UNIDADE 5

Derivada

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Descrever e comentar o significado de taxa de variação;
- Associar o conceito de taxa de variação à derivada de uma função;
- Calcular a derivada de uma função pela definição;
- Calcular a derivada utilizando as regras de derivação e associar aos contextos administrativos; e
- Resolver problemas que envolvam a derivada de uma função.

Introdução ao conceito de Derivada

Prezado estudante!

Como você sabe, nosso objetivo nesta Unidade é aprofundar os conhecimentos sobre derivadas, seu significado e aplicação no contexto administrativo. Para tanto, é muito importante que você procure aproveitar todos as seções apresentadas a seguir. Em caso de dúvida, lembre que estamos aqui para lhe auxiliar. Não deixe de consultar seu tutor e tampouco de trocar informações e curiosidades com seus colegas de curso.

Bons estudos!

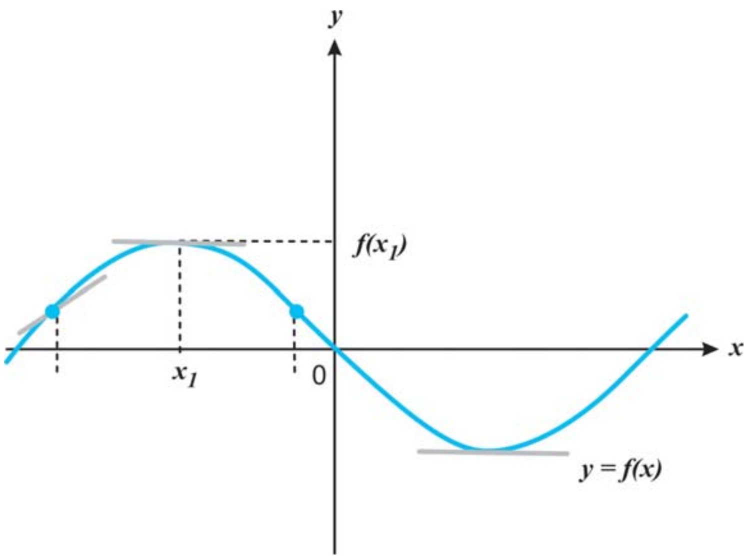
A **derivada** é uma das grandes ideias do cálculo e tem relação tanto com a taxa de variação da função, que por vezes se é representada graficamente por um curva, como se relaciona também com a tangente da curva. Vale lembrar que a tangente à curva existe em qualquer ponto e, ainda, que – a inclinação da tangente representa a taxa de variação daquele ponto.

A tangente é uma reta que toca o gráfico f(x) em um determinado ponto.

Em cálculo, a derivada é a inclinação da reta tangente em um determinado ponto da curva que representa a função f(x). A derivada de uma função f(x) pode ser indicada por f'(x).

Como imaginar que uma curva possui uma reta tangente em cada um dos seus pontos que a representa?

Poderíamos associar com uma sensação de viajar ao longo da curva que representa a função f(x) – aproximando um limite, passeando de montanha-russa.



Para encontrarmos a taxa de variação ou a inclinação de uma reta tangente a uma curva, precisaremos rever o importante **quociente da diferença**. Vimos como encontrar este quociente na Unidade 3, quando compreendemos o significado dos coeficientes da função afim representada graficamente por uma reta.

Taxa de Variação

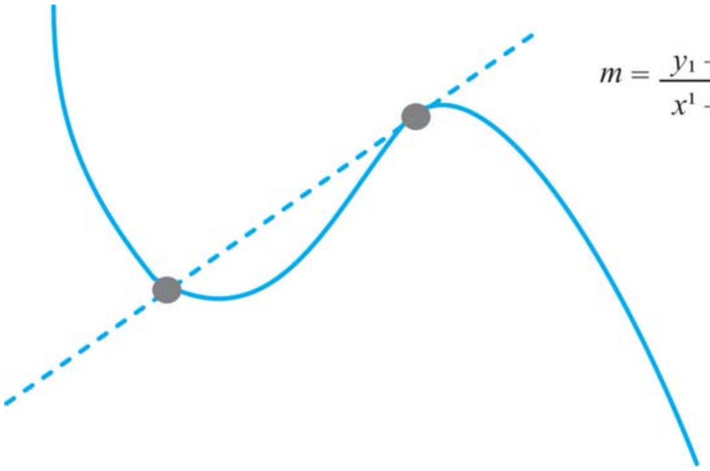
A **Taxa de variação** é uma razão relacionada a uma reta que compara a variação vertical com a horizontal. Comumente simbolizada por m ou a.

Existem várias maneiras de se pensar na taxa de variação; a aproximação geralmente depende da situação.

Para compreender melhor, considere algumas versões demonstradas a seguir para indicar a taxa de variação.

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ | $m = \dfrac{diferença - em\text{ -}y}{diferença - em\text{ -}x}$ | $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x^1 - x^2}$ | $m = \dfrac{vertical}{horizontal}$

Para qualquer função, poderemos encontrar a inclinação para dois pontos do gráfico. Isto é a taxa média de variação da função no intervalo de x_1 a x_2.



$$m = \frac{y_1 - y_2}{x^1 - x^2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x^1 - x^2}$$

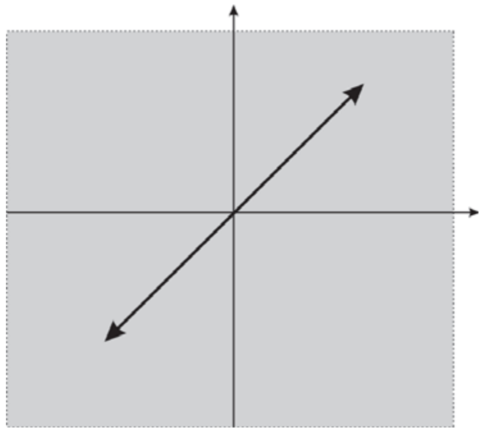
Note que temos aqui uma reta secante, pois toca a curva em mais de um ponto.

Assim, podemos dizer que a **taxa média de variação** de $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$ é dada pelo quociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

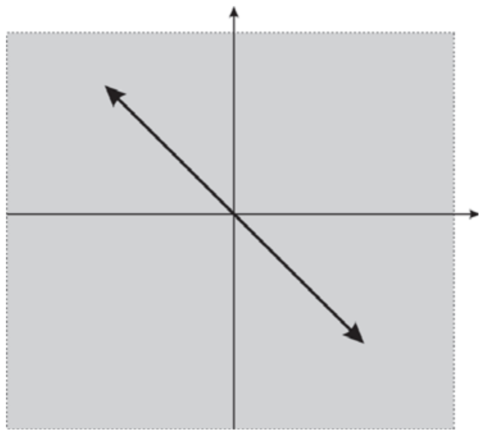
Tipos de Inclinação

Temos quatro possibilidades de inclinação.

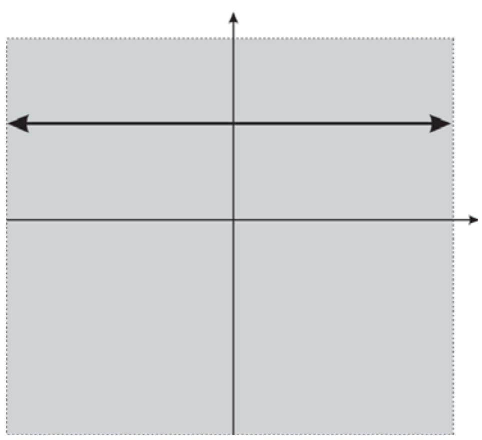
- Inclinação positiva, visto que teremos $^{+}/_{+}$ ou $^{-}/_{-}$ para $m = \dfrac{vertical}{horizontal}$. Graficamente representada por:



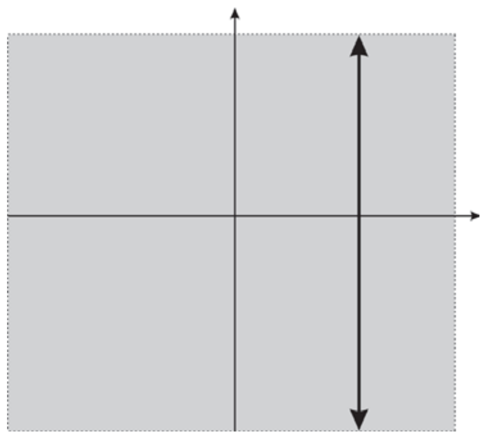
- Inclinação negativa, visto que teremos $^{+}/_{-}$ ou $^{-}/_{+}$ para $m = \dfrac{vertical}{horizontal}$. Observe sua representação gráfica:



