UNIDADE 4

Limite e Continuidade

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Resolver limite de função graficamente e algebricamente no contexto administrativo;
- Interpretar situações-problemas que envolvam a noção de limite de funções;
- Descrever e reconhecer os tipos e o significado de descontinuidade de uma função no contexto administrativo;
- Relacionar descontinuidade de uma função com seu limite; e
- Explicar o significado da definição de continuidade de função.

Introdução: compreendendo o conceito de Limite

Caro estudante!

O que vamos aprender nesta Unidade tem grande importância, não apenas em Matemática, como também em sua vida profissional. Vamos dar uma aquecida na nossa conversa com o exemplo ilustrativo sobre a noção de limite?

A noção de **limite** é um dos conceitos mais básicos e poderosos em toda a Matemática. A Diferenciação e Integração, que complementam o estudo de cálculo, são conceitos relacionados ao **limite**, o qual pode ser considerado como a pedra fundamental do cálculo e, como tal, se apresenta como a base de tudo o que se seguirá.

É muito importante que você compreenda bem a noção de limite de uma função para que possamos caminhar juntos pelos conhecimentos relacionados ao cálculo.

Antes de continuarmos nossa conversa, achamos interessante dizer que a álgebra trata de uma matemática "estática" e não pode ser utilizada para analisar a dinâmica de um objeto em movimento, por exemplo. A matemática do cálculo, entretanto, tem a capacidade de fazer tais análises. O principal conceito que nos permite fazer a transição da álgebra (estática) para o cálculo (dinâmico) é o de **limite de uma função**.

O cálculo se torna necessário quando precisamos encontrar a variação matemática. E esse conceito é de vital importância em Física, em Administração, em Engenharia e em várias outras áreas de estudo.

Exemplo 1

Imagine que exista uma fogueira com chamas ardentes. À medida que você se aproxima do local onde está a fogueira, a distância x entre você e o fogo diminui. A qualquer distância, x, você sente o calor na sua face. Deixemos que a temperatura da superfície de sua pele facial seja denominada por f(x). Teremos então:

- $x \rightarrow$ distância até a fogueira; e
- $f(x) \rightarrow$ temperatura da superfície da sua face.

Percebe que, à medida que nos aproximamos da fogueira, a sensação de calor aumenta.

Logo, você realmente não gostaria de ter o valor de x igual a 0 ($x = 0$), certo?

Mas, mesmo não tendo $x = 0$, podemos imaginar qual seria a temperatura da superfície de sua pele se o fizesse.

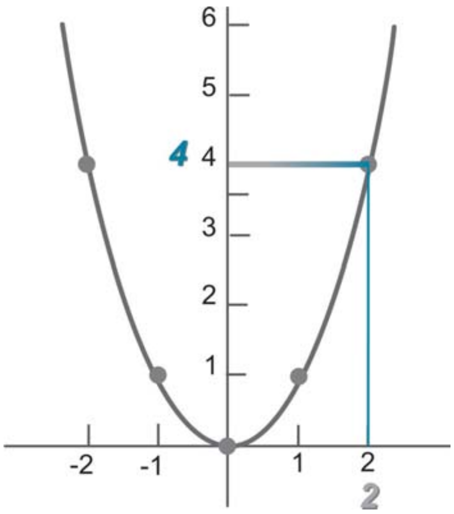
Com este exemplo simples, gostaríamos que você fizesse uma analogia com a noção de limite, que não precisa assumir o valor de x, mas é preciso conhecer o que acontece na vizinhança de x.

De uma maneira bem simples, poderíamos dizer que a noção de limite se relaciona ao valor de y ou à altura (y) que a função tem intenção de atingir.

Amplie seus conhecimentos através do *site* <http://www.somatematica.com.br/superior/limites/limites.php>.

Normalmente temos lidado com funções bem-comportadas e, desta maneira, não nos parece ter sentido dizer a altura (y) que a função tenciona atingir.

Vamos observar uma função bem simples e conhecida, $f(x) = x^2$, cujo gráfico é uma parábola.



Note que a função f(x) atinge certa altura (y) à medida que variamos x por todo seu domínio. Assim, se tivermos x igual a 2, a função atinge o valor 4 quando x assume o valor 2.

Você deve estar se perguntando: Mas como assim?

Então, isso é muito simples, pois basta que substituamos o lugar de x na função por 2. Ou seja: $f(2) = (2)^2$, isto é, $f(2) = 4$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Então, apresentando nossa primeira afirmação utilizando os termos de limite, temos que: o limite da função f(x) quando x tende a 2 é igual a 4.

Isso significa dizer que, quando estamos chegando bem próximos de 2, a função está se aproximando cada vez mais de 4.

Até aqui tudo está muito simples e tranquilo na nossa conversa, mas a situação pode mudar quando nossa função for outra, não tão bem-comportada e que não necessariamente atinja a altura que parece pretender atingir.

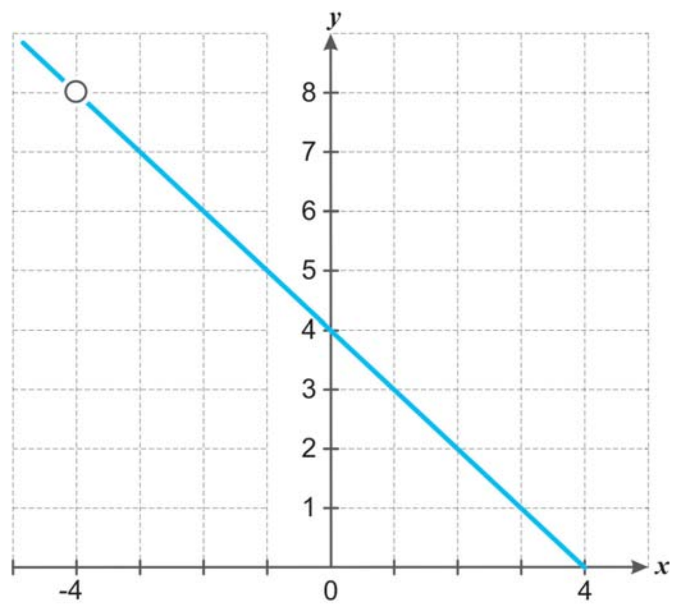
Vamos pensar na função $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$.

Façamos uma tabela para avaliar o comportamento da função $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$ na vizinhança de – 4.

x	f(x)
-4.1	8.1
-4.01	8.01
-4,001	8.001
-4	Indefinido
-3.999	7.999
-3.99	7.99
-3.9	7.9

D: $\{x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$
Note que, quando x se aproxima de – 4, a função $f(x)$ se aproxima de 8.
Atenção! Isto nos será útil para compreendermos limite.

