Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# História da Matemática através de Problemas

Volume 1 | Mário Olivero

UFF – Instituto de Matemática
EB – Centro de Estudos de Pessoal

Curso de Instrumentação para o Ensino da Matemática

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

## Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725




## Material Didático


**ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO**
Mário Olivero

**CAPA**
Eduardo Bordoni

**PRODUÇÃO GRÁFICA**
Patricia Seabra


O material constante desta disciplina, História da Matemática através de Problemas, foi produzido sob o auspício de Convênio de cooperação técnico-acadêmica entre o Exército Brasileiro e a Universidade Federal Fluminense.


O48h Olivero, Mário.
História da matemática através de problemas / Mário Olivero. – Rio de Janeiro : UFF / CEP – EB, 2007. 160p. – (Curso de Instrumentação para o Ensino de Matemática).

ISBN: 85-98569-36-4

1. Matemática – História. 2. Matemática – Problemas.

CDD - 510.09

Publicado por: Centro de Estudos de Pessoal (CEP)





**2009/2**

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação**
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

# Apresentação

Há alguns anos eu resolvi aprender a jogar tênis. Inscrevi-me em um curso e passei a receber duas aulas semanais. Foi uma ótima experiência. Hoje eu jogo bastante bem, gosto muito do esporte e ganhei uma grande diversão. No entanto, a experiência deu-me mais do que isso.

Sou professor de Matemática há muito tempo e as aulas de tênis deram-me a oportunidade de relembrar o outro lado da atividade. Por exemplo, recordei-me da importância dos exercícios repetidos para assimilação de novos conteúdos. Tive a felicidade de encontrar um professor que me deu atenção e encorajamento, corrigindo minhas (muitas) imperfeições com paciência e bom humor. Reavaliei a importância da auto-disciplina para atingir objetivos estabelecidos. Com certeza, a experiência afetou minha vida profissional. Passei a ser mais tolerante e generoso como professor. Aprender algo novo ajudou-me a levar em conta a perspectiva do aluno, que precisa ser encorajado, aprender a valorizar a organização e a disciplina, precisa encontrar alegria na atividade de aprender e descobrir motivações para atingir os objetivos que lhe são propostos.

Você se encontra numa posição semelhante à minha, nesse momento. Está prestes a vivenciar uma experiência de aprendizado. Retomar os estudos requer uma atitude corajosa. Parabéns! Você merece uma recepção calorosa. Nesta disciplina, *História da Matemática Através de Problemas*, nosso principal objetivo é que você goste ainda mais de Matemática.

Aqui, você terá a oportunidade de ver a Matemática sob um novo prisma. Perceberá como as diferentes áreas matemáticas, tais como Álgebra, Geometria, Cálculo, Análise Matemática e outras, se relacionam e se influenciam, assim como certas questões (os tais problemas da Matemática) motivaram (e continuam motivando) novas descobertas. É bem provável que você passe a gostar ainda mais dos diversos temas com que lidamos na Matemática, uma vez que descobrirá como eles surgiram e se desenvolveram.

É claro que num projeto como esse certas opções devem ser feitas. Não é possível cobrir todos os temas, mesmo aqueles de maior importância. A escolha daqueles que representarão o nosso painel foram feitas em função de meu gosto pessoal (sim, todos nós temos nossas preferências matemáticas) assim como das minhas muitas inabilidades. De qualquer forma, se o conteúdo apresentado motivá-lo a buscar ainda mais informações sobre aquilo que ficou faltando, despertando a sua curiosidade, dar-me-ei por satisfeito.

Essa experiência deverá afetar, também, sua atuação profissional. Após cursar a disciplina você estará melhor preparado para apresentar os conteúdos de Matemática, colocando-os em um contexto histórico e mostrando suas conexões com outros temas. Seja, portanto, bem-vindo à *História da Matemática Através de Problemas*!

# Sumário

# Visão Geral da Disciplina

Unidade 1: Três Famosos Antigos Problemas

Assunto: Principais características da Matemática. Importância dos problemas e questões para seu desenvolvimento.

Onde encontrar: Textos 1 e 2.