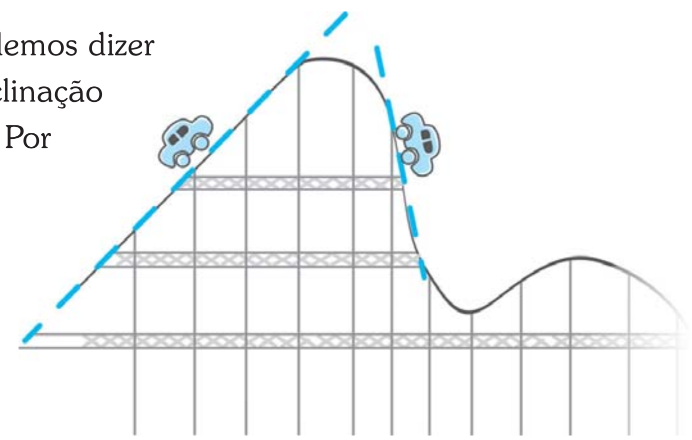
- Inclinação nula (0), visto que teremos $^{0}/_{-}$ ou $^{0}/_{+}$ para $m = \dfrac{vertical}{horizontal}$. Representado graficamente por:



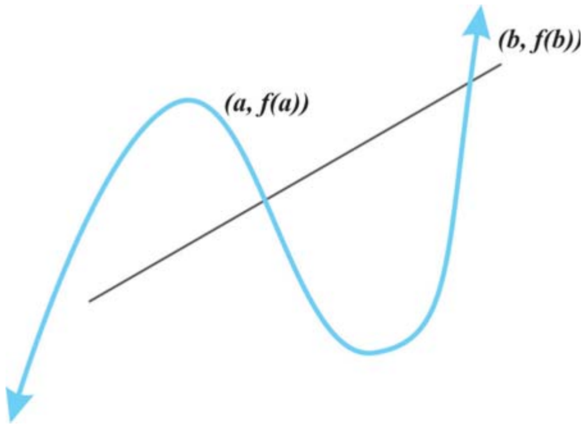
- Inclinação indefinida, visto que teremos $^{+}/_{0}$ ou $^{-}/_{0}$ para $m = \dfrac{vertical}{horizontal}$. Sendo sua representação gráfica dada por:



Diante do exposto até aqui, podemos dizer que tanto a taxa de variação, como a inclinação são vitalmente importantes em cálculo. Por exemplo, pense que a função representa uma montanha-russa e você experimenta a sensação de mudar de inclinação quando se move na montanha-russa – da esquerda para a direita. Nessa situação, você estaria vivenciando a base para a derivada.

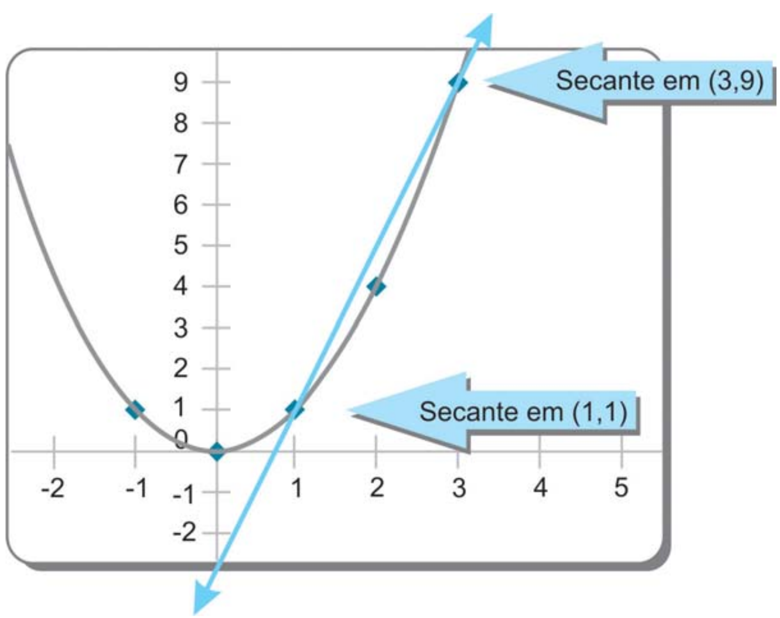


Perceba que, na vida, podemos considerar os constantes fatores de mudança, entre estes, a mudança na economia. Preços sobem e descem. Oferta e demanda flutuam. Inflação, recessão, e outras variáveis econômicas e financeiras estão constantemente mudando dentro do sistema econômico. Quando uma ou mais dessas características mudam dentro do sistema, disparam uma série de mudanças em algum setor da economia. A derivada nos ajuda a lidar com isto.



Vimos que é bem tranquilo encontrarmos a taxa média de variação, que representa a inclinação da reta secante que passa por dois pontos. Mas como encontrar a inclinação da reta tangente?

Para entender melhor, acompanhe as representações gráficas a seguir.

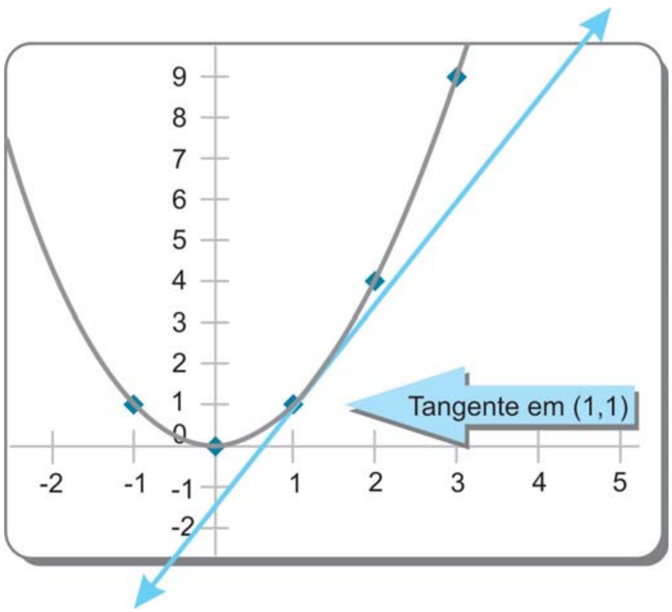


Na representação anterior, encontrando a inclinação para a reta secante, temos que:

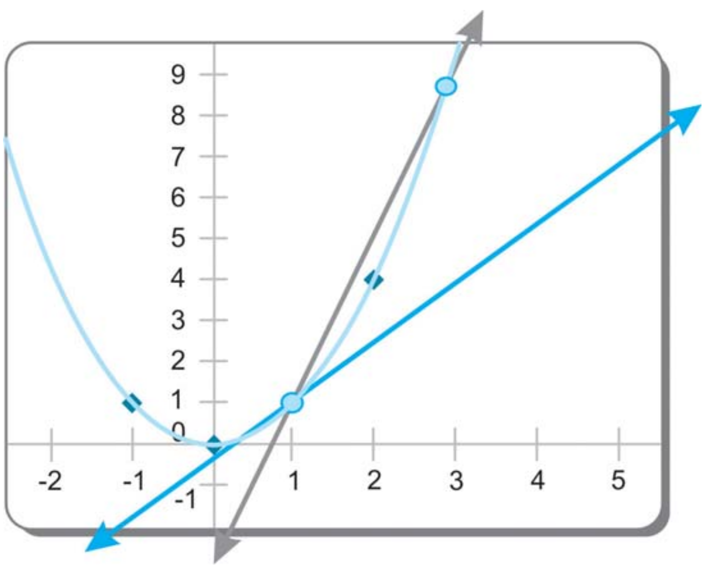
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x^1 - x^2} \rightarrow \quad m = \frac{9-1}{3-1} \rightarrow \quad m = \frac{8}{2} = 4$$

Agora, analisemos juntos a representação a seguir.

Como encontrar a inclinação da reta tangente?

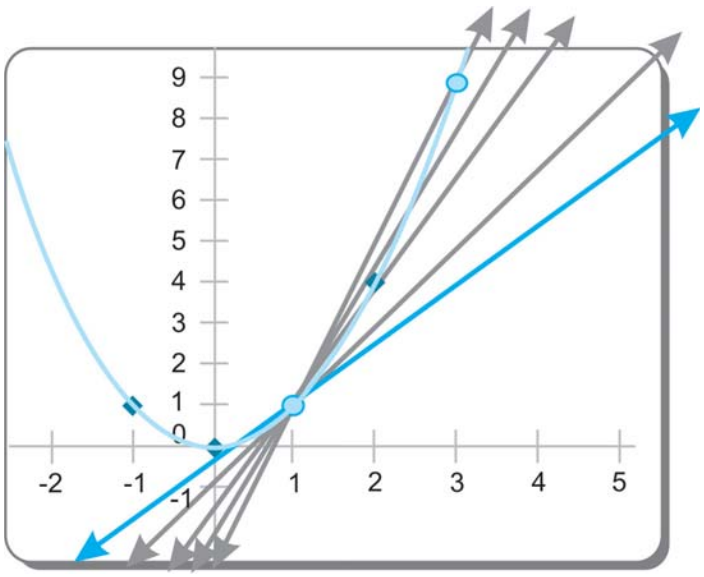


Primeiramente, note o que acontece quando diminuímos cada vez mais a distância entre x = 3 *e* x = 1



Teoricamente, repetiríamos esse processo várias vezes. A cada vez, a inclinação da reta secante aproximaria mais e mais da inclinação da reta tangente.