Agora, dê uma olhadinha no esboço do gráfico da função a seguir.



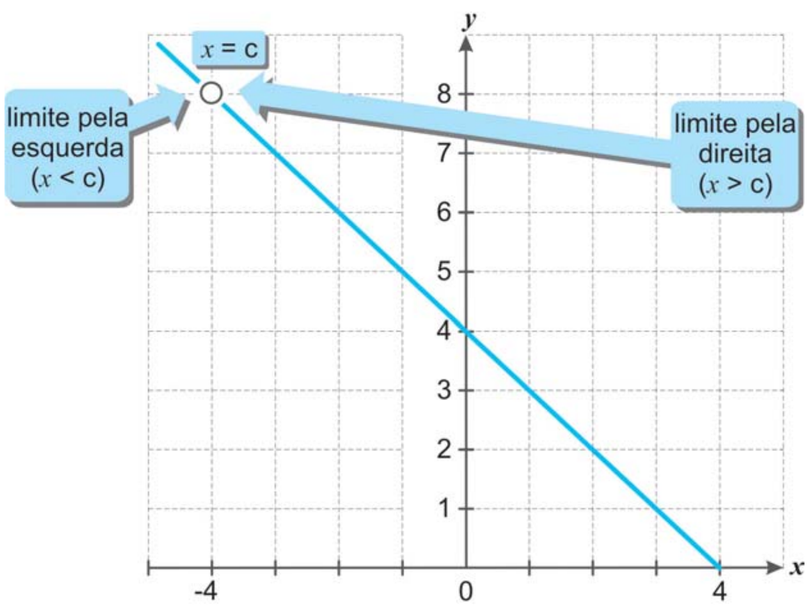
Observe que o gráfico contém um buraco, pois a função não está definida para o valor de x = - 4, ou seja, o valor - 4 não faz parte do domínio da função.

Você percebe por que isso acontece? E o que acontece quando substituímos x por (-4)?

Vejamos: $f(x) = \dfrac{16-(-4)^2}{4+(-4)} = \dfrac{0}{0}$

Sabemos que este quociente $\dfrac{0}{0}$ não é uma boa ideia, pois quebra algumas normas da Matemática e trata-se de um valor indefinido. Assim, não podemos encontrar o valor do limite ou o valor que a função tem intenção de atingir quando o x se aproxima de (-4) por substituição simples, como havíamos feito anteriormente para a função quadrática.

Entretanto, percebemos pela tabela e pelo gráfico que a função parece ter a intenção de atingir o valor 8 quando x se aproxima de (-4), tanto pela direita, quanto pela esquerda. Observe o gráfico:



Para encontrarmos o limite de uma função, não nos interessa o valor que ela assume no valor de x, mas sim o valor que a função tende a atingir.

Lembra que não foi preciso atingir a fogueira?

Assim, vamos procurar encontrar outra forma de escrever a função e que seja equivalente à primeira quando x ≠ – 4. Para tal, vamos nos lembrar do conceito de fatoração.

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{\cancel{(4 + x)}(4 - x)}{\cancel{4 + x}} = 4 - x$$

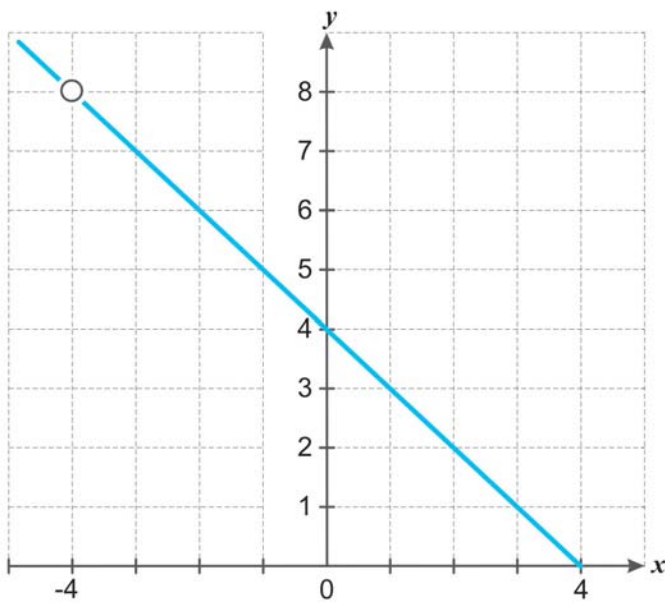
Lembra que queremos encontrar $\lim\limits_{x \to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = ?$

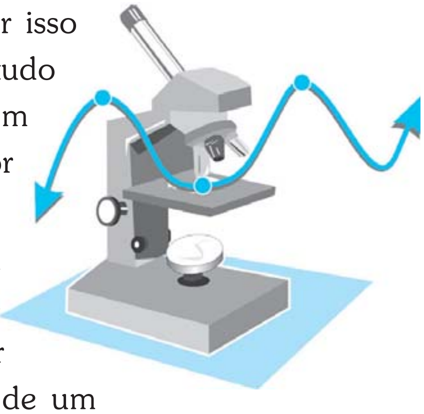
Teremos, após fatoração e supondo que x não assume o valor -4 $\lim\limits_{x \to -4} (4 - x) = ?$

A função, quando expressa nesta nova forma, propicia utilizarmos a substituição para encontramos o limite, e, assim, podemos obter como resultado o valor 8.

Fique atento, pois a alteração realizada é apenas para o cálculo de limite. Para fazermos o esboço do gráfico da função, devemos lembrar que nele continua existindo o buraco quando temos x = – 4, pois esse valor não faz parte do domínio da função.

$x = -4$





Em cálculo, nos interessa irmos além da função, por isso focamos nos limites destas funções. O limite envolve o estudo do comportamento (ou tendência) de uma função em vizinhanças bem pequenas em volta de um determinado valor x = a.

Mas, imagine passar o gráfico de uma função por um microscópio. Podemos dizer que isto é o que acontece quando procuramos pelo limite de uma função. Queremos encontrar o que acontece com a função quando nos aproximamos de um determinado valor de x.

Expressando simbolicamente, temos que:

o limite de uma função lim f(x)
...descreve o comportamento da função conforme a entrada... x
...aproxima... $\rightarrow$
...de um valor particular c.

Portanto, o limite de uma função descreve o comportamento da função quando a entrada aproxima de um valor particular. Veja como simbolicamente expressamos o limite de uma função f(x) quando x tende a c.

$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L}$$

Diante do exposto, podemos dizer que o limite nos dá uma **informação pontual sobre a função**. Ele indica para **onde tende** a função em um ponto no qual ela não está definida, ou nos fornece o valor da função em um ponto onde a função está definida.

