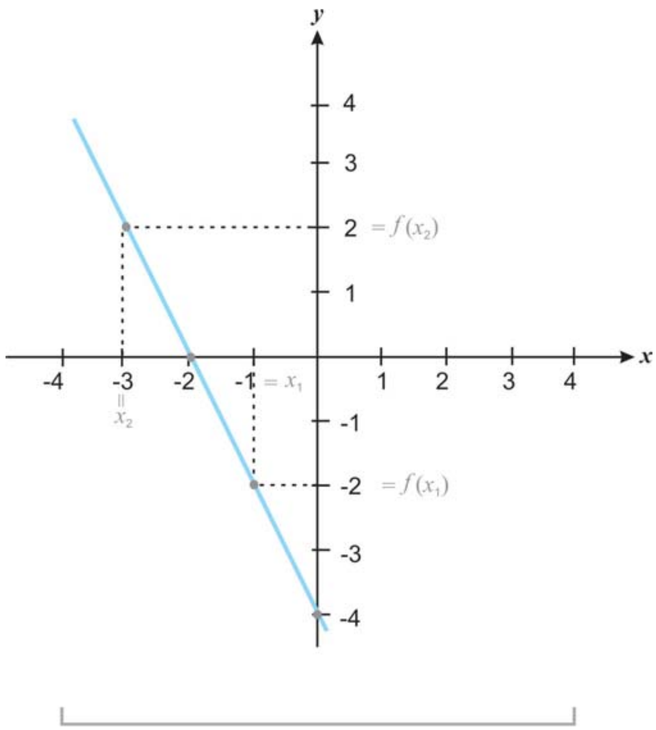
Por exemplo, suponha uma função $y = 2x - 4$, ou seja, $f(x) = 2x - 4$. Note que para $x_1 = 1$ temos $f(x_1) = -2$; para $x_2 = 2$ temos $f(x_2) = 0$. Para entender melhor, observe a representação gráfica a seguir:



Veja que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$

A função f é **decrescente** em um intervalo *I* se, para quaisquer que sejam x_1 e x_2 de I com $x_1 < x_2$, obtiver em correspondência $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras palavras, dizemos que a função é decrescente em um determinado intervalo do domínio quando, ao tomarmos valores maiores de x, tivermos em correspondência valores menores em *y*.

Então, suponha a função $y = -2x - 4$, ou seja, $f(x) = -2x - 4$, sendo que para $x_1 = -1$, temos $f(x_1) = -2$; para $x_2 = -3$, temos $f(x_2) = 2$.



Veja que $x_1 > x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$

A esta altura da nossa conversa, começamos a perceber que as relações entre variáveis expressas, seja em tabelas, ilustração gráfica ou mesmo por meio de uma equação, podem caracterizar uma função e nos revelam importantes informações.

Interpretação Gráfica

Nesta seção vamos conversar sobre o crescimento e decrescimento de uma função quadrática. Relaxe um pouco para que possamos continuar.

Preparado?

O vértice da parábola que representa uma função quadrática evidencia também os intervalos nos quais a função é crescente e nos quais ela é decrescente.

As coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ são dadas por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Para você compreender melhor, vamos observar o que ocorre, por exemplo, com a função $y = x^2 - 2x - 3$.

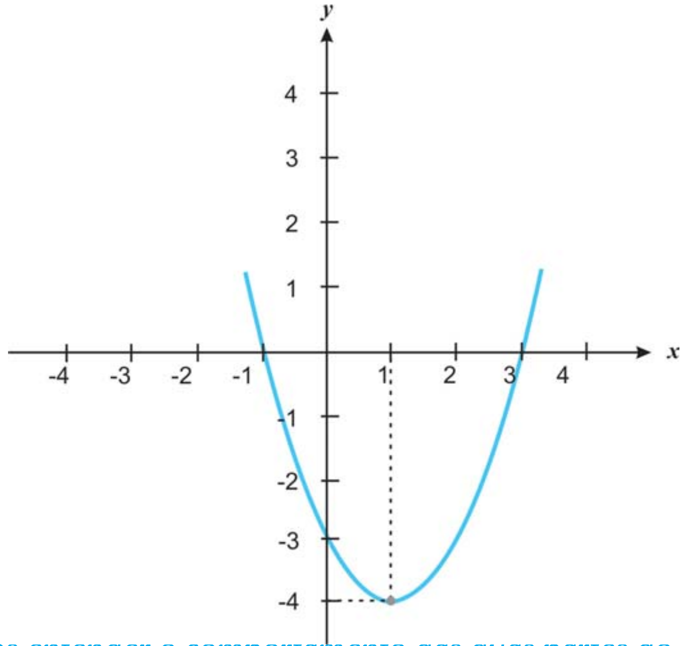
$a = 1 > 0 \rightarrow$ concavidade para cima

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16 > 0 \rightarrow$ dois zeros reais distintos