Logo, temos uma secante que se aproxima da tangente. O que nos permite dizer que a distância entre os valores de x na tangente e a secante móvel irá eventualmente diminuir/desaparecer, pois estará na mesma localização.



E quando a distância entre eles fosse quase zero. Não podemos dividir por zero. Então, o que fazer?

Neste caso, a variação horizontal seria zero porque o segundo ponto na secante estaria eventualmente sobre o ponto de tangência. Então... poderemos encontrar a inclinação da reta tangente se obtivermos o **limite** da secante móvel quando se aproxima da tangente.

Teremos, então, que a inclinação da reta tangente seria:

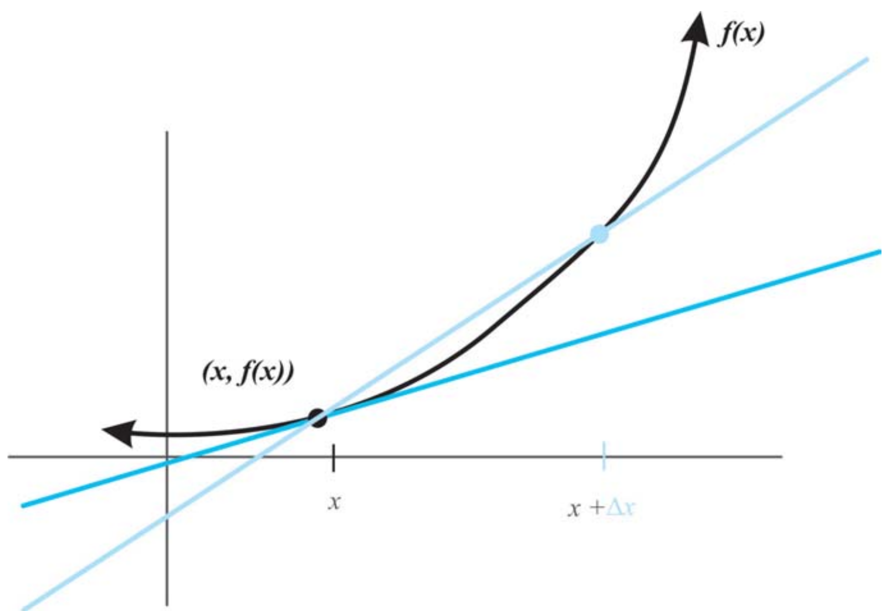
y_2 seria a altura do segundo ponto $f(x + h)$

y_1 seria $f(x)$

$$m = \lim_{\textit{horizontal} \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Substitua a hotizontal por h

Em Matemática o acréscimo muitas vezes é denominado por Δx. Portanto, $x + \Delta x$ é o mesmo que x + h.



Definição de Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$ é definida como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A derivada pode ser representada pelas seguintes notações:

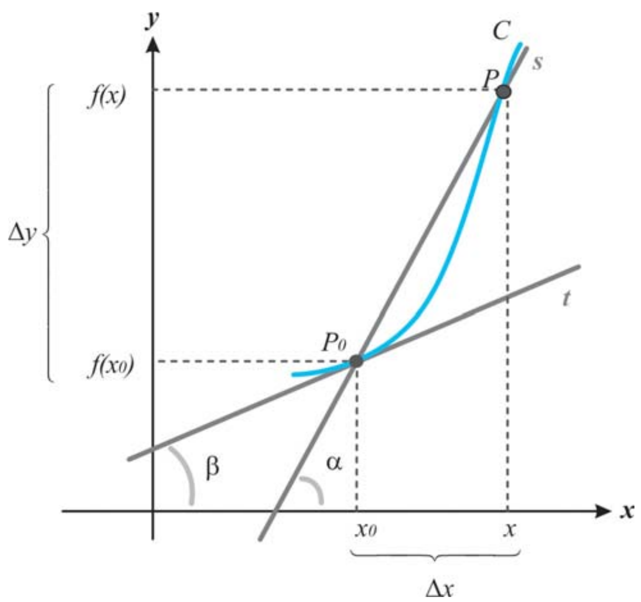
- f'(x) ou y'
- $\frac{d}{dx} f(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$

Significado geométrico da Derivada

Para entender o significado geométrico da derivada, teremos de recorrer ao conceito de coeficiente angular da reta.

Considerando a função y = f(x) contínua e definida no intervalo A, cujo gráfico é representado pela curva *C*, sendo x e x_0 elementos desse intervalo, com $x \neq x_0$.

Se a reta s, secante à curva *C*, é determinada pelos pontos $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$, podemos dizer que o coeficiente angular de s é $tg\alpha = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que corresponde à razão incremental de f(x) no ponto x_0.



Observe que se Δx tende a 0, ou seja, se *x* tende a x_0, o ponto *P* se aproxima de P_0 e a reta secante *s* tenderá à reta *t*, tangente à curva *C* no ponto P_0.

Se a reta *s* tende à reta *t*, então α tende a β. Portanto,

$$\lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$$

Então, concluímos que:

$$f'(x) = tg\beta$$

A derivada da função f(x) no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular (tg β) da reta t, tangente ao gráfico da função f(x) no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

A equação da reta t pode ser assim representada: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, ou, ainda, se $f(x) = y$, temos:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Exemplo 1

Encontre a taxa de variação instantânea para $f(x) = 5x + 1$ em $x = 3$.

Resolução:

Vamos lembrar que taxa de variação instantânea é a derivada e, assim, devemos encontrar o limite do quociente quando h tende a zero. O que, em símbolos, implica em:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[5\,(x+h)+1] - (5x+1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h + 1 - 5x - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \to 0} 5 = 5$$

Portanto, a **taxa de variação instantânea** em x = 3 é igual a **5**.

Diante do exposto, dizemos que diferenciar f significa encontrar a derivada de f. Assim, se existe f'(a), dizemos que f é diferenciável em x = a.

Condições de existência da Derivada

Uma função é dita diferenciável em x se existe o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Para tanto, a derivada não existe em três situações. Basicamente, onde a tangente não existe ou onde a inclinação da tangente é indefinida. Ou seja, aqui a sugestão é que você pense na tangente e em sua inclinação.

- Em uma descontinuidade $\rightarrow$ nenhuma tangente para usar;
- Em uma ponta (em forma de V) $\rightarrow$ inclinação indefinida; e
- Em um ponto de inflexão vertical $\rightarrow$ inclinação indefinida.

Assim, podemos dizer que se o gráfico de uma função contínua possui uma tangente em um ponto onde sua concavidade muda de sentido, então o ponto é denominado ponto de inflexão. Quando a tangente é vertical, estamos nomeando este ponto de ponto de inflexão vertical.

Para entender melhor, veja a seguir a relação de conceitos que separamos para você relembrar.

- **Limite**: a altura (coordenada y) de uma função para uma dada entrada (coordenada x); você às vezes não poderá encontrar essa altura exatamente por causa dos buracos, da assíntota etc.; algumas vezes, você ainda pode "aproximar" daquele valor, apesar dos buracos.
- **Taxa Média de Variação**: a inclinação entre dois pontos de uma secante – reta que intercepta a curva em dois pontos.
- **Taxa de Variação Instantânea**: a inclinação da reta tangente na curva.
- **Derivada**: a inclinação da reta tangente à curva; semelhante à taxa de variação instantânea.

É importante lembrarmos que precisamos do limite para encontrarmos a **derivada** de uma função e que observar o gráfico também foi fundamental para nossa compreensão.

Entretanto, seria impraticável depender do gráfico para cada derivada. E consumiria muito tempo usar a taxa de variação instantânea a todo momento. Precisamos aprender como encontrar a inclinação da reta tangente por outras técnicas legítimas.

Passemos às **regras de diferenciação**, ou **regras de derivada**.

Vamos deixar um pouco de pensar na representação gráfica da derivada. Vamos chegar a isso por uma aproximação diferente?

Regras de Derivação

Caminho mais curto. Método mais simples. Regras que nos atraem. São estes temas que trataremos nessa seção.

A regra da Potência (x^n)

Para qualquer expoente constante n, temos que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}}$$

Veja os exemplos, a seguir:

$$\frac{d}{dx}x^{100} = 100 \,.\, x^{100\,-1} = 100x^{99}$$

$$\frac{d}{dx}x^{-2} = -2 \,.\, x^{-2\,-1} = -2x^{-3}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}}$$

E se tivermos uma constante c? Como resolver?

Mais simples ainda. Para qualquer constante c, temos que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}c = 0}$$

Observe os dois exemplos, a seguir, para que você mesmo veja o quanto é simples.