O limite de uma função em um ponto se baseia no comportamento local da função na vizinhança deste ponto.

Em outras palavras, o limite seria o valor que a função assumiria se considerássemos os valores da vizinhança próxima de x, mas não no próprio ponto.

Exemplo 2

Dada a função $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. Encontre o limite da função.

Resolução

Inicialmente pode não parecer tão simples quanto o exemplo anterior. Mas, a substituição de 4 em x para avaliar a função não parece ser uma boa ideia, pois teremos zero (0) no denominador.

Também pensar em fatoração não se apresenta como uma boa opção. Vamos então tentar a multiplicação pelo **conjugado** da parte onde aparece o radical.

*Você pode estar se perguntando: mas o que vem a ser **conjugado**?*

Conjugado é a mesma expressão, porém com a operação inversa. Assim, o conjugado de $\sqrt{x}-2$ seria $\sqrt{x}+2$. Então, tentaremos multiplicar e dividir por este valor para não alterarmos a função. Estaremos multiplicando por 1, que não altera, pois 1 é o elemento neutro da multiplicação. Observe a seguir:

O conjugado tem a mesma expressão, mas operação inversa.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} =$$

$^{n}/_{n} = 1$…então, colocar o conjugado sobre si próprio é como multiplicar por 1.

Assim, multiplicando por 1, não alteramos o valor da fração.

Veja como este artifício de multiplicar e dividir pelo conjugado nos ajudará a encontrar o limite. Obteremos uma função equivalente quando consideramos x diferente de 4. Vale lembrar que em limite o que nos interessa é o que acontece na vizinhança do ponto, ou seja, na vizinhança de 4.

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{x-4}{(x-4).(\sqrt{x}+2)}$$

Note que obtemos no numerador e no denominador a expressão (x – 4). Ao considerarmos x diferente de 4, poderemos simplificar, pois $\frac{x-4}{x-4}=1$.

Ficaremos, então, com a seguinte função para calcular o limite:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}.(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

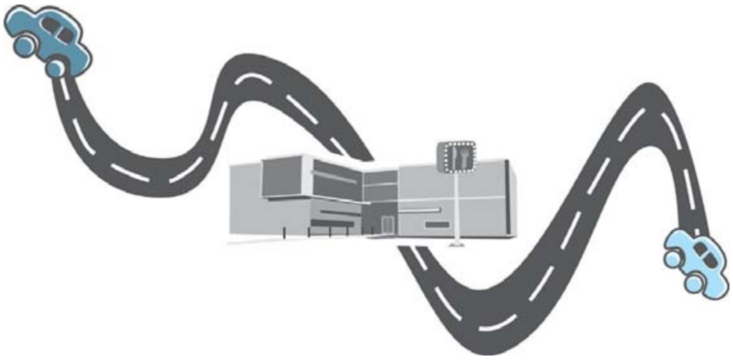
$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=?$$

Agora podemos, com a substituição, avaliar a função, pois, ao substituirmos x por 4, obteremos $\frac{1}{4}$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

Neste ponto já temos uma boa ideia do que vem a ser o limite de uma função. Contudo, é importante lembrar que a função terá limite quando, fazendo x tender a um determinado ponto c na sua vizinhança, a função tende para um mesmo valor L, ou seja, a função tende a assumir uma mesma altura (no gráfico).

Mas será que o limite sempre existe? Que condições garantem a existência do limite?

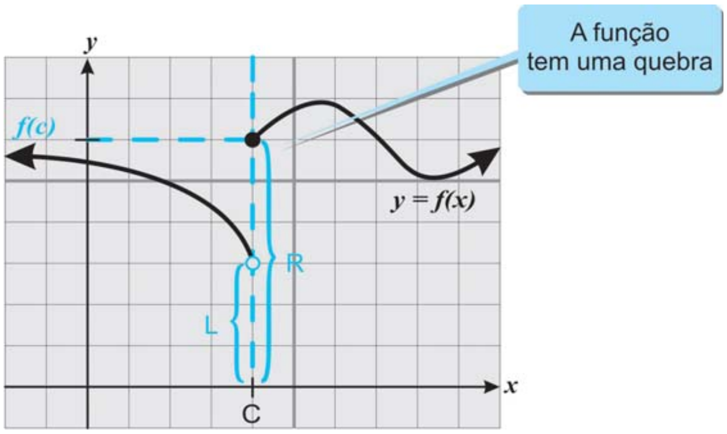


Acompanhe a história a seguir, que tenta ilustrar esta ideia de existência do limite:

Imagine que você e seu amigo, que moram em cidades próximas, tenham marcado um jantar em um restaurante que fica entre as duas cidades. Você sai de carro de sua casa e toma uma estrada rumo ao restaurante. Seu amigo faz o mesmo: entra no carro e toma uma estrada para encontrar você no restaurante combinado.

Pense agora que a estrada represente graficamente uma função. Se vocês de fato chegarem ao restaurante, quando você tomou o caminho que aproxima pela direita e o seu amigo se aproximou pelo da esquerda, também chegando ao local combinado, teremos a ideia de existência do limite. Se um de vocês, vindo de uma das direções (direita ou esquerda – leste/oeste), não chegar ao destino, o limite não existe.

Observe que, na função representada no gráfica a seguir, o limite para x tendendo ao valor c não existe. Para melhor compreender, imagine que a função represente, em cada parte, as estradas que cada um tomou para chegar ao restaurante combinado, que se localizava em (c, f(c)). Logo, neste caso você e seu amigo não se encontrariam.



Veja o gráfico da função f(x). Ele nos mostra que o limite de f(x) não existe para x tendendo ao valor **c**.

Podemos observar que, se caminhamos pela direita no gráfico, chegamos a uma altura R do gráfico, e, quando caminhamos pela esquerda, chegamos a uma altura diferente, que denominamos por L. Isso significa que o limite da função em **c** não existe.

Chamamos a altura a que chegamos vindo pela direita de **limite da direita** e indicamos com o símbolo +. Para a altura que chegamos vindo da esquerda, denominamos **limite à esquerda** e indicamos com o símbolo –. Para que o limite exista, os limites à esquerda e à direita devem ser iguais, ou seja:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

É importante dizermos que, embora a função f(x) representada, conforme demonstração, não possua limite em x = c, isto não significa que a função não tenha limites para x tendendo a outros valores. Veja que a função tem uma quebra em x = c. Esta quebra é que nos leva à não existência do limite.

Existência de Limite

O limite de f(x), quando x tende a c $\lim_{x \to c} f(x)$ existe se, e somente se, **ambos** os limites laterais existem e são iguais ao mesmo número L.