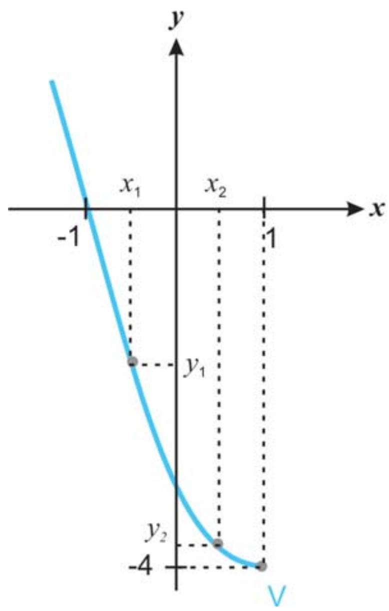
$$\left.\begin{array}{l} x_v = -b/2a = 2/2 = 1 \text{ é o ponto de mínimo} \\ y_v = -\Delta/4a = -16/\ 4 = -4 \text{ é o valor de mínimo} \end{array}\right\} V(1, -4)$$

Podemos representar graficamente por:



Vamos entender o comportamento das duas partes do gráfico?

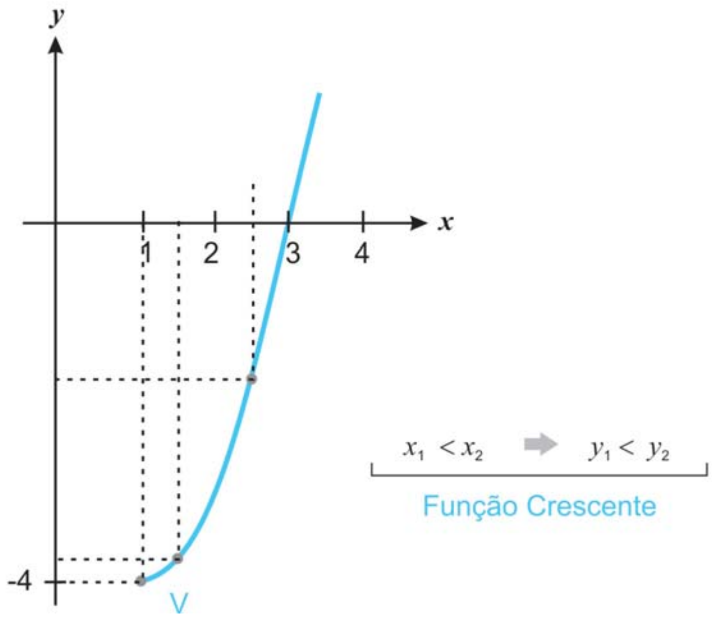
Para os valores reais de x menores que a abscissa do vértice, ou seja, $x \leq x_V$, teremos:



$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$

Função Decrescente

Para os valores reais de x tais que $x \geq x_V$, vejamos o que acontece ficando atentos ao gráfico que representa estes pontos da função:



Diante do exposto, podemos notar que o vértice determina a mudança de comportamento dessa função. Logo:

- $f(x)$ é decrescente para $\{x \in R \mid x \leq 1\}$.
- $f(x)$ é crescente para $\{x \in R \mid x \geq 1\}$.

Exemplo 4

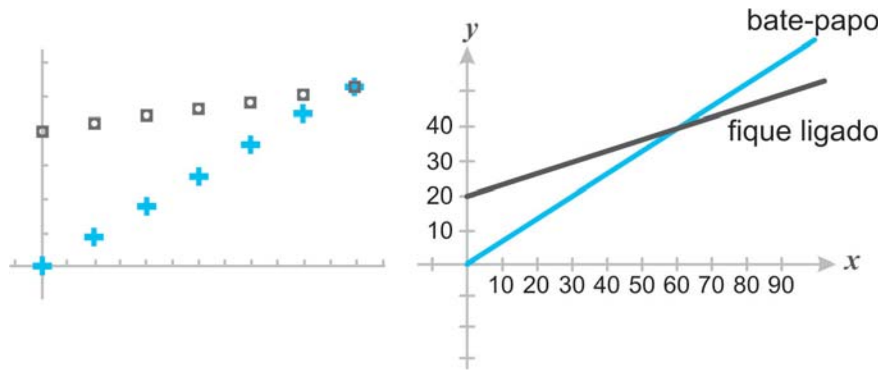
Imagine que, no setor público onde você trabalha, seu coordenador queira oferecer celulares para toda a equipe. Para tanto, ele pede para que você busque algumas companhias telefônicas recém-ingressantes no mercado de telefonia e avalie qual seria a melhor escolha. Imagine que as informações, a seguir, sejam divulgadas na propaganda com o preço em moeda americana (dólar):

- Empresa Fique Ligado oferece serviço de telefonia por uma taxa mensal de $ 20,00 mais $ 0,10 por cada minuto usado.

- Empresa Bate-papo não cobra taxa básica mensal, mas cobra \$ 0,45 por minuto.

Foi informado, também, que ambas as companhias têm uma tecnologia que permite cobrar pelo tempo exato utilizado.

Contudo, seu coordenador havia solicitado a outro funcionário que começasse a avaliar as possibilidades e, assim, você recebe a tabela e os gráficos apresentados a seguir.