- $\frac{d}{dx}7 = 0$
- $\frac{d}{dx}-31 = 0$

Espere! Vamos pensar sobre essa regra da constante?

Cada uma das constantes seria representada graficamente por uma reta horizontal, isto é, **paralela ao eixo x**.

Por exemplo, f(x) = 7, que é o mesmo que *y* = 7 *e* é representada por uma reta paralela ao eixo x. Ou seja, todas as retas horizontais (paralelas ao eixo x) não têm inclinação, ou seja, nestas a inclinação é zero.

A derivada é a inclinação da reta tangente. Então, deveria ter inclinação zero, também. Concorda?

Regra do Múltiplo – constante

Para qualquer constante c, temos que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[c.\, f(x)] = c.\, f'(x)}$$

Compreenda melhor analisando os exemplos a seguir:

- $\frac{d}{dx} 5x^3 = 5.(3x^2) = 15\,x^2$
- $\frac{d}{dx} 3x^{-4} = 3.(-4x^{-5}) = 12\,x^{-5}$
- $\frac{d}{dx} 7x = 7.1 = 7$

Regra da soma e da diferença

Note que ambas as regras – soma e diferença – se assemelham muito:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)} \\ \boxed{\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)} \end{array}\right\} \boxed{\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)] = f'(x)\pm g'(x)}$$

Assim, podemos observar que calcular a derivada de uma soma ou de uma diferença de uma função é muito semelhante. A atenção deve estar voltada para o sinal de soma ou diferença. Observe nos exemplos que seguem.

- $y = x^5 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 \rightarrow y' = 5x^4 - 3\sqrt{x} + 4x$
- $y = x^3 + 5x^2 - x + 3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x - 1$
- $\frac{d}{dx}(x^3 - x^5) = \rightarrow 3x^2 - 5x^4$

- $\dfrac{d}{dx}(5x^{-2} - 6x^{\frac{1}{3}} + 5) = \rightarrow \boxed{-10x^{-3} - 2x^{-\frac{2}{3}}}$

Agora, vamos dar um intervalo nas regras por alguns instantes e entrar um pouquinho em dois outros itens bem simples:

- derivada no ponto; e
- uma aplicação de derivada.

Avaliar ou encontrar o valor no ponto simplesmente significam substituir e simplificar.

Primeiro encontramos a derivada e depois avaliamos a função, isto é, encontramos o valor da função no ponto. Existem diferentes notações para derivada no ponto (usando $x = 2$):

$$\boxed{f'(2)} \qquad \boxed{\frac{df}{dx}(2)}$$

Suponha que uma empresa pública tenha calculado funções representando sua receita (renda), seu custo, e seu lucro (da produção e venda) como representado abaixo:

- $R(x)$ = Total receita da venda x unidades;
- $C(x)$ = Total custo da produção x unidades; e
- $L(x)$ = Total lucro x unidades.

O termo **custo marginal** significa o custo adicional da produção de uma unidade a mais. Isto é, essencialmente a função custo avaliada para uma unidade a mais que x.

$$\mathbf{C(x + 1) - C(x)}$$

Claro que, se dividíssemos toda a expressão por 1, não mudaria o resultado. Certo?

Ou seja, teríamos $\dfrac{C(x+1) - C(x)}{1}$, *que parece ser familiar, concorda?*

Exatamente, é o calculo da taxa de variação média. Semelhante ao quociente da diferença. Semelhante à inclinação.

Assim, temos que quanto mais unidades (x) produzidas, menor se apresenta h = 1 se comparado com o x. E, h se aproxima de zero.

$$\lim_{h \to 0} \frac{C\,(x+1) - C\,(x)}{1}$$

Esta expressão também parece familiar?

Acertou, representa a taxa instantânea de variação. Semelhante à derivada. Semelhante à inclinação da tangente.

Então, podemos afirmar que cada função na versão marginal é a derivada da função original. Observe as representações a seguir.

Custo Marginal	$Cmg\,(x) = C'\,(x)$
Renda Marginal	$Rmg\,(x) = R'\,(x)$
Lucro Marginal	$Lmg\,(x) = L'\,(x)$

Uma vez que compreendemos a necessidade de encontrarmos a derivada, nos parece importante conhecermos os caminhos mais curtos para se chegar até ela. Certo? Preparado?

A Regra do Produto

O produto das derivadas é igual à derivada da primeira função multiplicada pela segunda função **mais** a primeira função multiplicada pela derivada da segunda função.

$$\frac{d}{dx}\,[f(x).\,g(x)] = f'(x).\,g(x) + f(x).\,g'(x)$$

Não entre em pânico, vamos utilizar o truque da ajuda memória. Para compreender, considere a função $p(x) = (x^2 + x + 2)(3x - 1)$. Perceba que esta é uma função expressa como produto de duas funções.

$1' \cdot 2 + 1 \cdot 2'$

Usando o caminho mais curto para se chegar à derivada, isto é, usando a fórmula do produto para encontrar a derivada, teremos:

$p'(x) = (x^2 + x + 2)'(3x - 1) + (x^2 + x + 2) \cdot (3x - 1)'$
(lembre da ajuda memória!)

$p'(x) = (2x + 1) \cdot (3x - 1) + (x^2 + x + 2) \cdot 3$

$p'(x) = 6x^2 - 2x + 3x - 1 + 3x^2 + 3x + 6$

$p'(x) = 9x^2 + 4x + 5$

Entretanto, poderíamos expandir p(x), ou seja, efetuar a multiplicação e chegando à função expressa como: $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 2$. Desta forma, usando os caminhos para derivar potência e soma de funções obteríamos, também, a derivada:

$$p'(x) = 9x^2 + 4x + 5.$$

A Regra do Quociente

A derivada do numerador vezes o denominador menos o numerador vezes a derivada do denominador, tudo divido pelo denominador ao quadrado. Ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Calma! Novamente, vamos utilizar o truque da ajuda memória:

$$\frac{1'\,.\,2 - 1\,.\,2'}{2^2}$$

Para uma melhor compreensão, considere a derivada da função $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$. Agora, utilizando o caminho mais curto (regra) e o nosso truque (ajuda memória) teremos:

$$y' = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(x^3 - 1)'\,.\,(x^3 + 1) - (x^3 - 1)\,.\,(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2\,(x^3 + 1)\; - (x^3 - 1)\,.\,3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^5 + 3x^2 - (3x^5 - 3x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^5 + 3x^2 - 3x^5 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

Portanto $y' = \dfrac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$

Para entender melhor, acompanhe o raciocínio: Suponha que a prefeitura tenha calculado funções representando sua receita (renda), seu custo e seu lucro (da produção e venda) da produção de sua gráfica como representado a seguir:

$R(x)$ = Total receita da venda x unidades;

$C(x)$ = Total custo da produção x unidades; e

$L(x)$ = Total lucro x unidades.

Partindo do pressuposto de que o custo médio (CM) é encontrado dividindo o custo total $C(x)$ pelo número de unidades x. Temos que:

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Deste modo, dizemos que a derivada da função custo médio é denominada custo médio marginal, ou CMmg, e esta pode ser representada da seguinte maneira:

$$CMmg(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{C(x)}{x}\right]$$

E que as derivadas semelhantes descrevem a renda média marginal como $RMmg(x)$ e o lucro médio marginal como $LMmg(x)$.

Exemplo 2

Imagine que custa à editora da prefeitura R$ 12,00 para produzir cada livro que será utilizado para divulgar informações do Posto de Saúde. Sabemos que existe um gasto fixo de R$ 1.500,00. Desta forma, a função custo seria:

$C(x) = 12x + 1.500$, em que x é a quantidade de livros.

Queremos encontrar o custo médio CM, o custo médio marginal CMmg e o custo médio marginal em x = 100 CMmg(100). Também queremos interpretar o resultado obtido.

Resolução:

Para resolver este exemplo, temos três situações a serem determinadas.

Encontrar o custo médio *CM*, o *CMmg* e o *CMmg* em $x = 100$.

▶ Vamos encontrar o ***CM*** para $\mathbf{C(x) = 12x + 1.500}$.

$$CM(x) = \frac{12x + 1.500}{x} = \frac{12\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{1.500}{x}$$

$$\boxed{CM(x) = 12 + 1.500x^{-1}}$$

▶ Vamos encontrar o ***CMmg*** do ***CM(x)***, ou seja, vamos encontrar a função derivada.

$$CMmg(x) = \frac{d}{dx}(12 + 1.500x^{-1})$$

$$CMmg(x) = -1.500x^{-2} \boxed{= \frac{-1.500}{x^2}}$$

▶ Vamos calcular o ***CMmg*** em $\mathbf{x = 100}$. Para tanto basta avaliarmos a função obtida anteriormente em $x = 100$.

$$CMmg(100) = \frac{-1.500}{(100)^2}$$

$$CMmg(100) = \frac{-1500}{10.000} \boxed{= -0,15}$$

Feitos estes cálculos, vamos interpretar o resultado obtido, ou seja, ***CMmg*** em $\mathbf{x = 100}$. Este resultado quer dizer que, quando 100 livros forem produzidos, o custo médio por livro é decrescente (indicado pelo sinal negativo) de aproximadamente 15 centavos por livro adicional produzido.