Voltando à história do restaurante no meio das duas cidades, imagine que vocês se dirijam para o restaurante vindo de diferentes direções (leste/oeste – esquerda/direita) e, ao chegarem ao local combinado, o restaurante não estivesse mais lá (pegou fogo, por exemplo).

Matematicamente o limite nesta situação existe, ainda que a função tenha um buraco. O que interessa no cálculo do limite não é se o ponto está lá, mas interessa que cheguem ao mesmo local.

Caminhos para encontrar o Limite

Como vimos anteriormente, quando existe o limite, os caminhos mais comuns para encontrarmos o limite de uma função são:

- **Substituição**: quando é possível avaliar a função substituindo o valor de x.
- **Fatoração**: quando não é possível avaliar a função por substituição, mas a expressão do numerador possibilita a fatoração.
- **Multiplicação pelo conjugado**: indicado para expressões que contêm radical.

Limites no infinito

Vamos nesta seção conversar sobre o mistério e a relação que existem entre limite e infinito.

Vamos avaliar algumas funções em determinados valores de x. Note que chegaremos a alguns resultados um tanto curiosos. Examinemos juntos a função $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$.

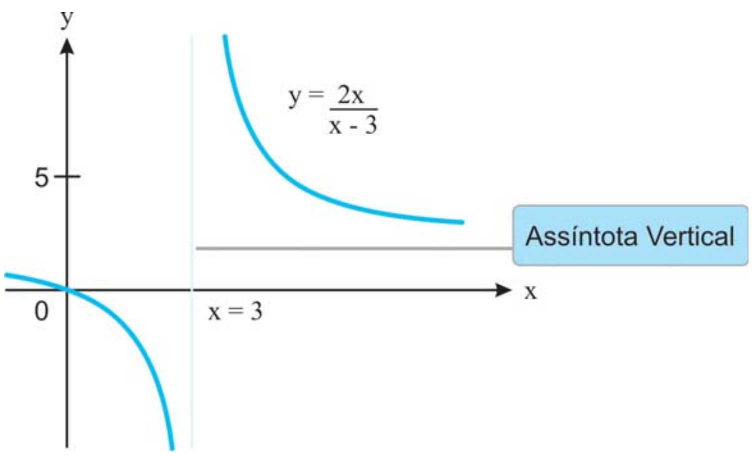
Observe que, ao substituirmos x por 3, obteremos o valor $\dfrac{6}{0}$.

Vimos anteriormente a situação em que encontramos $\dfrac{0}{0}$ e, para driblarmos e encontrarmos o limite, recorremos à fatoração, substituição e multiplicação pelo conjugado.

A situação que se apresenta neste momento é um tanto diferente. Observe $f(3)=\dfrac{2\cdot 3}{3-3}=\dfrac{6}{0}$.

Quando obtemos um número diferente de zero divido por zero, isto indica a presença de uma **assíntota*** vertical. Vamos acompanhar pelo gráfico o que acontece com a função na vizinhança do valor x = 3.

***Assíntota** – uma reta imaginária que se aproxima da curva, mas nunca a toca. Fonte: Elaborado pela autora.



Podemos observar com facilidade que os limites da direita e da esquerda, quando x se aproximam de 3, são diferentes.

Note que na medida em que nos aproximamos de 3 pela direita, a função cresce infinitamente e poderíamos dizer que o limite de f(x) pela direita é infinito (+ ∞).

Entretanto, à medida que nos aproximamos de 3 pela esquerda, a função decresce negativamente infinitamente, e poderíamos dizer que o limite de f(x) de x tendendo a 3 pela esquerda é menos infinito (–∞).

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

x	$\frac{2x}{x-3}$
3,5	14
3,4	17
3,3	22
3,2	32
3,1	62
3,05	122
3,01	602
3,0001	60002

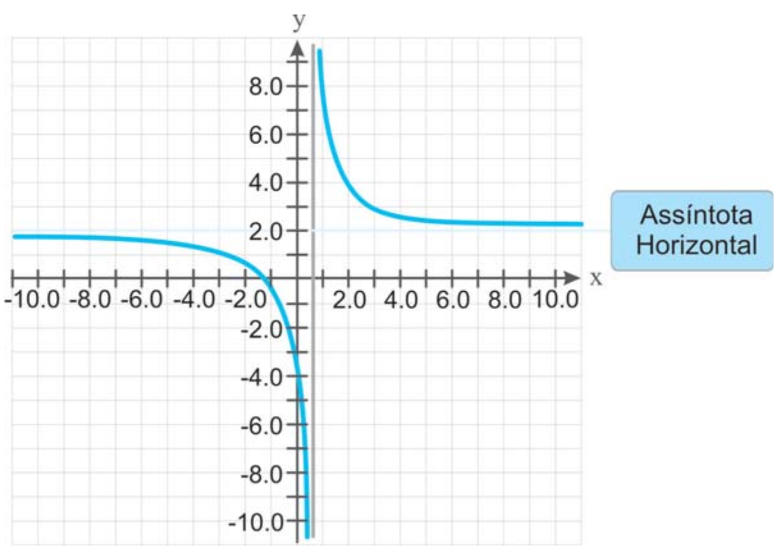
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

x	$\frac{2x}{x-3}$
2,5	-10
2,6	-13
2,7	-18
2,8	-28
2,9	-58
2,95	-118
2,98	-298
2,999	-5998
2,9999	-59998

Assim, podemos identificar que não existe o limite da função quando x tende a 3, pois os limites laterais são diferentes.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3} = \textit{não existe}$$

As assíntotas horizontais também se relacionam com o infinito de uma maneira diferente. Vamos analisar a função $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$ e seu gráfico:



Note que $\frac{1}{2}$ não pertence ao domínio da função e também não existe o limite da função quando x tende a $\frac{1}{2}$. Veja que temos uma assíntota vertical em x = $\frac{1}{2}$.

Observemos, também, o que acontece quando x tende para valores infinitamente grandes. Percebemos que a função tende a assumir valores próximos a 2, isto é, a função se aproxima da altura y = 2.

Matematicamente, isto significa que o limite da função quando x tende a infinito é 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{2x - 1} = 2$$

x	$\frac{4x}{2x-1}$
10.000	2,0001
10.000.000	2,0000001
100.000.000	–
100.000.000.000	–
100.000.000.000.000	–

Também podemos identificar que, quando a função tende a assumir valores negativos e infinitamente pequenos, a função também se aproxima da altura 2.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x - 1} = 2$$

Assim, podemos dizer que o limite existe e é igual a 2. Ou seja, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{2x - 1} = 2$.