Carga horária: *4h*

Unidade 2: O Dilema de Pitágoras

Assunto: Matemática do Antigo Egito e da Mesopotâmia. Diferenças entre a Matemática desses povos e a Matemática grega. Os pitagóricos.

Onde encontrar: Textos 3 a 5.

Carga horária: *6h*

Unidade 3: Teoria das Proporções de Eudoxo

Assunto: Primeira crise da Matemática: segmentos não-comensuráveis. Conceito de infinito. Solução para a crise dada por Eudoxo.

Onde encontrar: Textos 6 a 9.

Carga horária: *6h*

Unidade 4: O Quinto Postulado da Geometria Euclideana

Assunto: Elementos de Euclides. Problema do Quinto Postulado de Euclides. Geometrias não-euclidianas.

Onde encontrar: Textos 10 a 15.

Carga horária: *7h*

Unidade 5: Resolução das Equações Algébricas

Assunto: Matemática árabe e indiana. Surgimento do zero na Matemática. Solução para o problema das equações cúbicas.

Onde encontrar: Textos 16 a 19.

Carga horária: *7h*

Unidade 6: Uma Nova Matemática para um Mundo Novo

Assunto: Panorama matemático antes do Cálculo. O Cálculo segundo Newton e Leibniz.

Onde encontrar: Textos 20 a 23.

Carga horária: *7h*

Unidade 7: A Equação de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Assunto: Características da Matemática do século 17 e 18. A Matemática de Euler. Notação matemática.

Onde encontrar: 24 e 25.

Carga horária: *7h*

Unidade 8: Construção dos Números Reais – Cauchy e Dedekind

Assunto: Características da Matemática do fim do século 18 e início do século 19. A Matemática de Gauss. Cortes de Dedekind. Contribuições de Cauchy e Weierstrass para a Análise Matemática.

Onde encontrar: 26 a 30.

Carga horária: *6h*

Unidade 9: Teoria de Conjuntos e Números Transfinitos de Cantor

Assunto: Características da Matemática no fim do século 19 e início do século 20. Contribuições feitas por Cantor e Hilbert.

Onde encontrar: Textos 31 a 34.

Carga horária: *6h*

Unidade 10: Números e Codificação de Mensagens

Assunto: Números primos. Criptografia.

Onde encontrar: Textos 35 a 38.

Carga horária: *4h*

# Unidade 1

## Três Famosos Antigos Problemas

*Nesta unidade didática, você conhecerá três grandes problemas da antigüidade que desempenharam papéis relevantes no desenvolvimento da Matemática. Mas, primeiramente, vamos colocar certas coisas em perspectiva. Afinal de contas, precisamos de algum tempo para nos conhecer melhor.*

*Assim, antes de nos lançarmos nesta jornada, é importante considerar a questão tratada em nosso primeiro texto.*

### Texto 1: O que é Matemática?

Na verdade, pretendemos que você pense um pouco sobre esse tema, que demanda mais esforço do que podemos dispor em alguns minutos. Por exemplo, há um livro de cerca de quinhentas páginas, escrito por Courant e Robbins, cujo título é, precisamente, "O que é Matemática?"

Veja, a Matemática lida com duas idéias fundamentais: multiplicidade e espaço. Desde os primórdios os seres humanos se valem desses conceitos. Contar as reses de um rebanho ou os frutos de uma colheita, avaliar a área de campo de pastagem, de um campo a ser cultivado ou o volume de um vaso contendo grãos são tarefas que demandam conceitos matemáticos.

Dessa forma, podemos dizer que *números* e *figuras geométricas* são elementos fundamentais da Matemática. Podemos até ensaiar uma resposta: a Matemática é a ciência dos números e figuras geométricas, assim como as relações que possam existir entre eles.

Mesmo sentindo que a resposta contém parte da verdade, não podemos deixar de percebê-la incompleta. Nossa expectativa é que, ao fim do estudo da disciplina, você possa ter construído sua própria resposta para a questão.

## 1.1 Algumas características da Matemática

Agora, mudando um pouco o foco da nossa atenção, observe que, apesar da dificuldade que a maioria das pessoas tem para explicar o que é a Matemática, não é muito difícil detectar quando há "matemática" em determinada situação. Quem nunca usou a expressão "tão certo quanto dois e dois são quatro"?