Apesar de o custo total aumentar quando se produz mais, o custo médio por unidade decresce devido à economia de produção em massa.

Esperamos que tenha gostado e que tenha compreendido. Em caso de dúvida, lembre de que seu tutor terá o maior prazer em lhe atender.

Agora vamos recordar alguns conhecimentos sobre função composta, que é fundamental para compreendermos a próxima regra de derivação.

De uma maneira bem simples, poderíamos dizer que **funções compostas** são simplesmente funções de funções.

Uma função g(x) é colocada "dentro" de outra f(x). Isto é expresso da seguinte maneira: **f(g(x))**. Observe a Figura 1:

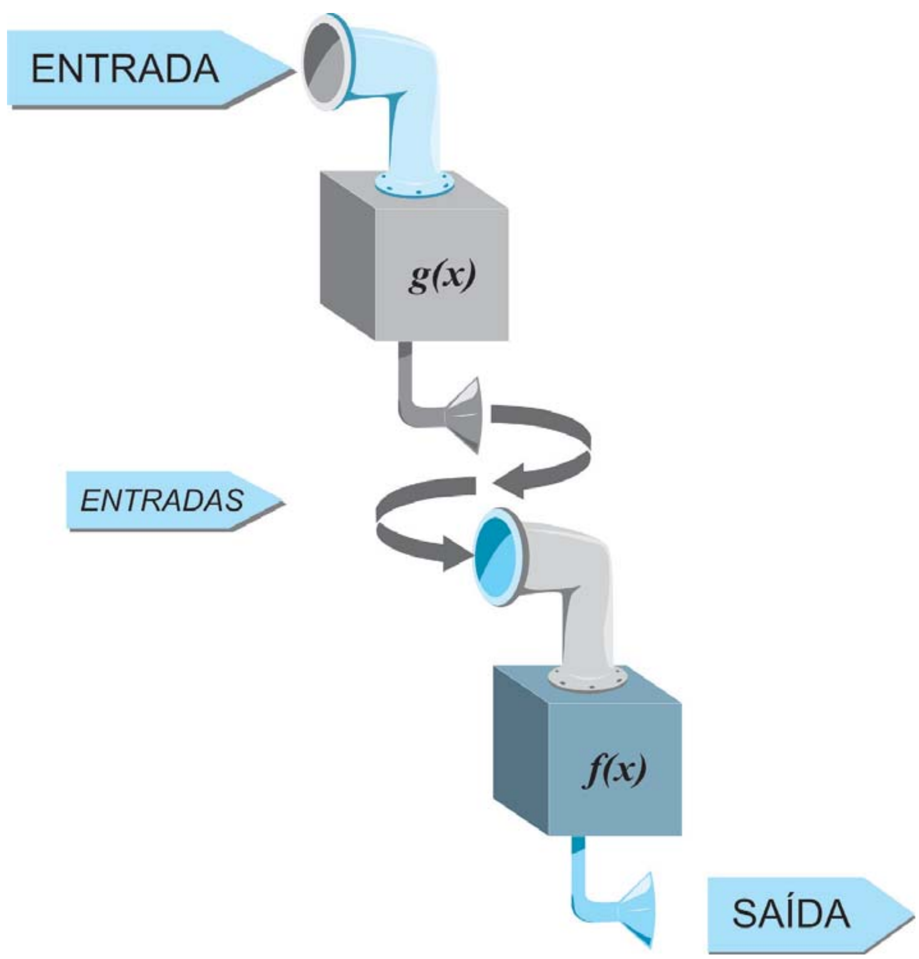


Figura 1: Função g(x) entra em f(x)
Fonte: Elaborada pela autora

Para entendermos melhor, vamos olhar alguns exemplos. Para tanto, considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4 - x$.

Diante desta condição, calculando f(g(x)), temos que $f(g(x)) = (g(x))^2$, o que resulta em $f(g(x)) = (4 - x)^2$. (Basta substituir no lugar de x de *f* a função g(x)). Agora vamos calcular ***g(f(x))***. Então, teremos que $g(f(x)) = 4 - f(x)$, o que resulta em $g(f(x)) = 4 - x^2$.

Sente-se mais preparado para continuar nossos estudos? Então, vamos acrescentar mais duas regras – regra da cadeia e a regra generalizada da potência – ao nosso arsenal de técnicas?

A Regra da Cadeia

Para começarmos, imagine que precisemos encontrar a derivada da função $f(g(x)) = (x^2 - 5x + 1)^{10}$

Claro que não vamos utilizar a regra da potência e multiplicar 10 vezes a base $(x^2 - 5x + 1)$. Vamos utilizar a **regra da cadeia**. Esta regra nos diz que **para duas funções diferenciáveis**

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Logo, basta que reconheçamos as funções envolvidas. Observe na sequência como é simples.

A f é como $f(x) = x^{10}$ onde x é a função g

$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

A função $g(x)$ é $g(x) = x^2 - 5x + 1$

$f'(g(x)) = 10(x^2 - 5x + 1)^9$

$g'(x) = 2x - 5$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 1)^{10} = 10\,(x^2 - 5x + 1)^9\,(2x - 5)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Importância da Derivada

Poderemos nos valer de todas as informações que a derivada nos oferece para esboçarmos a curva de uma função. Também poderemos utilizar as informações para trabalharmos com problemas de otimização. Trabalhamos com otimização quando procuramos encontrar o maior ou menor valor de uma função. Por exemplo: maximizar o lucro ou minimizar o risco etc.

As informações que a derivada nos fornece para avaliar seus aspectos gráficos serão de grande valia para o trabalho com otimização.

Para compreender melhor, imagine que uma empresa pública, após vários estudos, concluía que o Lucro Bruto poderia ser expresso pela função $LB = 0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}646$, para uma produção entre $x=4$ e $x=15$ unidades. Ao longo da experiência como administrador, o funcionário percebeu que, à medida que a produção saía de 4 unidades e se aproximava de 7 unidades, os resultados iam melhorando, fazendo com que a empresa saísse do prejuízo e começasse a dar lucro.

No entanto, quando a produção continuava aumentando, a partir de 7 unidades, e ia à direção de 11 unidades, o resultado voltava a piorar, chegando até a apresentar prejuízo novamente. Somente a partir de 12 unidades ele percebia que a tendência de melhora do resultado voltava a acontecer.

Conhecida a expressão que representa o lucro bruto e utilizando o que aprendemos sobre derivadas, podemos verificar se o sentimento do proprietário com relação aos resultados pode ser confirmado pela análise da primeira e da segunda derivadas da função. Para isto, basta analisarmos a primeira e a segunda derivadas.

Como assim?

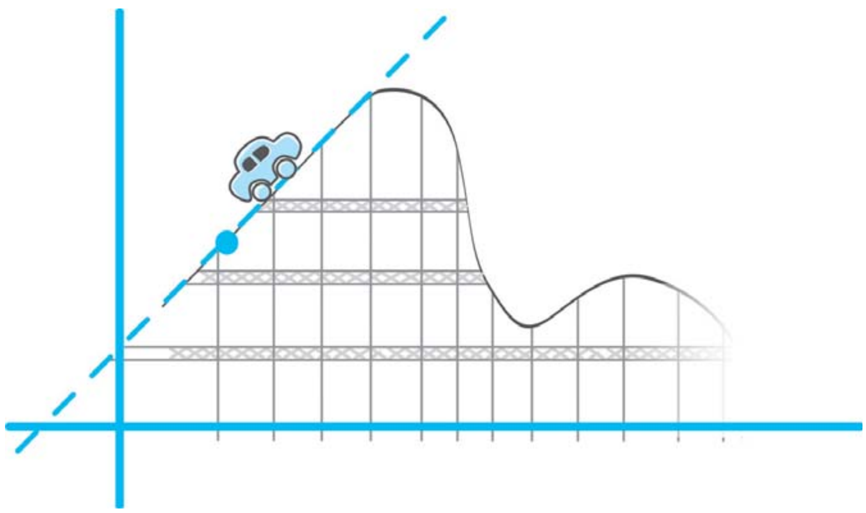
Vamos pensar com calma. Temos a função lucro bruto.

$$LB = 0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}646 \quad 4 \le x \le 15$$