Agora que já compreendemos como se comporta o limite no infinito, vamos conhecer uma maneira prática de calcular o limite no infinito. Preparado para continuar?

Para calcularmos o limite no infinito, isto é, $\lim_{x \to \infty} f(x)$, basta compararmos o grau – maior expoente – das expressões do numerador e denominador. Se o limite existe, a função terá uma assíntota horizontal no limite.

No caso em que o grau do numerador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite for o mesmo, então o limite será o número resultante dos coeficientes destes termos. Retornando ao nosso exemplo $\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{2x - 1}$, note que o grau da expressão do numerador e denominador é 1 (lembre-se: quando não está expresso o expoente, subentende-se ser o expoente 1, ou seja, $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^1}{2x^1 - 1}$). Assim, temos como coeficientes – no numerador, 4 e no denominador, 2. Desta forma, teremos o coeficiente $\frac{4}{2}$, que ao ser simplificado chega ao resultado 2. Veja que confere com o resultado que pudemos observar no gráfico exibido anteriormente.

E, se o numerador for maior que o grau do denominador, teremos como resultado ∞, ou seja, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Vale observar que, quando dizemos que o limite é infinito, tecnicamente estamos dizendo que o limite não existe, pois o limite deve ser um número real.

É mais correto dizer que o limite não existe, pois cresce infinitamente, em vez de dizer que o limite é igual a infinito).

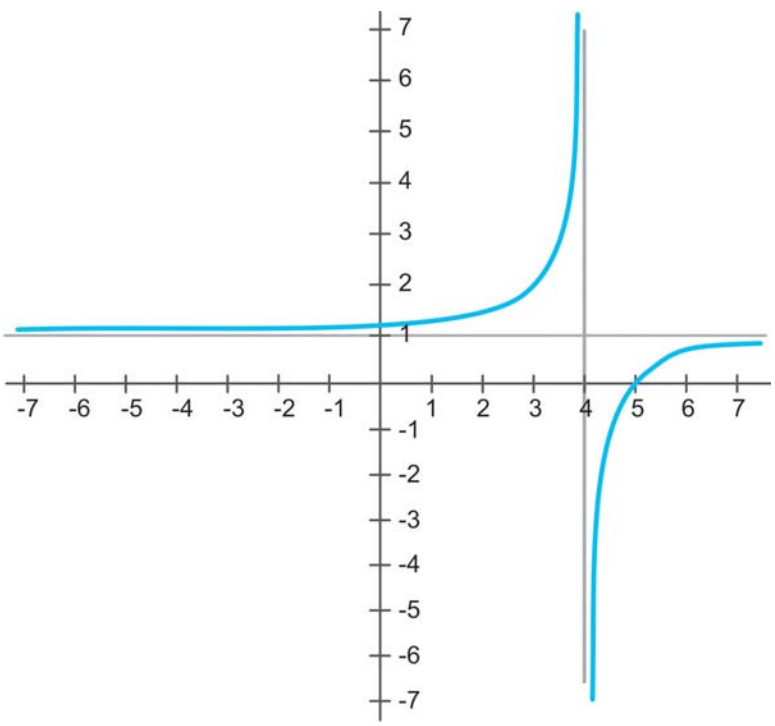
Contudo, se o grau do denominador for maior que o grau do numerador, teremos $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Retomando o que dissemos anteriormente:

- Quando $\lim_{x \to c} f(x) = \infty \ ou \ -\infty$, a função f terá uma assíntota vertical em x = c.
- Quando $\lim_{x \to \infty} f(x) = d$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = d$ existe, então f(x) tem uma assíntota horizontal em y = d.

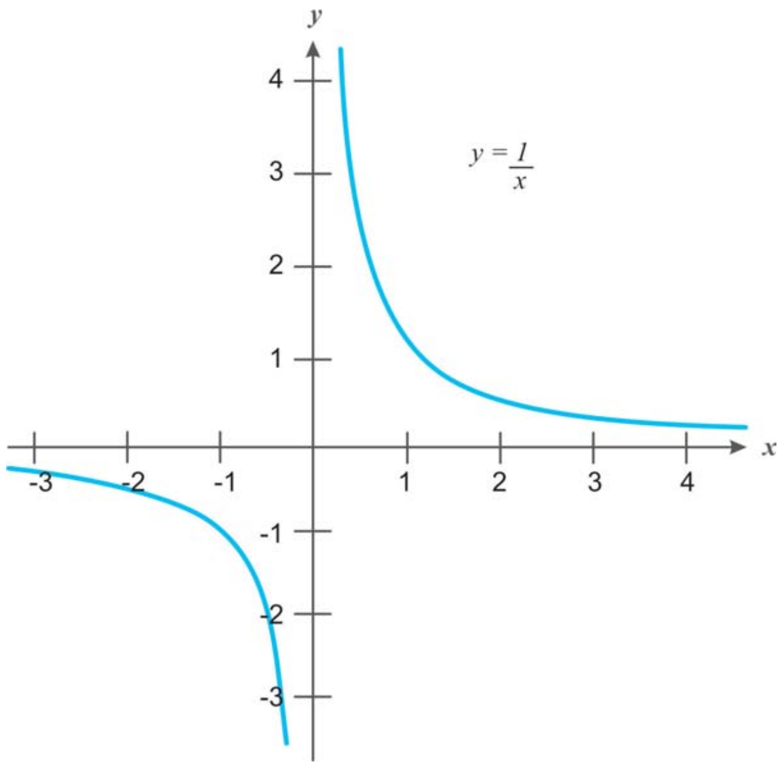
Agora, vamos refletir um pouquinho sobre a função $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$.

Note que existe uma assíntota vertical no x que anula o denominador, portanto em x = 4. Note que x = 4 não pertence ao domínio da função e que também não teremos o limite da função quando x tende a 4. Já a assíntota horizontal, teremos em y = 1.

Observe o esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$ a seguir:



Reserve um tempo para observar a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e seu gráfico esboçado a seguir:



Então, qual seria o $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$ *E o* $\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$ *A função apresenta assíntotas? Vertical? Horizontal?*

Temos certeza que você não teve nenhuma dúvida para responder às questões acima. Mas, se por acaso tiver alguma dificuldade, faça uma releitura cuidadosa da Unidade e solicite auxílio de seu tutor.

Exemplo 3

Suponha que um atacadista venda para a cantina da prefeitura um produto por quilo (ou fração de quilo) e, se o pedido contemplar menos do que 10 kg, o preço estipulado é R$ 1,00 por quilo. Contudo, para estimular grandes pedidos, o atacadista cobrará somente R$ 0,90 por quilo, se a solicitação for de mais do que 10 quilos.