Minutos	0	10	20	30	40	50	60
Fique Ligado	\$ 20,00	\$ 21,00	\$ 22,00	\$ 23,00	\$ 24,00	\$ 25,00	\$ 26,00
Bate-papo	\$ 0,00	\$ 4,50	\$ 9,00	\$ 13,50	\$ 18,00	\$ 22,50	\$ 27,00

E então seu coordenador levanta vários questionamentos sobre a situação:

a) Quanto cobraria cada companhia por 25 minutos? E por 100 minutos?

b) Seria legítimo unirmos os pontos do gráfico?

c) Por que apenas uma das representações gráficas inclui a origem (0,0)?

d) Como encontrar o custo para qualquer quantidade de minutos para cada companhia?

Resolução

Reflita e anote sua resposta antes de continuar. Teste você mesmo! Depois confira.

Por 25 minutos
- a companhia Fique Ligado cobraria \$ 22,50.
- a companhia Bate-papo cobraria \$ 11,25.

Por 100 minutos
- a companhia Fique Ligado cobraria \$ 30,00.
- a companhia Bate-papo cobraria \$ 45,00.

Supondo que a companhia calcule qualquer quantidade de minutos fracionários para sua cobrança, seria legítimo unirmos os pontos do gráfico considerando-se que cada custo da ligação de uma companhia corresponde a uma única quantidade de minutos?

Um gráfico contém a origem (0,0) e outro não, pois mesmo que o cliente da companhia Fique Ligado não utilize o serviço de ligação, pagará uma taxa básica mensal de \$ 20,00. Já na companhia Bate-papo o cliente não paga uma taxa básica mensal.

Encontramos o custo para qualquer quantidade de minutos em cada companhia substituindo a quantidade desejada nas seguintes equações:

- $y = 20{,}00 + 0{,}10x$ (Fique Ligado)
- $y = 0{,}45x$ (Bate-papo)

Fazendo y representar o custo em \$ (dólar) e x representar a quantidade em minutos.

A partir dessa situação, podemos delimitar outras perguntas, tais como:

e) Será que podemos então dizer que em qualquer momento que se fale ao telefone por um minuto se paga \$ 0,10 a mais (ou \$ 0,45 a mais)?

f) Qual companhia seria mais econômica se não se pretende demorar muito em cada ligação?

g) Caso uma pessoa não queira gastar mais de \$ 50,00 por mês, mas almeja falar o máximo possível, qual seria a melhor escolha?

Mais uma vez alertamos para que reflita e anote sua resposta antes de continuar. Teste você mesmo!

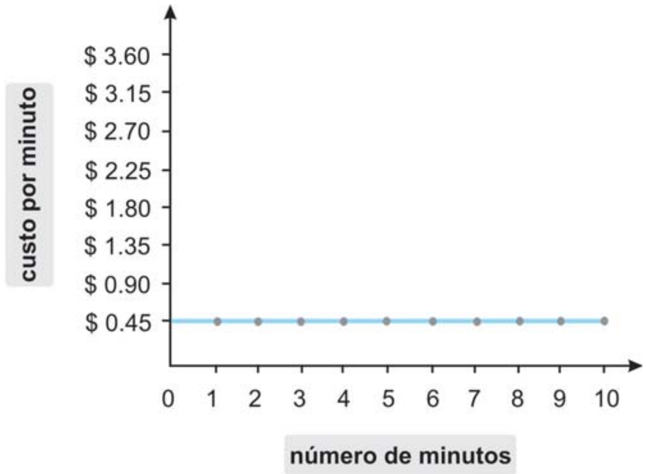
Resolução

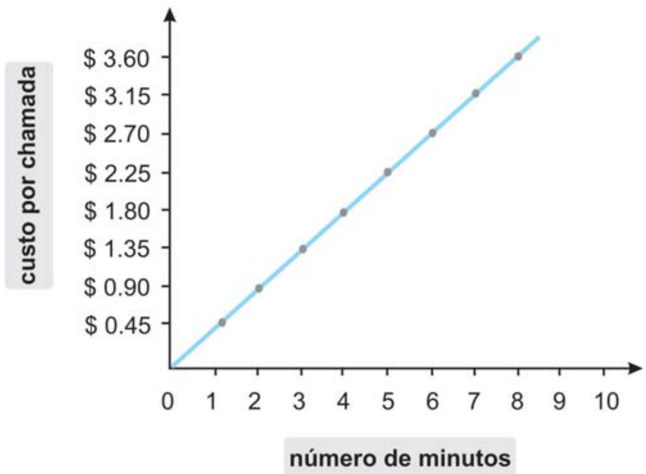
e) Sim, podemos dizer que, em qualquer momento que se fale ao telefone por um minuto, se paga \$ 0,10 a mais (ou \$ 0,45).

f) Se não se pretende fazer uso do telefone com frequência, a companhia Bate-papo é mais econômica.

g) Caso uma pessoa não queira gastar mais de \$ 50,00 por mês, a melhor escolha é a companhia Fique Ligado.