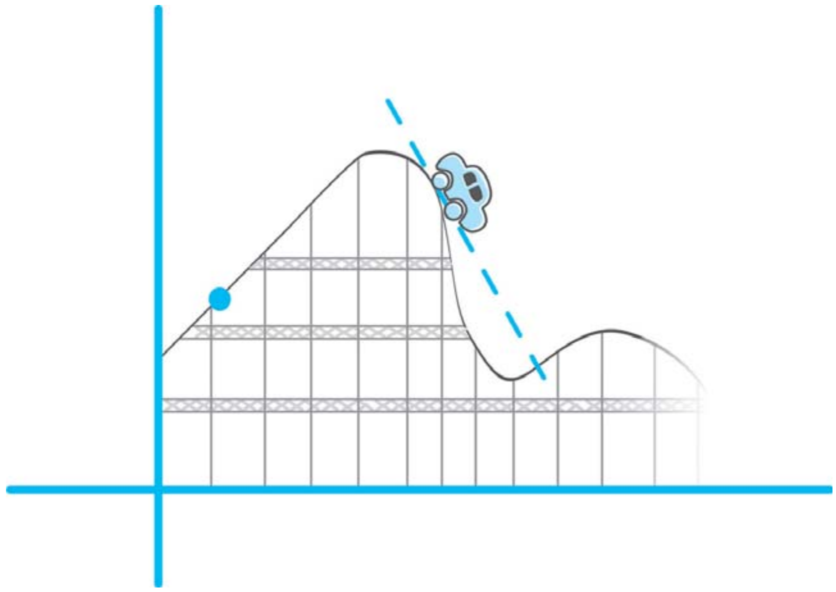
Será verdade que nos intervalos descritos a seguir acontece mesmo o que pressentia o funcionário?

- [4, 7] = melhorando – saindo prejuízo e tendo lucro
-]7, 11[= piorava – saía do lucro e apresentava prejuízo
-]12, 15] = melhorava o resultado

Para analisar melhor, imagine uma função como uma montanha-russa indo da esquerda para a direita. Na subida, teremos inclinação positiva (> 0), logo, uma função crescente.



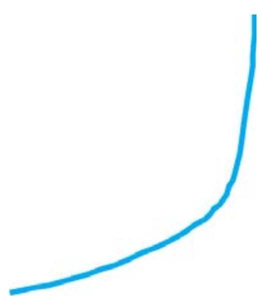
Já na descida, com inclinação negativa (< 0), teremos uma função decrescente.



Note que a derivada de uma função nos dá a inclinação do gráfico. Para visualizar a situação, volte a refletir sobre o exemplo da montanha-russa.

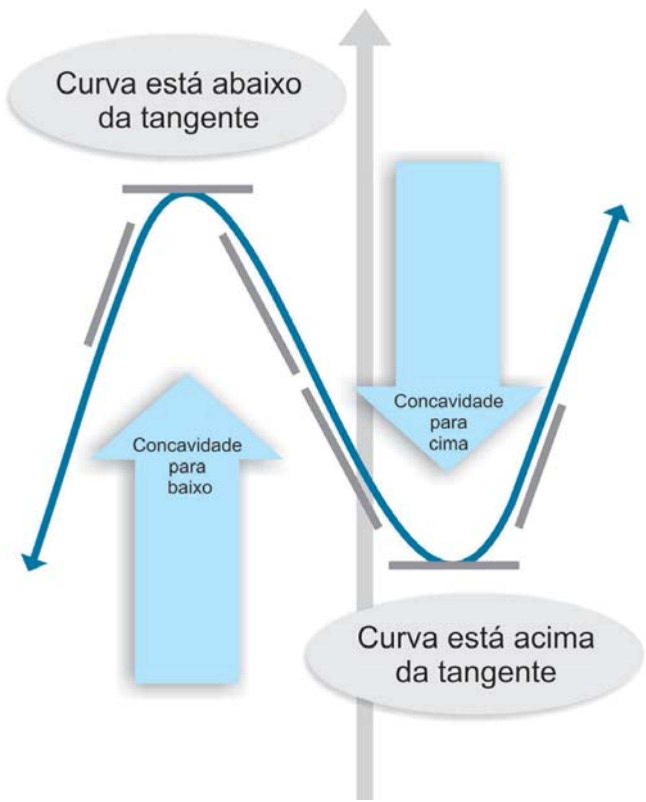
Outro ponto importante de destacarmos diz respeito aos **números críticos** de uma função. Estes dizem respeito às localizações onde o valor da derivada é zero – inclinação horizontal para a tangente – ou indefinido – inclinação indefinida para a tangente, ou a derivada não existe.

Sendo que se $f' > 0$ (positiva) em um intervalo, então f é crescente neste intervalo.



E, se $f' < 0$ (negativa) em um intervalo, então f é decrescente neste intervalo.

Vejamos a descrição a seguir.



Mas, como podemos usar o cálculo para determinar a concavidade?

Então, é aí que a segunda derivada entra em cena. A segunda derivada – a derivada da derivada – nos fornece a taxa de variação da inclinação. Em outras palavras, a segunda derivada mostra se a inclinação está crescendo ou decrescendo.

Quando encontramos a segunda derivada, podemos usar as seguintes relações para nos auxiliar na construção do gráfico:

- $f'' > 0$ (derivada segunda positiva) $\rightarrow$ inclinação aumentando $\rightarrow$ concavidade para cima
- $f'' = 0$ (derivada segunda nula) $\rightarrow$ sem inclinação $\rightarrow$ ponto de inflexão
- $f'' < 0$ (derivada segunda negativa) $\rightarrow$ inclinação decrescente $\rightarrow$ concavidade para baixo

O teste da primeira derivada:

Se uma função f tem o ponto c como **ponto crítico**, então em $x = c$ a função tem:

- um **máximo** relativo se $f' > 0$ um pouquinho antes de c e $f' < 0$ um pouquinho depois de *c* (lembre da montanha-russa); *e*
- um **mínimo** relativo se $f' < 0$ um pouquinho antes de *c* e $f' > 0$ um pouquinho depois de *c* (pense na montanha-russa).

Saiba mais **Ponto crítico**

O **ponto crítico** de uma função *f* é um valor de x do domínio de *f* em que acontece uma das situações: $f'(x) = 0$ ou **$f'(x)$ é indefinida**. Fonte: Elaborado pela autora.

O teste da segunda derivada:

Se $x = c$ é um ponto crítico da função *f* na qual f'' está definida, então a função tem:

- um **mínimo** relativo se $f''(c) > 0$ em $x = c$; *e*
- um **máximo** relativo se $f''(c) < 0$ em $x = c$.

Voltemos ao nosso caso e comecemos calculando a derivada primeira da função LB.

$$LB = 0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}646$$

$$LB' = 3 \cdot 0{,}1672x^2 - 2 \cdot 4{,}306x + 35{,}635 - 0$$

$$LB' = 0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635$$

Igualemos a derivada primeira a zero e resolvamos a equação para achar os pontos críticos.

$$0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635 = 0$$

$$x = \frac{+\,8{,}612 \pm \sqrt{74{,}166544 - 71{,}498064}}{1{,}0032}$$

$$x' = 6{,}9562 \text{ e } x'' = 10{,}2128$$

Como não há valores de x para os quais LB' não seja definida, decorre que x=6,9562 *e* x = 10,2128 são os únicos pontos críticos.

Assim, os intervalos que devem ser testados são:

]4; 6,95[;]6,95; 10,21[*e*]10,21; 15[

O Quadro 1 apresenta o resultado do teste desses três intervalos. Analise-o:

Intervalo	4 < x < 6,95	6,95 < x < 10,21	10,21 < x < 15
Valor (livre)	x = 5	x = 8	x = 13
Sinal de **f'(x)**	5,115 > 0 **f'(x) > 0**	-1,1586 < 0 **f'(x) < 0**	8,4494 > 0 **f'(x) > 0**
Conclusão	**Crescente**	**Decrescente**	**Crescente**
Sinal de f''(x)	– 3,596) < 0 **f''(x) < 0**	- 0,5864 < 0 **f''(x) < 0**	4,4296 > 0 **f''(x) > 0**
Conclusão	Concavidade p/ baixo cresce cada vez mais devagar.	Concavidade p/ baixo decresce cada vez mais devagar.	Concavidade p/ cima cresce cada vez mais devagar.

Quadro 1: Resultado do teste dos intervalos previstos
Fonte: Elaborado pela autora

Assim, as observações do funcionário foram confirmadas utilizando as derivadas primeira e segunda.

$LB' = 0,5016x^2 - 8,612x + 35,635 \quad LB'' = 1,0032x - 8,612$

Para $x = 5$, $LB' = 5,115$ $\quad LB'' = -3,596$

Para $x = 8$, $LB' = 14,8414$ $\quad LB'' = -0,5864$

Para $x = 13$, $LB' = 8,4494$ $\quad LB'' = 4,4296$

Ainda sobre o mesmo caso, poderíamos identificar o mínimo e máximo relativo no período considerado. Para isso deveremos determinar os extremos relativos de uma função.

Vamos fazer o teste da derivada primeira?