Desta forma, se x quilos do produto forem comprados e C(x) for o custo total da compra, teremos:

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0{,}9x & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Qual o limite da função C(x) quando aproxima de 10? O limite existe? Por quê?

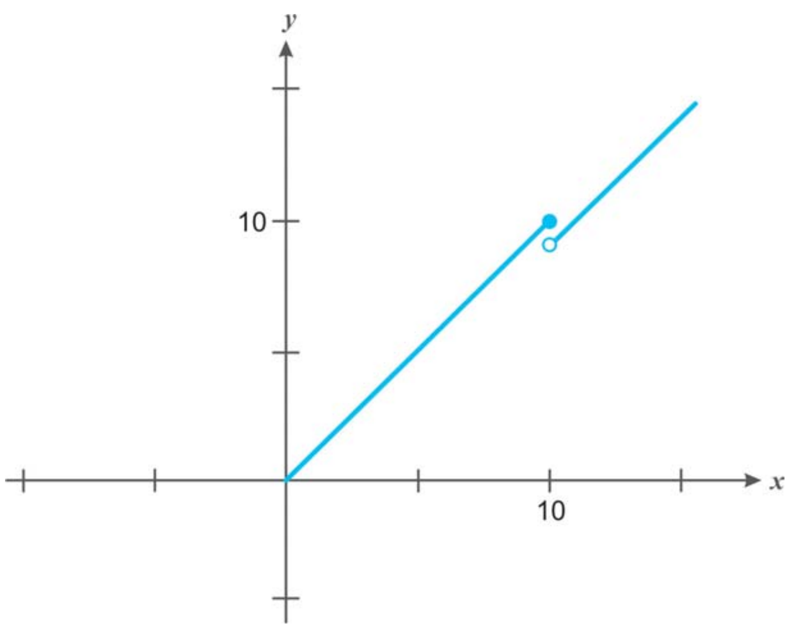
Resolução:

Mas antes de cair na tentação de olhar a resolução, tente resolvê-lo. Combinado?

Vamos avaliar o limite da função na vizinhança de 10, isto é, vamos encontrar os limites laterais – x tendendo a 10 pela esquerda – x tendendo a 10 pela direita.

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} x = 10 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} 0{,}9x = 9$$

Calculando os limites, temos que o limite de C(x) pela esquerda é 10 e o limite pela direita de C(x) é 9. Percebemos que os limites laterais não coincidem, portanto o limite não existe. Observe no gráfico a seguir:



Introdução ao conceito de continuidade

Uma vez compreendido o conceito de limite de uma função na seção anterior, vamos conversar daqui em diante sobre o que vem a ser **função contínua** e, consequentemente, abordaremos também a **descontinuidade de uma função**.

Importante ressaltar que o cálculo está fortemente apoiado na existência do que denominamos por função contínua. De fato, muitos teoremas importantes no cálculo incluem a exigência da existência da função contínua para que o teorema possa ser aplicado. Como exemplo, podemos citar o Teorema do Valor Médio e, se preciso for, voltaremos aos detalhes relacionados a ele.

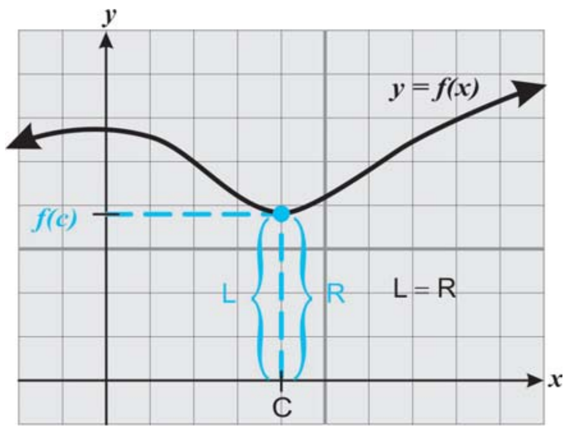
Mas, afinal, o que faz com que uma função possa ser considerada uma função contínua?

De uma maneira bem simples, podemos dizer que uma função contínua é uma função previsível e observamos que seu gráfico:

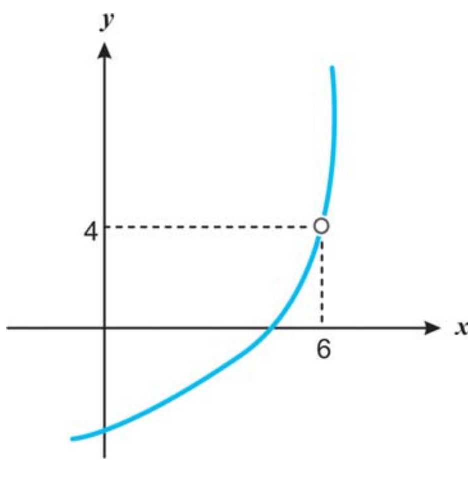
- não apresenta pontos indefinidos;
- não apresenta quebras/interrupções;
- não apresenta buracos; e
- não apresenta saltos.

Você entendeu o que caracteriza uma função contínua? E uma função descontínua?

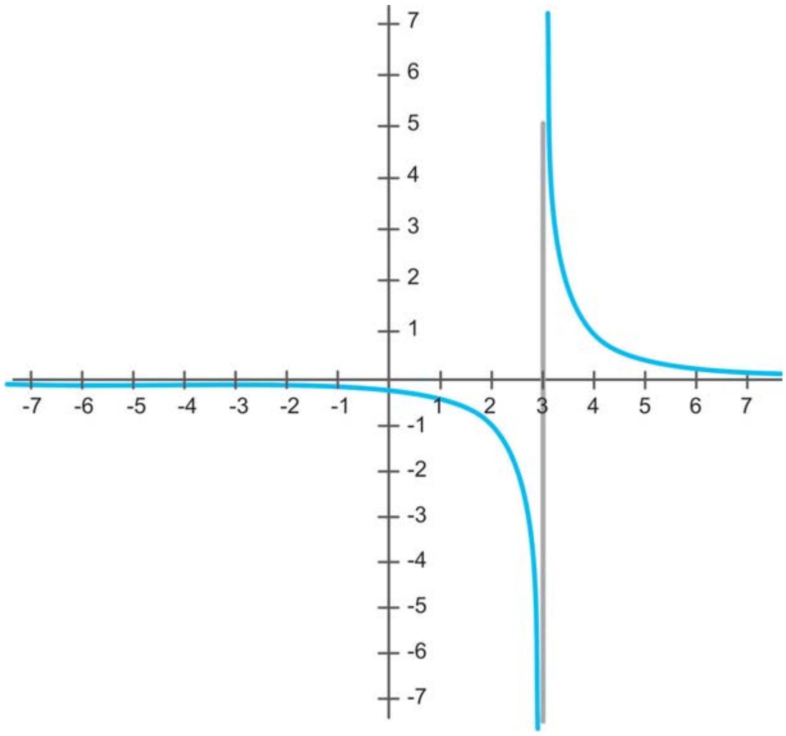
Para compreender melhor, observe as representações gráficas a seguir de uma dada função que representa uma estrada na qual você está dirigindo.