É comum, no entanto, que as pessoas tenham uma visão parcial do que constitui a Matemática. Vejamos alguns aspectos que a caracterizam e distinguem das demais ciências.

Geralmente, quando se trata de Matemática, os números são as primeiras coisas mencionadas, não acha? Contudo, apesar da importância que eles têm, a Matemática não lida apenas com *números*, mas também com *formas*, assim como estuda as *relações* entre esses objetos.

O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher (1898 - 1970) aplicou em suas obras vários truques de ilusão ótica e perspectiva destorcida e repetições de certos padrões, conseguindo assim um forte impacto visual. Entre seus temas favoritos estão a metamorfose, a representação de infinito e situações paradoxais.

Por exemplo, ao observarmos algumas gravuras de Escher, não podemos deixar de notar a maneira como ele explora as simetrias e usa os padrões, o que dá um certo ar "matemático" às gravuras. Eis aqui uma de suas citações: "Para mim, permanece aberta a questão se (este trabalho) pertence ao mundo da matemática ou da arte."

Muito bem, vamos aumentar nossa coleção de informações sobre a Matemática: ela lida com *números* e *formas*, estuda *padrões* e busca *relações* entre seus objetos. Enfim, trata com uma multitude de idéias, submetendo-as a diferentes pontos de vista, comparando-as e buscando suas inter-relações.

É como um cenário onde uma enorme diversidade de atitudes, de perspectivas, se opõem e se influenciam mutuamente. O particular ilustra o geral, o contínuo se opõe ao discreto, períodos em que a atitude mais formal prevalece se intercalam com períodos onde a intuição abre novos caminhos e assim por diante.

Além disso, Matemática é uma ciência que difere de todas as outras na forma como estabelece a *verdade*. A verdade científica, na Matemática, é estabelecida a partir de um conjunto mínimo de afirmações, chamadas *axiomas*, por meio de um conjunto de regras lógicas bem estabelecidas. É o chamado *método dedutivo*.

Nas outras ciências, a verdade é estabelecida por experimentos científicos. É por isso que, em muitos casos, uma nova teoria toma o lugar da anterior, que já não consegue explicar os fenômenos que prevê.

Basta comparar, só para se ter um exemplo, a evolução histórica do conhecimento sobre o universo, em particular sobre o funcionamento do sistema solar, com a estabilidade vivida na Matemática, simbolizada nos *Elementos*, de Euclides, uma coleção de livros escritos em, aproximadamente, 250 a.C. Os *Elementos* só tiveram menos edições do que a Bíblia, e são tão corretos hoje como quando foram escritos.

## 1.2 A diversidade matemática

Um outro aspecto que chama a atenção sobre a Matemática é sua *diversidade*. Em muitas línguas, a palavra matemática é usada no plural. Há tantas ramificações e sub-áreas na Matemática contemporânea que é praticamente impossível acompanhar os desenvolvimentos mais recentes em todas as suas frentes de pesquisa.

Essa característica da Matemática, ter uma face voltada para questões de cunho exclusivamente matemático – que costuma ser chamada de matemática pura – e outra voltada para os problemas surgidos nas outras ciências – a matemática aplicada – a torna uma ciência cheia de surpresas. Para espanto até de muitos de seus criadores, teorias que nasceram no campo da matemática pura, sem nenhuma aparente aplicabilidade, podem encontrar seu caminho aplicado, e vice-versa. É como na música, quando temas sacros e profanos são trocados.

Finalmente, uma das características da Matemática, com a qual nos ocuparemos agora, até o fim desta unidade, é a ânsia de resolver problemas. Podemos dizer até que se trata da principal atividade dos matemáticos. Um matemático feliz é aquele que acabou de resolver um bom problema e ao fazer isso descobriu mais uma porção de novos problemas para pensar.

Você verá que, ao longo do tempo, algumas questões desafiaram a criatividade de gerações de matemáticos, norteando, estimulando a criação matemática. Essas questões funcionam como molas propulsoras, movendo as fronteiras do conhecimento cada vez mais adiante, como no caso de Alexandre Grothendieck.