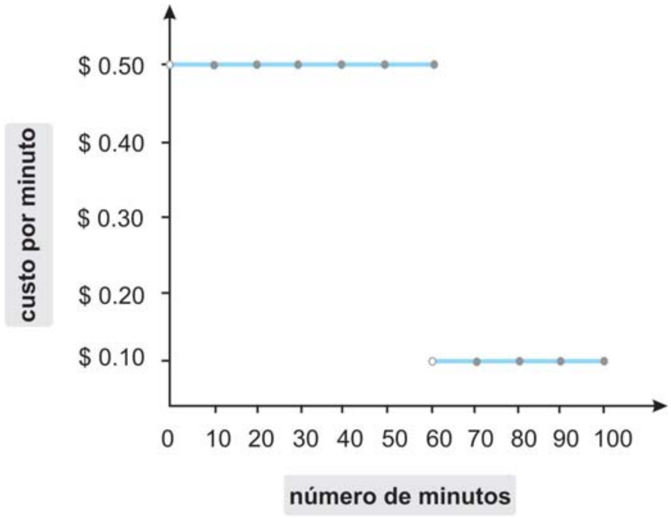
Podemos relacionar todas essas informações de diferentes maneiras. Como exemplo, a apresentação a seguir da empresa Bate-Papo:

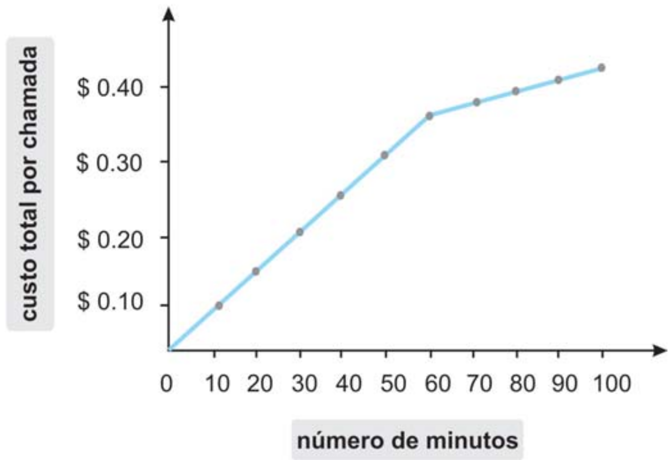




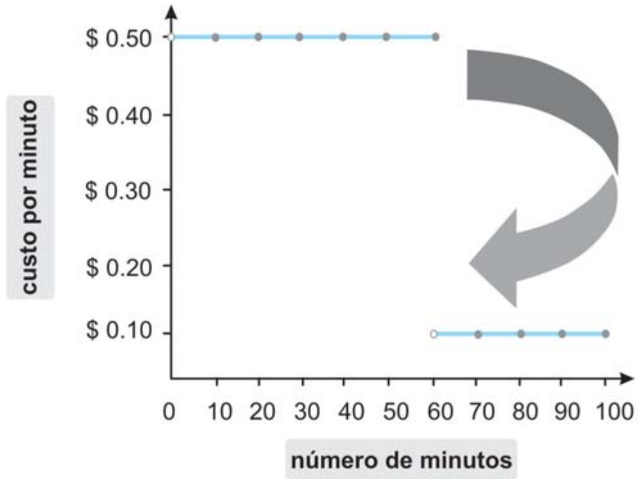
Agora, imagine que você descubra outra companhia, Tempo Rápido – que faz propaganda para o uso mensal de telefone celular por $ 0,50 o minuto para os primeiros 60 minutos e somente $ 0,10 o minuto por cada minuto depois de decorrido esse tempo –, e assim também comece a avaliar sua proposta. Considere que a propaganda informa que a Tempo Rápido também cobra pelo tempo exato utilizado.

Vamos observar algumas maneiras de relacionar as informações da companhia Tempo Rápido por meio de gráficos.



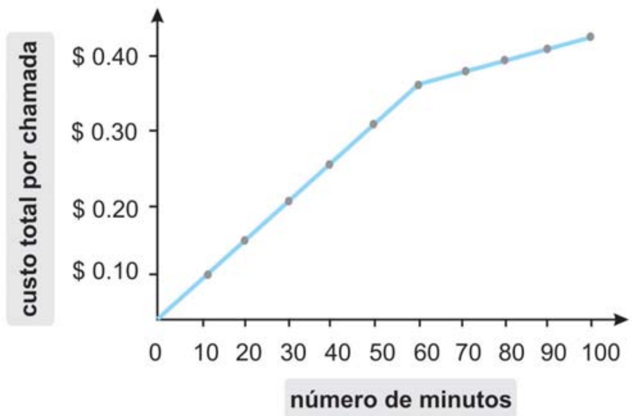


O salto se justifica porque, depois de 60 minutos de ligação, o custo da ligação por minuto falado fica mais barato. Observe algumas possíveis representações das relações entre as grandezas contidas nas informações da companhia Tempo Rápido e os questionamentos que surgem.



Note que, para cada minuto falado, se associa um valor a pagar. Como você explicaria esse salto na representação gráfica?

O salto se justifica porque, depois de 60 minutos de ligação, o custo por minuto falado fica mais barato.



Note que, à medida que conversamos ao telefone, o preço a pagar aumenta, mas o aumento varia... Como você percebe isso observando o gráfico? Em que parte a variação é maior?