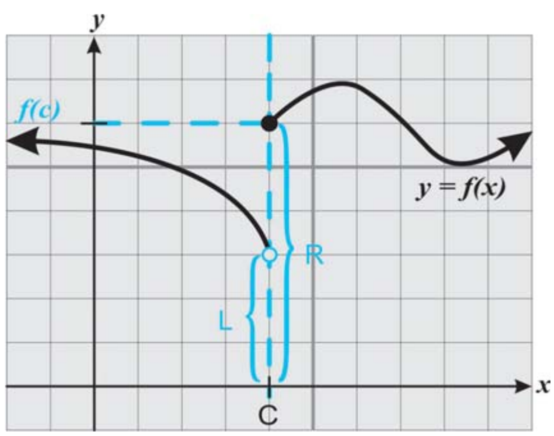
Neste primeiro exemplo acima, note que a "estrada" é bem-comportada e podemos passar pelos caminhos tranquilamente. Logo, temos um gráfico que representa uma função contínua.



Note que a "estrada" neste segundo gráfico não se apresenta tão comportada. Temos um buraco e, assim, a função representa uma descontinuidade de ponto, também denominada descontinuidade removível.

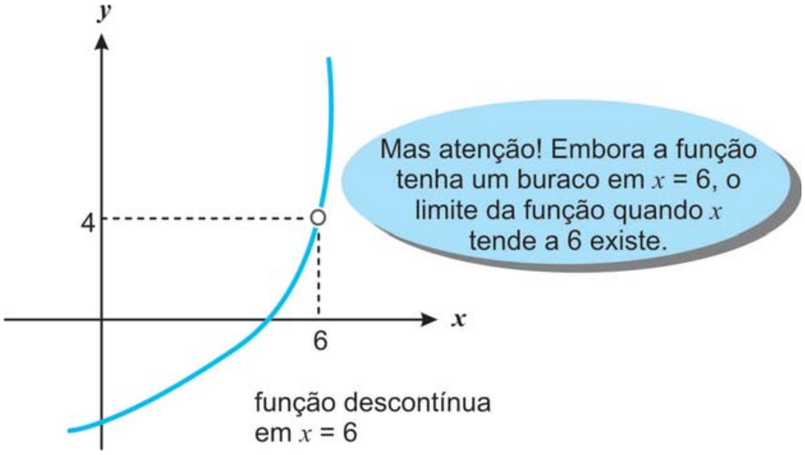


Nesta terceira representação gráfica acima podemos observar que a "estrada" imaginada por nós representa a função, que neste caso também não é tão tranquila. Temos uma assíntota vertical e poderíamos ser jogados para fora da "estrada". Este gráfico ilustra uma descontinuidade denominada por descontinuidade infinita.



Já neste quarto exemplo, a "estrada" que imaginamos representar a função também não parece ser tranquila. Percebemos que a função dá um salto e poderíamos também ser jogados para fora da estrada. Este gráfico ilustra uma descontinuidade denominada por descontinuidade de salto.

Assim, podemos concluir que uma função contínua é essencialmente uma função que não contém buraco. Ou seja, podemos traçar seu gráfico sem levantar o lápis do papel, em um traçado único.



Para compreender melhor a observação em destaque no gráfico acima, lembre-se da definição de limite! Note que os dois limites laterais, quando x se aproxima de 6 tendem a um mesmo valor, ou seja, se aproximam de um mesmo valor.

Anteriormente, afirmamos que uma função contínua é previsível, o que implica pelo menos duas coisas importantes relacionadas ao gráfico que representa a função. São elas:

- nenhuma quebra no gráfico (O limite deve existir para qualquer valor de x); e
- nenhum buraco no gráfico (O gráfico não possui assíntota vertical).

Mas, como podemos dizer se isso acontece?

Na verdade, pode ser muito fácil identificar. Geralmente, se pudermos avaliar qualquer limite da função f(x) utilizando apenas o método de substituição, teremos então uma função contínua.

Formalizando conceitos: definição de continuidade de função

Uma função *f* é contínua em um valor c se e somente se:

- *f* (*c*) é definida;
- *ambos* os limites laterais existem e são os mesmos; e
- o limite *L* da função, quando x tende a c, e a imagem da função em c coincidem.

Logo, se uma função f(x) é contínua, para qualquer x = c da função teremos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Exemplo 5

Ao assumir o cargo como administrador de um setor público, veiculou-se uma informação de que se houver entre 40 e 80 lugares no café-restaurante geral, o lucro diário será de R$8,00 por lugar. Contudo, se a capacidade de assentos estiver acima de 80 lugares, o lucro diário de cada lugar decrescerá em R$ 0,04, para cada lugar ocupado acima de 80. Se x for o número de assentos disponíveis, expresse o lucro diário como função de x. Verifique se a função é contínua em 80.

Resolução:

Temos que x é o número de assentos e L(x), o lucro diário. Deste modo, obtemos L(x) multiplicando x pelo lucro por lugar.

Assim, quando $40 \leq x \leq 80$, R\$ 8,00 é o lucro por lugar, logo $L(x) = 8x$.

Contudo, quando $x > 80$, o lucro por lugar é $x[8 - 0,04\,(x - 80)]$.

Obtemos então:

$$L(x) = x\,[8 - 0,04\,(x - 80)]$$

$$L(x) = x\,[8 - 0,04x + 3,2]$$

$$L(x) = x[11,2 - 0,04x^2]$$

$$L(x) = 11,2x - 0,04x^2$$

Feito isso, precisamos encontrar em qual ponto a função $L(x) = 11,2x - 0,04x^2$ é igual a zero.

Para resolver, recorde seus conhecimentos sobre a função quadrática.

Logo, $L(x) = 11,2x - 0,04x^2 = 0 \Rightarrow x\,(11,2 - 0,04x) = 0$.

Assim, $x = 0$, ou $11,2 - 0,04x = 0 \Rightarrow -0,04x = -11,2 \Rightarrow$

$0,04x = 11,2 \Rightarrow x = \dfrac{11,2}{0,04} \Rightarrow x = 280$.