## 1.3 Um grande matemático do século 20

Grothendieck passou os anos de 1953 a 1955 na Universidade de São Paulo.

Alexandre Grothendieck nasceu em 1928, em Berlim, e mudou-se para a França em 1941. Seus trabalhos inovadores tiveram grande impacto em diversos campos da Matemática, devido especialmente ao seu alto grau de abstração. Em 1966 recebeu a *Medalha Fields*, que é assim como um Prêmio Nobel da Matemática.

O número de outubro de 2004 da revista *Notices of the American Mathematical Society* traz um artigo sobre um dos mais relevantes matemáticos do século 20, Alexandre Grothendieck.

Nesse artigo aprendemos que os primeiros anos de Grothendieck, durante a Segunda Guerra, foram caóticos e traumáticos e sua formação educacional não fora nada boa. No entanto, a atitude de enfrentar os problemas, as questões da Matemática, já estava presente. Ele escreveu suas memórias, intituladas *Récoltes et Semailles* (algo como *Colheita e Semeadura*), em que faz o seguinte comentário:

> O que menos me satisfazia, nos meus livros de matemática [do liceu], era a total ausência de alguma definição séria da noção de comprimento [de uma curva], de área [de uma superfície], de volume [de um sólido]. Prometi a mim mesmo preencher esta lacuna assim que tivesse uma chance.

Detectar a falta de precisão na definição desses conceitos, quando ainda era um aluno do ensino médio, é uma prova da profunda percepção matemática dessa extraordinária pessoa.

*Durante o estudo da disciplina, você irá verificar como são relevantes as preocupações apontadas por Alexandre Grothendieck. Mas, está na hora de refletir um pouco sobre as idéias expostas até aqui.*
*Vamos à primeira atividade.*

Atividade 1

Para ajudá-lo nessa tarefa, tente dar sua própria resposta à questão "o que é Matemática?" Guarde esta resposta para relê-la quando tiver completado o estudo da disciplina.

Faça, também, uma lista sucinta das características da Matemática apresentadas no texto. Você poderia acrescentar outras?

*Tudo que você estudou até aqui constitui uma introdução para o tema do próximo texto: três problemas famosos e antigos, diretamente relacionados a uma das características mais valorizadas em um matemático: a criatividade. Essa característica se manifesta, especialmente, na resolução de problemas.*

*Em muitos casos, a atitude de inconformismo diante das respostas dadas às antigas questões pelas gerações anteriores marcou o início da carreira de matemáticos famosos, como teremos a oportunidade de ver no decorrer de nossa jornada.*

## Texto 2: Três Famosos Problemas

O primeiro passo na resolução de um problema consiste na sua correta formulação. Ou seja, para resolver um problema, é melhor saber, precisamente, o que devemos fazer e do que dispomos para chegar à solução.

Os três problemas clássicos da Geometria grega são sobre como realizar uma construção geométrica usando apenas régua e compasso. Veja seus enunciados:

> Trissecção do ângulo:
>
> Dado um ângulo, construir um outro ângulo com um terço de sua amplitude.
>
> Duplicação do cubo:
>
> Dado um cubo, construir outro cubo com o dobro do volume do anterior.
>
> Quadratura do círculo:
>
> Dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área.

Antes de falarmos sobre eles, vamos entender o significado da expressão "construção com régua e compasso".

Note que esses problemas estão colocados no contexto da geometria formulada por Euclides. Por isso, as construções com régua e compasso são também conhecidas por "construções euclidianas", apesar de os termos "régua" e "compasso" não aparecerem nos livros de Euclides.

Assim, as soluções deveriam obedecer apenas certos *procedimentos*, por assim dizer, seguir regras muito bem estabelecidas.

Veja, na teoria euclidiana, a régua pode ser usada para *construir um segmento, tão longo quanto se queira, que contenha dois pontos dados*. Em particular, essa régua não é graduada. Ou seja, não podemos utilizá-la para medir.

Já o compasso pode ser usado para construir a circunferência de centro em um dado ponto $A$ e que passa por um dado ponto $B$. Assim, o compasso deve ter pernas tão compridas quanto precisarmos.