Observando o gráfico notamos que, a partir de 60 minutos ocorre uma variação de custo na quantidade de minutos falados. Graficamente podemos visualizar que de 0 a 60 minutos a variação é maior.

Observando o gráfico podemos notar que, a partir de 60 minutos, ocorre uma variação de custo na quantidade de minutos falados. Graficamente podemos visualizar que de 0 a 60 minutos a variação é maior. Perceba que o custo a pagar à companhia telefônica **depende** do tempo de conversa ao telefone. Em outras palavras, podemos dizer que o custo a pagar está em **função** do tempo de conversa.

Diferentes nomenclaturas

Algumas funções recebem nomes especiais de acordo com o contexto ao qual se relacionam.

3 Funções racionais

As funções racionais são expressas pela forma:

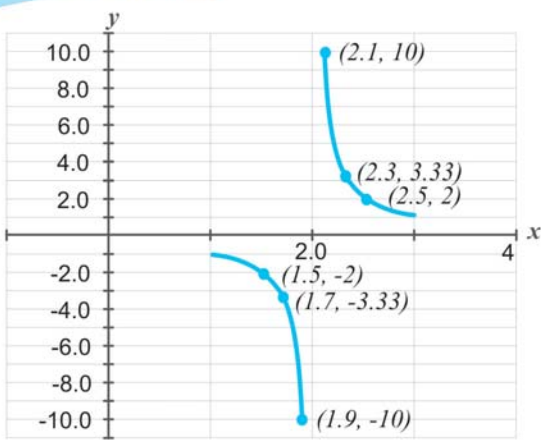
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, em que f(x) e g(x) são funções polinomiais.

Para entender melhor, vejamos a função racional expressa por: $y = \dfrac{1}{x-2}$

Agora, observe, na demonstração a seguir, os valores que f(x) assume ao variarmos o valor de x.

Note que $x = 2$ não pertence ao domínio da função

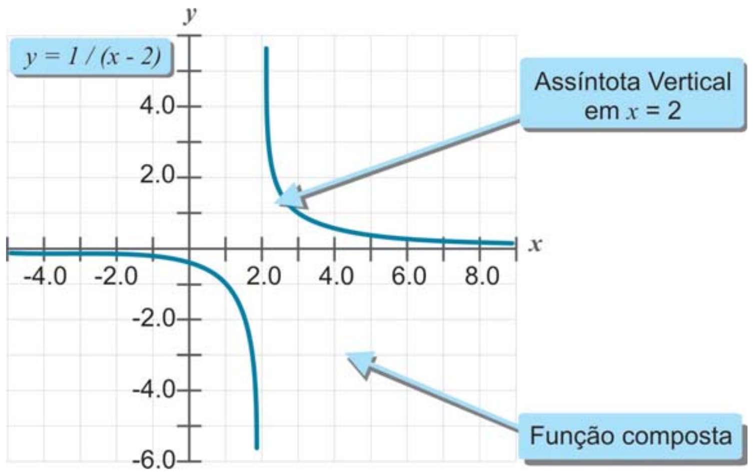
x	$y = \frac{1}{x-2}$
1.5	-2
1.7	-3.33
1.9	-10
2.0	Indefinido
2.1	10
2.3	3.33
2.5	2



Perceba que o gráfico se torna cada vez mais próximo da reta que representa os pontos em que x = 2. Esta reta recebe a denominação de assíntota vertical do gráfico. Observe também que, à medida que os valores de x se tornam muito grandes ou muito

Mais adiante no livro, conversaremos com mais detalhes sobre gráfico de funções que possuem assíntotas.

pequenos, os pontos gráficos se aproximam da reta $y = 0$. A reta $y = 0$ é denominada por assíntota horizontal. Por fim, vemos que a reta em que $y = 0$ coincide com o eixo das abscissas – eixo x.



Função composta

Para identificá-la, suponha uma dada uma função f definida de A em B e uma dada função g definida de B em C. Denominamos então a função composta de g com f a função h, definida de A em C, tal que $h(x) = g(f(x))$ para todo x pertencente a A.

Logo, a função composta de *g* e *f* é indicada por gof (x) (lê-se: g bola f), em que gof (x) = g(f(x)).

Exemplo 5

Dadas as funções de domínio real $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x + 1$, determine valores de x para que tenhamos $f(g(x)) = 0$.

Resolução

$g(x) = x + 1$, temos que $f(g(x)) = f(x + 1)$

Logo, $f(x + 1) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6$

$x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 6 = x^2 - 3x + 2$

Assim, $f(g(x)) = x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

Por fim, temos x = 1 ou x = 2.

Exemplo 6

Sejam as funções reais f e g definidas respectivamente por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$. Determine:

a) $f(g(x))$ e $g(f(x))$; e

b) os valores de x para que se tenha $f(g(x)) = g(f(x))$.

Resolução:

a) $f(g(x)) = f(2x^2 - 3) = 2x^2 - 3 + 1$

$f(g(x)) = 2x^2 - 2$

$g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1)^2 - 3 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3$

$g(f(x)) = 2x^2 + 4x - 1$

b) $f(g(x))=g(f(x))$

$2x^2 - 2 = 2x^2 + 4x - 1$

$4x = -1 \Rightarrow x = -1/4$

Função Custo

Pense em x como a quantidade produzida de um produto. Verificamos que em geral existem alguns custos que não dependem da quantidade produzida, por exemplo: aluguel, seguro etc.