Seja f uma função contínua e derivável em intervalo (a, b), exceto possivelmente em $c \in (a, b)$:

- Se f' passa de positiva para negativa em c, então f(c) é máximo relativo de f. Assim, o máximo relativo de f é $f(6,25) = 2,1561$.
- Se f' passa de negativa para positiva em c, então f(c) é mínimo relativo de f. Logo, o mínimo relativo de f é $f(10,21) = -0,7314$.

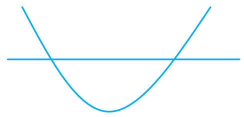
E ainda sobre o mesmo caso. Responda-nos qual é exatamente o intervalo em que a contribuição marginal é negativa? Ou seja, neste trecho um acréscimo na produção significa uma redução no resultado?

Lembremos que CM = derivada da função lucro. Que neste situação foi negativa, ou seja, $CM < 0$.

Para compreender este resultado, vamos estudar os sinais desta função e observar onde a função é negativa.

$LB' = 0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635$

$x' = 6{,}9562$ ou $x'' = 10{,}2128$



Assim, o intervalo em que a contribuição marginal é negativa seria entre os valores 6,9562 e 10,2128.

Dando continuidade, podemos mostrar matematicamente os trechos em que a função lucro bruto é crescente e quando é decrescente. Então, considerando que o lucro bruto está definido no intervalo de 4 a 15 unidades, e que os pontos críticos (onde $f'(x) = 0$) são:

$x' = 6{,}9562$ (máximo relativo) e $x'' = 10{,}2128$ (mínimo relativo).

Podemos mostrar o crescimento e decrescimento da função substituindo x na função lucro bruto. Vamos tomar valores próximos.

$$LB = 0{,}1672x^3 - 4{,}306x^2 + 35{,}635x - 93{,}646$$

- No intervalo de 4 a 7

  Para $x = 4$ $LB = -9{,}3012$

  Para $x = 6{,}95$ $LB = 2{,}1561$

  Para $x = 7$ $LB = 2{,}1546$

  Função crescente até seu máximo relativo.

  Crescente $[4; 6{,}95[$

  Observe que para $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja se x cresce, y cresce).

- No intervalo de 6,95 a 10,21

  Para $x = 6{,}95$ $LB = 2{,}1561$

  Para $x = 10{,}21$ $LB = -0{,}731$

  Função decrescente no intervalo de 6,95 a 10,21.

  Observe que para $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$ (ou seja se x cresce, y decresce).

- No intervalo de 10,21 a 15

  Para x = 10,21 LB = -0,731

  Para x = 11 LB = -0,1438

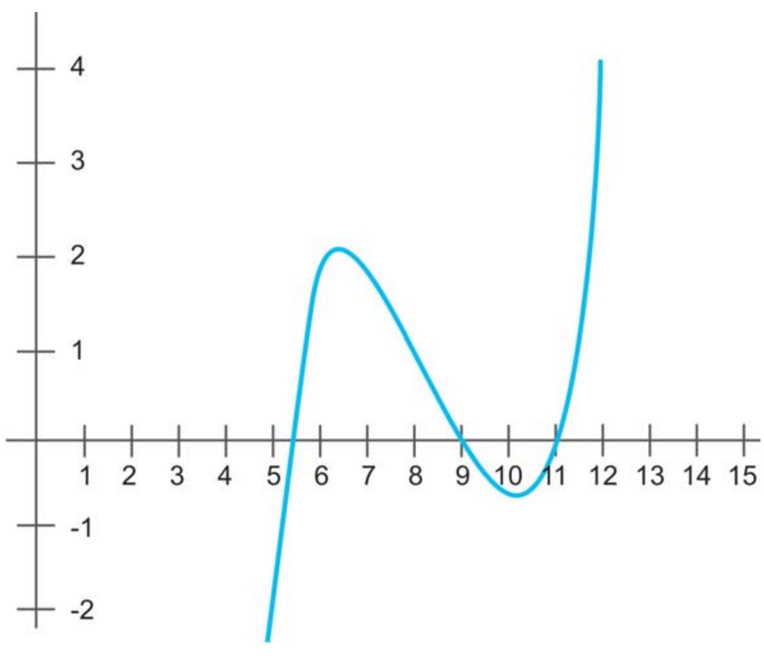
  Para x = 12 LB = 2,8316

  Função crescente no intervalo de 10,21 a 15.

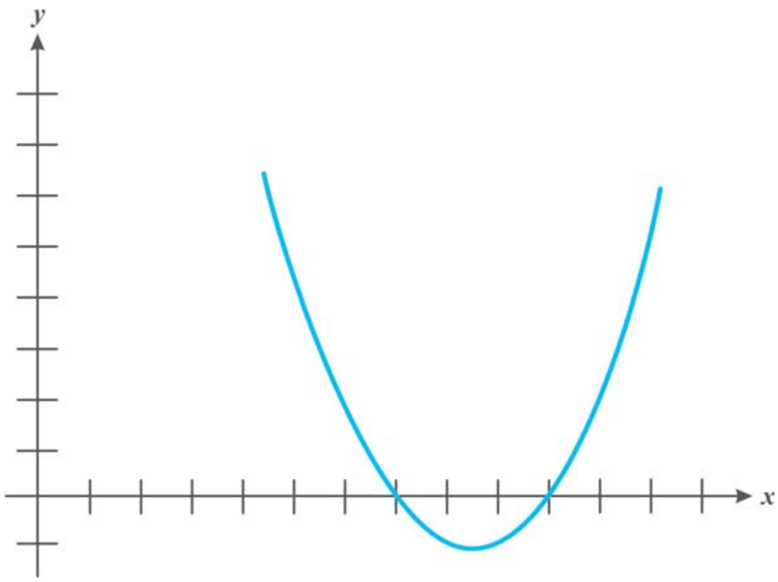
  Observe que para $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja se x cresce, y cresce).

Com base na análise conjunta da derivada primeira e da derivada segunda da função, qual é a produção mínima para garantir que a partir deste número os resultados tendem sempre a melhorar, dentro do domínio analisado?

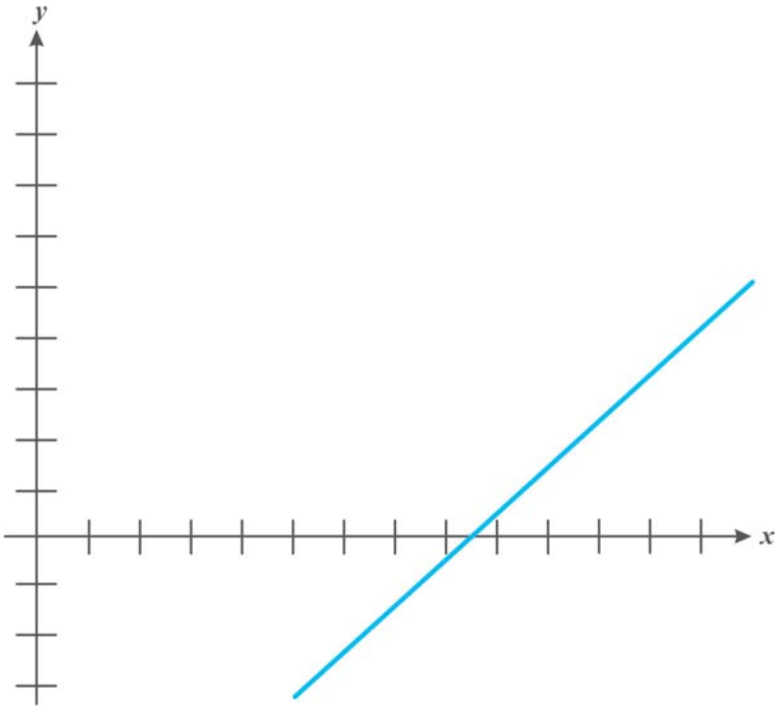
Pela análise realizada podemos dizer que seria a partir do mínimo local 10,21. Observe o gráfico da função lucro bruto:



Veja a seguir o gráfico da função derivada $LB' = 0{,}5016x^2 - 8{,}612x + 35{,}635$:



Agora, note o gráfico da derivada segunda expressa por $LB'' = 1{,}0032x - 8{,}612$, mostrado a seguir:



Observe também um resumo da situação no Quadro 2, apresentado a seguir:

INTERVALO	4 < x < 6,95	6,95 < x < 10,21	10,21 < x < 15
Valor (livre)	x = 5	x = 8	x = 13
Sinal de **f'(x)**	5,115 > 0 **f'(x) > 0**	-1,1586 < 0 **f'(x) < 0**	8,4494 > 0 **f'(x) > 0**
Conclusão	**Crescente**	**Decrescente**	**Crescente**
Sinal de (x) nos pontos críticos	f ''(6.95) < 0 **(- 1,6335402<0)**	________	f ''(10.2128) > 0 **(1,63348>0)**
Conclusão	Concavidade para baixo (ponto máximo)		Concavidade para cima (ponto mínimo)

Quadro 2: Resultado do domínio analisado
Fonte: Elaborado pela autora

Muitas vezes, necessitamos otimizar a função encontrando seus valores máximos ou mínimos. Vamos esclarecer o significado de alguns termos utilizados:

- O valor máximo absoluto de uma função é o **maior** valor da função em seu domínio.
- O valor mínimo absoluto de uma função é o **menor** valor da função em seu domínio.
- O valor extremo absoluto de uma função é o valor que é ou *max abs* ou *min abs* da função.