*Procure, então, realizar as atividades a seguir.*

### Atividade 2

Usando régua e compasso, construa a mediatriz de um segmento dado. Você sabe dividir um segmento dado em uma outra proporção qualquer, assim como $2$ por $3$?

Construa também um triângulo equilátero. Você poderia construir mais um polígono regular, usando apenas régua e compasso?

Quais polígonos regulares podem ser construídos com régua e compasso?

*Vamos, agora, falar um pouco do primeiro problema.*

## 2.1 A trissecção do ângulo

Repare que, usando régua e compasso, não é difícil construir a bissetriz de um ângulo dado. Basta construir uma circunferência com centro no vértice do ângulo, marcando sobre os lados do ângulo, dois pontos (eqüidistantes do vértice). Em seguida, construindo dois círculos de mesmo raio, com centros nos respectivos pontos obtidos nos lados do ângulo, determine o ponto que, juntamente com o vértice original, define a reta bissetriz.

Tal sucesso encoraja a consideração do próximo passo: dividir o ângulo em três partes iguais. Para certos ângulos específicos, o problema tem solução. Como é possível construir, com régua e compasso, um triângulo eqüilátero, podemos construir um ângulo de trinta graus, que divide o ângulo reto em três partes iguais. No entanto, o problema proposto nos pede para estabelecer um procedimento que funcione *para qualquer* ângulo dado.

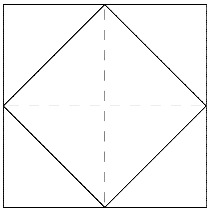
Muitas tentativas de solução para o problema foram dadas, mas cada uma delas apresentava uma falha. Também, pudera, o problema não tem solução. Você deve notar que demonstrar que não há uma solução (que sirva para um ângulo dado qualquer) é uma tarefa muito difícil. O problema era conhecido dos antigos gregos e a resposta (negativa) só foi obtida no século XIX, pelo francês Pierre Laurent Wantzel. Apesar da genialidade de Wantzel, é preciso dizer que sua solução depende de conceitos algébricos desenvolvidos ao longo de vários séculos, por várias gerações de matemáticos. Ou seja, o problema só foi solucionado quando se mudou o foco da questão, passando-se a buscar uma prova de que não tem solução.

*Wantzel foi, ainda, o responsável pela resposta, também negativa, a outro problema: a duplicação do cubo.*

## 2.2 A duplicação do cubo

Nesse caso, a situação é mais radical. Enquanto certos ângulos especiais podem ser divididos em três, usando régua e compasso, apesar de não haver um método geral que sirva para um ângulo genérico, não se pode duplicar *qualquer* cubo. Veja, o problema é o seguinte: dado um cubo (ou seja, conhecendo o lado de um dado cubo) devemos construir, com régua e compasso, um cubo que tenha, exatamente, o dobro de seu volume.

Novamente, os gregos conheciam uma *versão simples* do problema. Sócrates foi um dos mais originais pensadores de que temos notícia, mas tudo que sabemos de sua obra nos foi legado por Platão, que estudara com ele. Apesar de não ter sido um matemático, Sócrates é retratado em um dos diálogos de Platão, numa conversa com Ménon sobre a virtude, ensinando um jovem e inculto escravo a *duplicar um quadrado.*



Isto é, dado um quadrado, construir com régua e compasso um novo quadrado que tenha o dobro de sua área. Na primeira tentativa, o jovem dobra o lado do quadrado dado e Sócrates o faz ver o erro cometido. Em seguida, Sócrates mostra-lhe a figura de um quadrado com os pontos médios de seus lados unidos por segmentos que formam um quadrado menor. Então, Sócrates *ajuda* o rapaz a lembrar-se que a área do quadrado construído sobre a diagonal do quadrado menor tem o dobro de sua área.

*Finalmente, o último problema consiste em construir com régua e compasso um quadrado de área igual à de um círculo dado. Por isso o nome quadratura do círculo.*

## 2.3 A quadratura do círculo

Novamente, o problema só foi resolvido muito tempo depois de ter sido proposto. Em 1882, o matemático alemão Ferdinand von Lindemann demonstrou a impossibilidade de efetuar a quadratura do círculo usando apenas construções com régua e compasso.