Quando os custos não dependem da quantidade produzida, costumam ser denominados de custo fixo (C_f). A parcela do custo que depende de x chamamos de custo variável (C_v).

O Custo total (C_t) pode ser expresso por:

$$\boxed{C_t(x) = C_f + C_v}$$

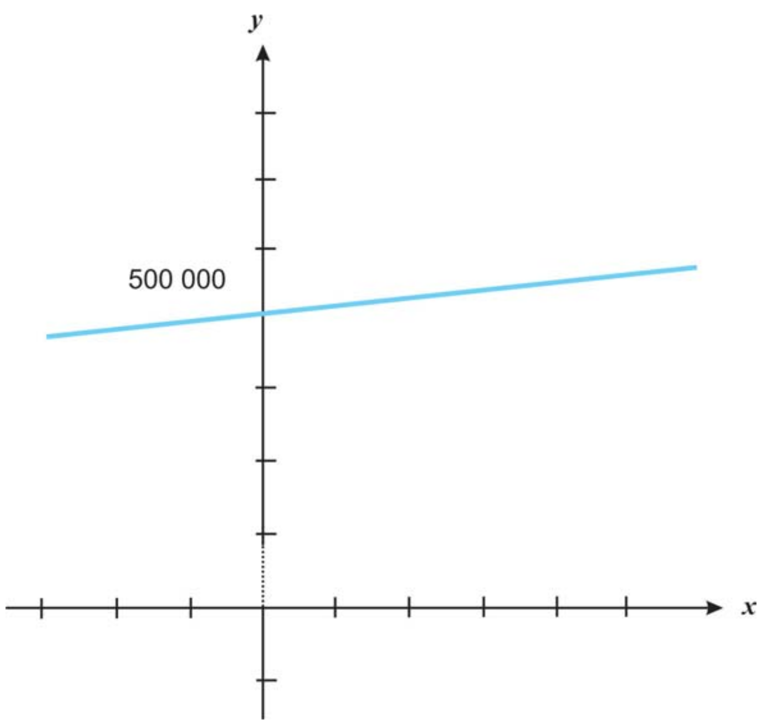
Exemplo 7

Suponhamos que o custo fixo de fabricação de um produto seja de 500.000 u.m. (unidade monetária) e o custo variável por unidade, 10.000 u.m.

Resolução

$C_t\ (x) = 500.000 + 10.000x$ (função afim)

Graficamente podemos representar por:



Note que, para um produto indivisível (rádios, carros, etc.), os valores de x poderiam ser: 0, 1, 2,... n. E, caso o produto fosse divisível (exemplo: toneladas de aço), os valores de x variariam nos reais não negativos.

As representações gráficas, em ambas as situações, serão pontos alinhados, porém, no caso de o produto ser indivisível, não seria possível unir os pontos obtendo linha contínua.

Em geral, quando nada é dito, admitimos o produto em questão divisível e o gráfico, uma **curva contínua**.

Função Receita

Supondo que x unidades do produto sejam vendidas. A receita de vendas depende de x. A função que relaciona receita com quantidade é nomeada **função receita** (R).

Logo, temos um produto vendido a 15.000 u.m. a unidade (preço constante). A função receita será dada por:

$$R(x) = 15.000x \text{ (função linear)}$$

Função Lucro

Chamamos função lucro (L) a diferença entre a função receita (R) e a função custo total (Ct), isto é:

$$\boxed{L(x) = R(x) - C_t(x)}$$

Sendo que para:

$R(x) > C_t(x)$, temos lucro positivo;

$R(x) < C_t(x)$, obtemos lucro negativo (prejuízo); e

$R(x) = C_t(x)$, o lucro será nulo.

Diante do exposto, podemos observar que, na função receita R(x), admitimos o preço constante e trabalhamos com a função receita de 1º grau. Vale lembrar que o preço pode sofrer variações conforme a demanda e que o valor de x para o qual o lucro é nulo é chamado ponto crítico, ou ponto de nivelamento $R(x) = C(x)$.

Margem de contribuição por unidade é dada pela diferença entre o preço de venda e o custo variável por unidade.

Exemplo 8

Dado que $C_t(x) = 500.000 + 10.000x$ (custo total) e $R(x) = 15.000x$ (receita total), encontre o ponto crítico.

Resolução

O ponto crítico será o valor de x, tal que:

$$R(x) = C_t(x)$$

$$15.000x = 500.000 + 10.000x$$

$$x = 100$$

Logo, se $x > 100$, haverá lucro positivo e se $x < 100$, lucro negativo.

Podemos encontrar, ainda, a margem de contribuição por unidade:

$$15.000 - 10.000 = 5.000$$

É importante destacarmos, também, o **custo médio de produção**, ou **custo unitário** (C_m), que faz referência ao valor obtido pelo custo total dividido pela quantidade. Verifique a expressão matemática a seguir:

$$C_m(X) = \frac{C_t(X)}{X}$$

Função Demanda

Facilmente podemos perceber que a quantidade de um produto com demanda no mercado é função de muitas variáveis, como preço por unidade do produto, preços de bens substitutos, renda do consumidor, preferências etc.