Outro aspecto importante que devemos estudar faz referência ao intervalo fechado de uma função contínua. Pois, uma função contínua f num dado intervalo $[a, b]$ tem valores máximos e mínimos absolutos. Para encontrá-los:

- busque os pontos críticos de f em $[a, b]$; e
- avalie f na abscissa do ponto crítico e também nos extremos do intervalo a e b; os valores máximo e mínimo são os maiores e menores valores encontrados.

Note, que basicamente, para encontrarmos os valores extremos da função, precisamos dos pontos críticos e dos extremos do intervalo.

- Somente um ponto crítico no intervalo? Então, precisamos encontrá-lo e usar o teste da segunda derivada para saber se f atinge neste valor um máximo ou um mínimo.
- O intervalo é fechado? Então, avalie f em todos os pontos críticos e extremos do intervalo; os valores máximo e mínimo são os maiores e menores valores encontrados.

Pontos Extremos Relativos

Numa curva temos o ponto **mais alto** e o ponto **mais baixo**. O ponto mais alto denominamos de ponto máximo relativo e o ponto mais baixo de uma região de uma curva nomeamos de ponto mínimo relativo.

Concavidade é a ideia do gráfico "entortar" para baixo (como um franzido) ou "entortar" para cima (como um sorriso). Como mostra a Figura 2:

Figura 2: Concavidade para cima e para baixo
Fonte: Elaborado pela autora

O momento dessas alterações de "para cima" para "para baixo", ou ainda, de "para baixo" para "para cima" chamamos de ponto de inflexão. Observe na Figura 3.

Figura 3: Situação em que o ponto de inflexão acontece
Fonte: Elaborado pela autora

É importante relembrarmos que números **críticos** de uma função são as localizações onde o valor da derivada é zero (inclinação horizontal para a tangente) ou a derivada é indefinida (inclinação indefinida para a tangente ou a derivada não existe).

Exemplo 3

Considerando que a plantação de eucalipto da empresa que você administra tem permissão para produção para t anos. Sabe-se que o valor da madeira cresce proporcionalmente à raiz quadrada de t, enquanto o custo de manutenção é proporcional a t. Queremos encontrar o tempo necessário para que a produção atinja o seu máximo.

Resolução:

Com base nas informações, podemos construir a função, a seguir, que descreve o valor da plantação após *t* anos onde *a* e *b* são constantes. Acompanhe:

$$V(t) = a\sqrt{t} - bt$$

milhões de reais para t > 0

E, utilizando a função a seguir, vamos encontrar quando a função atinge seu máximo.

Para t > 0

$$V(t) = 96\sqrt{t} - 6t$$

Lembre-se que

$$\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$$

$$V(t) = 96t^{\frac{1}{2}} - 6t$$

$$V'(t) = 48t^{\frac{-1}{2}} - 6$$

Agora, fazendo a derivada igual a zero, vamos encontrar o valor de t:

$$0 = 48t^{\frac{-1}{2}} - 6$$

$$6 = 48t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{6}{48} = t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{1}{8} = t^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\sqrt{t} = 8$$

$$(\sqrt{t})^2 = (8)^2$$

$$\boxed{t = 64}$$

Como existe um único ponto crítico, vamos usar o teste da segunda derivada:

$$V'(t) = \frac{48}{\sqrt{t}} - 6$$

$$= 48t^{\frac{-1}{2}} - 6$$

$$V''(t) = -24t^{\frac{-3}{2}}$$

Vamos avaliar em t = 64:

$$V''(t) = -24t^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{-24}{\sqrt{t^3}}$$

$$V''(64) = \frac{-24}{\sqrt{(64)^3}} = \frac{-24}{512}$$

Claramente percebemos que V"(64) é negativo. Logo, V(t) tem um máximo em t = 64.

O valor da plantação atinge o máximo em 64 anos. Qual será o valor nesta época?

Como a função descrevia a quantia em milhões de reais, V(64) = 384 significa que a resposta é R$ 384.000,00!

Complementando.....

Divirta-se e aprofunde seus estudos passeando pelas leituras indicas a seguir:

- *Matemática básica para decisões administrativas* – de Fernando Cesar Marra e Silva e Mariângela Abrão.
- Derivadas – para saber mais consulte o *site* <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/calculo/derivada/derivada1.htm>.
- Cálculo de máximo e mínimo – busque mais informações consultando o *site* <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm01.htm>.
- Teste da primeira derivada – para saber mais, consulte <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm02.htm>.
- Teste da primeira derivada – explore mais sobre o tema no *site* <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/maxmin/mm03.htm>.

Atividades de aprendizagem

1. Encontre a derivada das funções abaixo:

   a) $f(x) = (3x + 1)^2$

   b) $f(x) = \sqrt{13x^2 - 5x + 8}$

   c) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

   d) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x-1}$

2. Resolva o problema abaixo utilizando seus conhecimentos de máximos e mínimos e também de derivada.

   Imagine que um setor da prefeitura de sua cidade cuida de um pomar para suprir as necessidades de maças das escolas municipais da região. Sabe-se que há 50 árvores (macieira) no pomar e que cada macieira produz 800 maças. Os agrônomos informaram que para cada árvore adicional plantada no pomar, a produção por arvore diminuirá em 10 frutas.

   Encontre a quantidade de árvores (macieiras) que devem ser acrescidas (plantadas) no pomar de modo a maximizar a produção de maçãs.

3. Funcionários da fabrica do estado, se reuniram para angariar fundos para organizar a escola que atenderá os jovens e adultos da região. Para tanto, se propuseram a vender artigos bordados, produzidos por voluntários (na maioria esposas dos funcionários). Sabe-se que o lucro resultante da venda de x unidades de um artigo é dado por **$P(x) = 0{,}0002x^3 + 10x$**.

   Encontre o lucro marginal para uma produção de 50 unidades.

Resumindo

Nesta Unidade, esforços foram destinados a captar sua atenção e sensibilizá-lo para a compreensão do conceito de derivada. Exemplos ilustraram a ideia de derivada e sua aplicação. As regras de derivação foram apresentadas como um caminho mais curto de se chegar à derivada de uma função sem fazer uso de limite da taxa de variação da função. Problemas de otimização ilustraram a aplicabilidade do conceito de derivada.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) 6(3x+1)

   b) $\dfrac{26x-5}{2\sqrt{13x^2-5x+8}}$

   c) $\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

   d) $\dfrac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$

2. Com mais 15 árvores plantadas a produção atingirá o seu máximo que é 42 250.

3. R$ 11, 50 por unidade

Considerações finais

Bem, vamos ficar por aqui.

Claro que seria interessante continuarmos pelos caminhos mais profundos de Cálculo, mas terá de ficar para outra oportunidade.

Recomendamos, entretanto, que visitem as páginas do livro "Matemática Básica para Decisões Administrativas", que trata sobre o temas integrais. Em uma maneira bem simples poderíamos pensar que a integral de uma função desfaz o que a derivada fez. Ficou curioso? Anime-se e mergulhe nas páginas do livro.

Desejamos a todos muito sucesso nos estudos e no trabalho!

Referências

BOULOS, Paulo. *Cálculo diferencial e integral*. V. 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo*: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos , 1999.

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. *Cálculo com aplicações*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MARRA e SILVA, Fernando Cesar; ABRÃO, Mariângela. *Matemática básica para decisões administrativas*. São Paulo: Atlas, 2007.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira; HAZZAN, Samuel. *Cálculo*: funções de uma variável. 3. ed. São Paulo: Atual, 1987.

WHIPKEY, Kenneth L.; WHIPKEY Mary Nell. *Cálculo e suas múltiplas aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

Minicurrículo

Maria Teresa Menezes Freitas

Graduada em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (1974), especialista em Matemática Superior pela Universidade Federal de Uberlândia com parceria com Universidade Federal de Minas Gerais (1982), mestre em Educação pela Universidade Federal de Uberlândia (2000) e doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2006). Atualmente é professora associada 2 da Universidade Federal de Uberlândia da Faculdade de Matemática e diretora do Núcleo de Educação a Distância da UFU, sendo representante da Universidade Aberta do Brasil – UAB. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática. Atua principalmente nos seguintes temas: Formação de Professor de Matemática, Educação Matemática, Professor de Matemática, Escrita na Formação do Professor e Desenvolvimento Profissional.