*Como isso foi feito? Apostamos que você está curioso. Realmente, vamos gastar o tempo que nos resta desta unidade para que você tenha ao menos uma idéia geral dos argumentos dados por Wentzel e por Lindemann.*

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) Seu lema era: *Pouca sed matura*, algo como "Pouco, porém maduro". Suas contribuições cobrem quase todas as áreas da Matemática, como Geometria, Teoria de Números e Análise Complexa. Foi também físico e astrônomo. O primeiro problema importante que ele resolveu, aos 19 anos, foi a descoberta de uma construção com régua e compasso de um polígono de 17 lados. Veja, desde o período clássico da Matemática na Grécia antiga, os únicos polígonos regulares que podiam ser construídos com régua e compasso eram o triângulo, o quadrado e o pentágono.

## 2.4 Algebrização dos problemas geométricos

Como podemos demonstrar que é impossível efetuar uma determinada construção com régua e compasso? Veja que, para mostrar que uma certa construção é possível, basta fazê-la.

O caminho para as demonstrações foi aberto por um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss. A idéia é algebrizar o problema. Por exemplo, para duplicar o quadrado de lado $1$, devemos construir um quadrado de lado $\sqrt{2}$. Mas, como podemos construir o quadrado de lado $1$, temos a sua diagonal que mede $\sqrt{2}$.

O que Wantzel conseguiu provar, a partir das idéias de Gauss, foi:

Se $C$ é um ponto obtido por uma construção com régua e compasso a partir de dois pontos dados $A$ e $B$, então o quociente $q$ das distâncias $AC$ e $AB$ tem as seguintes propriedades:

1. $q$ é a raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, não todos nulos. Nesse caso $q$ é chamado de um *número algébrico*.

2. Se $p(x)$ for um polinômio de grau mínimo entre todos os polinômios com coeficientes inteiros, não todos nulos, dos quais $q$ é uma raiz, então o grau de $p(x)$ é uma potência de 2.

Veja como a duplicação do quadrado se encaixa nesse esquema. O número $\sqrt{2}$ pode ser construído com régua e compasso, pois é a diagonal de um quadrado de lado $1$. Realmente, $\sqrt{2}$ é uma das raízes do polinômio $x^2 - 2$, de coeficientes inteiros.

Ora, para duplicarmos o cubo de lado $1$, teríamos que construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$. Esse número algébrico é raiz do polinômio $x^3 - 2$, que tem grau (mínimo) $3$, que não é uma potência de $2$.

No caso do problema da divisão de um ângulo em três partes iguais, a algebrização do problema também resulta em uma equação cúbica.

Na questão da quadratura do círculo (de raio $1$, por exemplo,) teríamos que construir com régua e compasso um quadrado cujo lado medisse $\sqrt{\pi}$. Lindemann mostrou que $\pi$ não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos. Ou seja, $\pi$ não é um número algébrico e, portanto, $\sqrt{\pi}$ também não é um número algébrico.

*Estamos chegando ao fim dessa unidade. Esperamos que sua curiosidade a respeito dos diversos aspectos da Matemática tenha sido aguçada e apresentamos mais duas atividades.*

## Atividade 3

Faça uma lista sucinta das diferentes características da Matemática apresentadas nessa unidade e acrescente algumas por você mesmo.

Atividade 4

Na sua opinião, o que teria incomodado tanto o matemático Grothendieck na leitura dos livros de Matemática em que estudou? Se estivesse estudando nos livros que nós usamos hoje em dia, ele teria uma opinião diferente?

*A história desses três problemas clássicos da Matemática mostra como, em muitos casos, a importância não está na resposta de uma certa questão, seja ela positiva ou não, mas nos métodos usados para chegar até ela. Não devemos nos decepcionar com o fato de não podermos duplicar o cubo, por exemplo, pois a profundidade e a riqueza das idéias desenvolvidas para chegar à resposta negativa nos compensam largamente.*

*É nossa expectativa, também, que o enfoque sobre os problemas passe a fazer parte de sua maneira de ver a Matemática, pois nisso consiste, em enorme parte, a sua vitalidade e importância.*