Unidade 2

O Dilema de Pitágoras

Nesta unidade didática você descobrirá como a Matemática tornou-se uma ciência, no sentido de ter uma maneira bem definida de se estabelecer a verdade.

Isso ocorreu com o surgimento da cultura grega, por volta de 600 a.C., quando os primeiros matemáticos de que temos notícia passaram a fazer e responder perguntas que começam com "por que", além daquelas que começam com "como".

No entanto, após os primeiros triunfos dessa jovem força criativa, surgiu uma grande crise, conhecida como o dilema de Pitágoras.

Texto 3: A Matemática dos "Esticadores de Cordas"

Para entender melhor essa história, você precisa conhecer um pouco o conteúdo matemático produzido pelos povos que habitavam as margens do rio Nilo, na África, e a região entre os rios Tigre e Eufrates, no Oriente Médio, cujas culturas antecederam a grega e, certamente, a influenciaram.

Uma das mais fascinantes civilizações antigas de que temos notícia desenvolveu-se às margens do rio Nilo, no norte da África – a civilização egípcia.

Todos nós sabemos como foi requintada a cultura desse povo que adorava gatos, construía pirâmides monumentais para enterrar seus reis embalsamados – os faraós – que eles acreditavam serem descendentes de seus deuses.

Entre tantas coisas dignas de nota a respeito dos antigos egípcios está o fato de eles terem desenvolvido uma forma de escrita – os hieróglifos – deixando-nos, No primeiro volume da coleção *Mar de Histórias*, uma antologia do conto mundial, organizada por Aurélio Buarque de Holanda e Paulo Rónai, editado pela Nova Fronteira, há um conto egípcio, chamado *A história de Rampsinitos*.

assim, relatos e registros de suas conquistas culturais.

Aristóteles acreditava que a atividade matemática surgira no Egito, criada por seus sacerdotes, uma vez que eles dispunham de tempo ocioso.

Por mais interessante que seja essa possibilidade, devemos levar em conta a versão dada por Heródoto, chamado de "pai da História". Ele afirmava que a Geometria havia sido inventada no Egito, devido às cheias anuais do rio Nilo, que fertilizavam suas margens, o que era ótimo para a agricultura. No entanto, quando as águas retornavam ao leito normal do rio, as marcações dos terrenos precisavam ser refeitas.

É por isso que Demócrito, filósofo grego que teria visitado o Egito, chamava os matemáticos locais de "esticadores de cordas", que eles usavam para fazer as demarcações. Veja que geometria é formada pelas palavras gregas *geo*, que quer dizer terra, e *metria*, que quer dizer medida.

3.1 Revelação de obscuros segredos

Há duas importantes fontes de informações sobre o tipo de matemática praticada no antigo Egito. São dois papiros, conhecidos como Papiro de Moscou, que data de 1850 a.C., e Papiro Rhind, de 1650 a.C., que se encontra no Museu Britânico. Apesar do Papiro Rhind iniciar com a promessa de apresentar ao leitor "um estudo completo de todas as coisas, conhecimento de tudo o que existe, revelação dos mais obscuros segredos", os dois são coleções de problemas resolvidos, todos relativamente simples. Os estudantes desses papiros aprenderiam com os exemplos a calcular a quantidade de tijolos usados para construir uma rampa de um dado tamanho ou a quantidade de cestos de pães suficientes para alimentar os escravos necessários para executar uma certa tarefa e assim por diante. Apesar da propaganda um pouco enganosa, esses papiros cumpriam um papel essencial na transmissão dos conhecimentos. Os antigos egípcios conheciam a importância dos exemplos na aprendizagem.

O Papiro Rhind nos revela como eles dividiam, extraíam raízes quadradas, resolviam problemas equivalentes a equações lineares, lidavam com progressões aritméticas. Eles usavam 3.16 como uma aproximação de π. O problema 14 deste documento ensina a calcular o volume de um tronco de pirâmide.

3.2 Um exemplo da aritmética egípcia

Particularmente interessante é a maneira como eles efetuavam o produto de dois inteiros. Para multiplicar, por exemplo, 19 por 42, usamos o algoritmo da multiplicação baseado no sistema numérico posicional. Os egípcios usavam outra coisa, uma vez que não dispunham de tal facilidade. O método deles se baseia no fato que multiplicar e dividir por 2 é relativamente simples.

Começamos dispondo os dois números a serem multiplicados, um ao lado do outro, e construímos uma tabela com duas colunas de números. Veja a seguir.