Para melhor compreender, considere p o preço por unidade de certo bem oferecido a um mercado e x a quantidade desse bem com demanda pelos consumidores. O que geralmente acontece é que p depende de x, ou seja, temos uma função $p = f(x)$. Essa função denominamos de função demanda, e o seu gráfico recebe a denominação de curva de demanda.

Normalmente, quanto menor o preço, maior a quantidade demandada – função decrescente.

Função Oferta

A quantidade x de um produto colocada no mercado por produtores relaciona-se com o preço por unidade p desse produto.

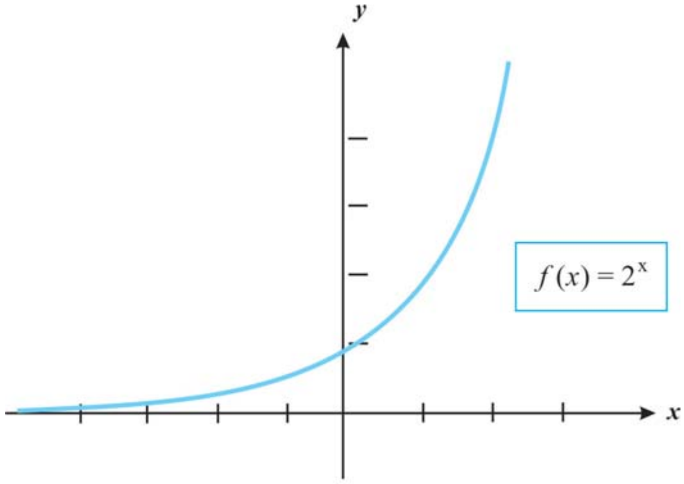
Verificamos que, em geral, quanto maior o preço, maior a quantidade do produto oferecida. Temos, então, uma função (crescente) g, $p = g(x)$, a qual é denominada função de oferta. O gráfico da função de oferta recebe a denominação de curva de oferta.

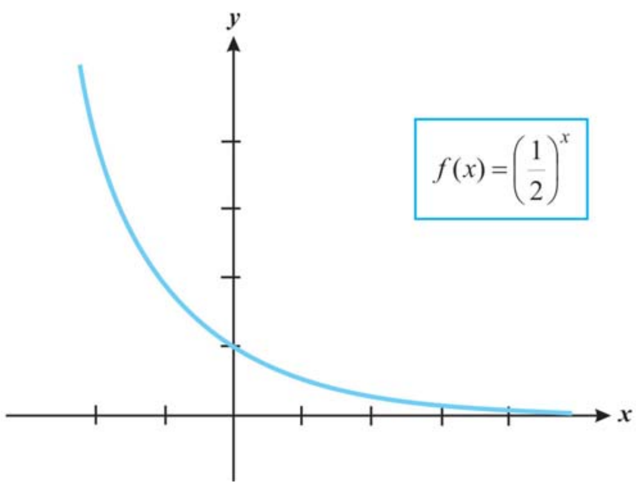
O ponto de interseção P_e dos gráficos da função demanda e da função oferta relacionados a um mesmo produto é denominado ponto de equilíbrio: $P_e\,(x_e, y_e)$.

Função Exponencial

A função que a cada x real associa a potência b^x, sendo b um número real positivo e diferente de um (1), é denominada função exponencial de base b, isto é: $f(x) = b^x$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Graficamente





É importante observarmos que, em uma função exponencial $f(x) = b^x$, $b > 0$ e $b \neq 1$, teremos:

- Para $b > 1$, a função representa um crescimento; e
- Para $0 < b < 1$, a função representa um decrescimento.

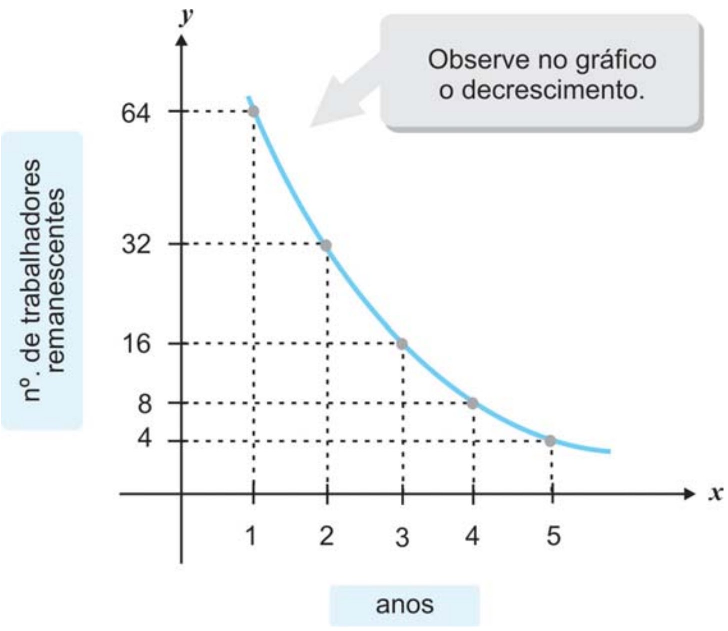
Exemplo 9

Imagine que a informatização de um setor da prefeitura com 128 servidores acarretou na diminuição no quadro de funcionários. O programa de demissões proposto era assustador e havia uma previsão de demissões anuais em um setor durante cinco anos. Em cada ano, metade do quadro de funcionários seria demitido. Pergunta-se: seriam mesmo necessários cinco anos dessa política de demissões, uma vez que o setor necessitava de um mínimo de 10 funcionários para dar continuidade ao serviço?