Observe que, para $x > 280$, a função $11,2x - 0,04x^2$ é negativa e poderíamos desconsiderar. Portanto, pensemos no café-restaurante, que trabalha com capacidade mínima de 40 e máxima de 280 assentos ocupados.

$$L(x) = \begin{cases} 8x \text{ se } 40 \leq x \leq 80 \\ 11,2x - 0,04x^2 \text{ se } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

Mas, você pode estar se perguntando: como verificar se a função é contínua?

Para a função ser contínua, é preciso atender às condições descritas a seguir:

- Ser definida em **a**, isto é, **f(a)** deve existir;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ deve existir; e

▶ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Diante destas condições, temos que L(80) = 8·80 = 640.

Logo, f(a) = L(80) existe.

Sendo assim, para verificar se o limite de x tendendo a 80 existe, basta analisar se os limites laterais são iguais, ou seja;

$$\lim_{x \to 80^-} L(x) = \lim_{x \to 80^-} 8x = 640 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 80^+} L(x) = \lim_{x \to 80^+} 11{,}20x - 0{,}04\,x^2 = 640$$

Temos então:

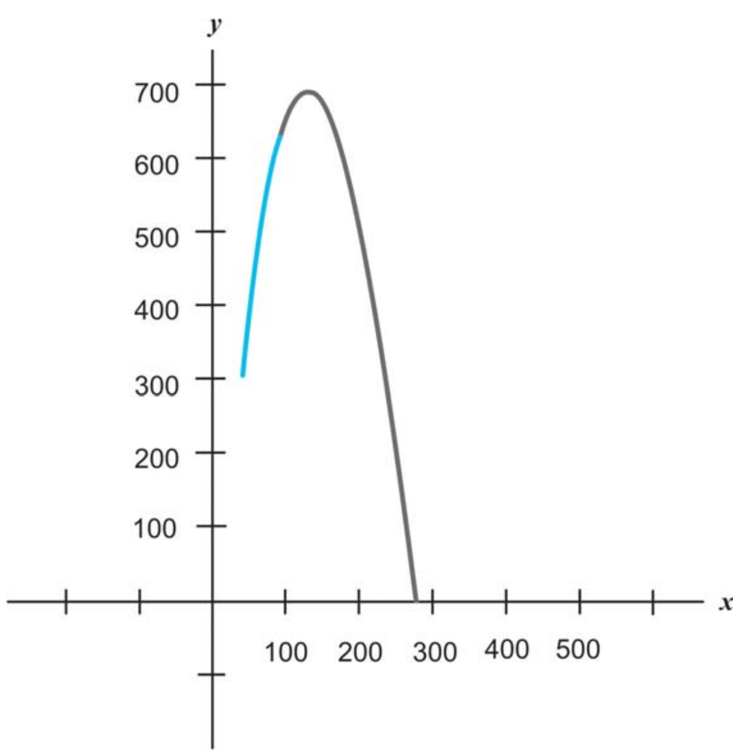
$$\lim_{x \to 80^-} L(x) = \lim_{x \to 80^+} L(x) = 640$$

Portanto, o limite de x tendendo a 80 existe.

Temos que $\lim_{x \to 80} L(x) = 640 = L(80)$

De tal modo, podemos concluir que L(x) é contínua em 80.

Observe a seguir o comportamento da função quando representada graficamente.



Complementando.....

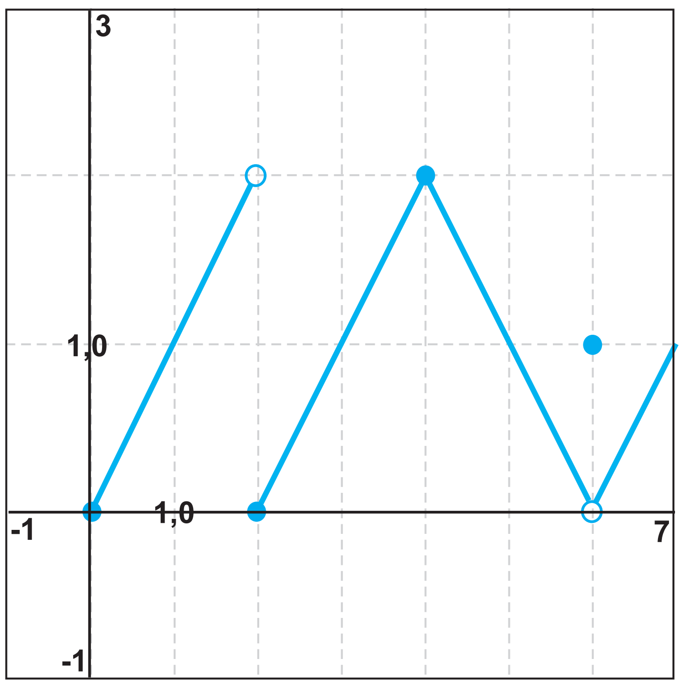
Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidades, consulte:

- *Matemática básica para decisões administrativas* – de Fernando Cesar Marra e Silva e Mariângela Abrão.

Atividades de aprendizagem

Agora é com você! verifique como foi seu entendimento até aqui? Uma forma simples de verificar isso é você realizar as atividades a seguir.

1. Analise com atenção a função apresentada graficamente abaixo e encontre os limites solicitados quando existirem.



a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 4} f(x) =$

e) $\lim_{x \to 6} f(x) =$

2. Encontre o limite das funções:

a) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 30}$

b) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 9)$

e) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$

3. Verifique se as funções abaixo são continuas em **x =c**. Caso considere que alguma delas não seja contínua, justifique.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}, \ c = 5$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \neq 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}, \ c = 1$

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1}, \ c = 0$

Resumindo

Nesta Unidade você esteve envolvido com a compreensão do conceito de limite de funções. Diferentes estratégias para encontrar o limite foram apresentadas a você ressaltando a potencialidade da representação gráfica para facilitar o entendimento e a visualização. O mistério que permeia a relação entre o limite e o infinito também esteve em destaque.

Exemplos ilustrativos tentaram fazer uma analogia com a ideia de continuidade de funções para auxiliar na compreensão do conceito. A definição de continuidade foi apresentada para formalizar o tema em questão.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) 2

   b) 0

   c) Não existe (limites laterais são diferentes)

   d) 2

   e) 0

2. a) $\frac{10}{11}$

   b) $\frac{1}{6}$

   c) 3

   d) 5

   e) -5

3. a) A função não é contínua, pois não está definida em x = 5, ou seja, $f(5)$ não está definida, pois 5 não pertence ao domínio da função.

   b) Não é continua, pois embora $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista e também a função esteja definida em x =1, esses dois valores não são iguais. Em outras palavras $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

   c) Sim é contínua, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$