Resolução

Ano	1	2	3	4	5
Números de trabalhadores remanescentes	64	32	16	8	4

$y = a\,(1 - r)^x$	a = quantidade inicial antes das demissões iniciarem; r = taxa de decrescimento; e x = Tempo (anos).
$y = 128\,(1 - 0{,}50)^x$	x varia de 1 a 5 para este problema.



Outra situação a ser observada é que o crescimento de uma aplicação financeira a juros compostos é exponencial. Pois, ao aplicar um capital inicial (principal), este pode aumentar, como bem sabemos, de acordo com os juros e segundo duas modalidades:

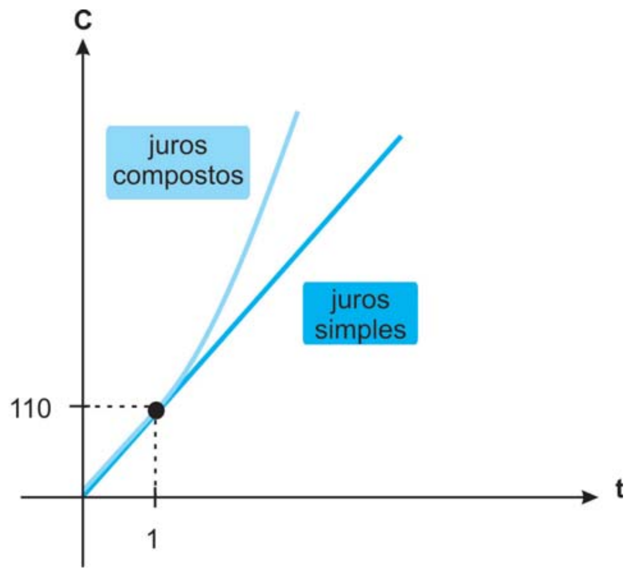
- **Juros simples**: ao longo do tempo, somente o principal rende juros.
- **Juros compostos**: após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecidos como juros sobre juros.

Vamos entender a diferença entre os crescimentos de um capital através dos juros simples e juros compostos por meio de um exemplo?

Para tanto, suponha que R$ 100,00 são empregados a uma taxa de 10% a.a.

Principal = 100	Juros simples	Juros compostos
Nº de anos	Montante simples	Montante composto
1	100 + 0,1 (100) = 110	100 + 0,1 (100) = 110,00
2	110 + 0,1 (100) = 120	110 + 0,1 (110) = 121,00
3	120 + 0,1 (100) = 130	121 + 0,1 (121) = 133,10
4	130 + 0,1 (100) = 140	133,1 + 0,1 (133,1) = 146,41
5	140 + 0,1 (100) = 150	146,41 + 0,1 (146,41) = 161,05

Observe que o crescimento do principal segundo juros simples é **linear**, enquanto o crescimento segundo juros compostos é **exponencial**; portanto, tem um crescimento muito mais "rápido".



Já no que diz respeito a juros compostos, considere o capital inicial (principal P) \$ 1.000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (principal + juros), mês a mês:

- Após o 1º mês, teremos:
  $M_1 = 1.000 \times 1{,}1 = 1.100 = 1.000(1 + 0{,}1)$
- Após o 2º mês, teremos:
  $M_2 = 1.100 \times 1{,}1 = 1.210 = 1.000(1 + 0{,}1)^2$
- Após o 3º mês, teremos:
  $M_3 = 1.210 \times 1{,}1 = 1.331 = 1.000(1 + 0{,}1)^3$

Observação de interesse

Observe as funções $y = x^2$ e $y = 2^x$. Nas duas expressões temos uma base e um expoente.

Entretanto, a função $y = x^2$ é denominada de função quadrática, e $y = 2^x$ recebe a denominação de função exponencial.

Complementando....

Amplie seus conhecimentos fazendo as pesquisas propostas:

- *Matemática básica para decisões administrativas* – de Fernando Cesar Marra e Silva.
- Portal Só Matemática: <http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1.php>. Acesso em: 15 nov. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade você foi convidado a reconhecer e compreender funções em suas diferentes características e especificidades. As diversas maneiras de representar uma função e suas respectivas interpretações estiveram em evidência como aliadas do processo de compreensão da relação entre diferentes grandezas variáveis.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) $\{x : x \neq -5\}$

   b) $\{x : x \in R\}$

   c) $\{x : x \geq -9\}$

   d) $\{ x : x \in R\}$