Para obter a coluna da esquerda, basta seguir dobrando o número anterior a cada nova linha. Na coluna da direita, fazemos o contrário, dividindo o número por dois e colocando-o na linha de baixo, subtraindo 1 antes da divisão nos casos em que ele for ímpar. Nestes casos, fazemos uma pequena marca para destacar aquelas linhas das demais.

Vamos aprender através de um exemplo, como faziam os antigos escribas egípcios. Começamos colocando os números 42 e 19 na primeira linha da tabela e como 19 é um número ímpar, a destacaremos com uma marca.

42	19	/

Para construir a segunda linha, dobramos o número 42 e colocamos o resultado, 84, logo abaixo dele. Subtraindo 1 de 19 e dividindo por 2, obtemos 9 $(= 18/2)$, que colocamos abaixo dele. Essa segunda linha também é marcada, uma vez que 9 é ímpar.

42	19	/
84	9	/

Prosseguimos assim até obter 1 na coluna da direita. Veja, a seguir, a tabela completa.

42	19	/
84	9	/
168	4	
336	2	
672	1	/

Finalmente, para obter o resultado do produto, basta somar os números da coluna da esquerda correspondentes àquelas linhas que foram marcadas:

$$19 \times 42 = 42 + 84 + 672 = 798.$$

Parece mágica, mas não é. Esse algoritmo de multiplicação se baseia na expansão do multiplicando na base 2.

Note que $19 = 16 + 2 + 1 = 2^4 + 2^1 + 2^0$. Isto é, as marcas indicam precisamente as correspondentes potências de 2 que aparecem na composição do número. Veja, se considerarmos apenas a segunda coluna da tabela, trocarmos a marca por 1 e colocarmos 0 na sua ausência, obtemos a expansão de 19 na base 2. Para isso, basta dispor os dígitos obtidos, da direita para a esquerda, escrevendo na horizontal essa nova coluna. Veja a expansão de 19 na base 2:

19	1
9	1
4	0
2	0
1	1

$$(10011)_2.$$

Usamos o índice 2 para distinguir esse número (19 na base dois) de $10\,011$ (dez mil e onze).

Se multiplicarmos um número por uma soma de potências de 2, é claro que o resultado será a soma das correspondentes dobras, dobras de dobras e assim por diante, até completar o resultado.

Apresentamos uma atividade para você praticar.

Atividade 5

Na tabela a seguir, complete as colunas e efetue o produto de 26 por 31 usando o algoritmo apresentado.

31	26	
62	13	/
124	--	--
---	--	--
---	--	--

Note que a expansão de 26 na base 2 é $(11010)_2$, pois $26 = 16 + 8 + 2 = (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (0 \times 2^0)$. Realmente, o primeiro dígito da direita para a esquerda na expansão de 26 na base 2 é zero, indicando que $1 = 2^0$ não faz parte das parcelas, uma vez que 26 é par.

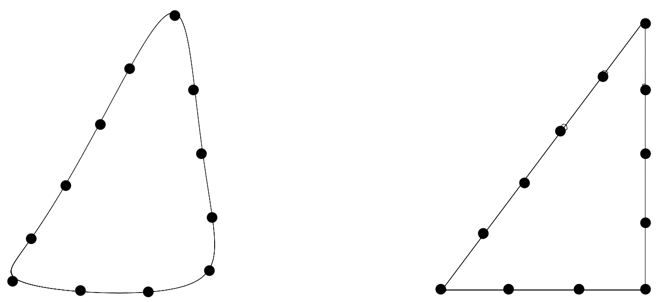
É interessante notar que o algoritmo conhecido pelos egípcios nos ensina a obter a expansão de um dado número na base 2. Usar apenas dois dígitos, 0 e 1, para denotar os números, é a base da construção dos nossos modernos computadores.

3.3 Os egípcios e o Teorema de Pitágoras

Os egípcios sabiam, à sua maneira, o reverso do Teorema de Pitágoras:

> Se os lados a, b e c de um triângulo satisfazem a relação
>
> $$a^2 + b^2 = c^2,$$
>
> então o triângulo é retângulo.

Para obter um ângulo reto, tão necessário para suas construções, eles usavam doze pedaços de corda de mesmo comprimento amarrados uns aos outros, formando um laço. Esticando propriamente esse laço obtinham um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 e o desejado ângulo. Veja a figura a seguir.



No entanto, os egípcios não deixaram nenhum registro de como chegaram à conclusão de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, nem está claro que eles conheciam outros triângulos com a mesma propriedade.

Os matemáticos que viveram na região chamada Mesopotâmia*, entre os rios Tigre e Eufrates, chegaram mais longe do que seus colegas egípcios em suas descobertas matemáticas. A palavra Mesopotâmia vem do grego e significa* entre rios.

Texto 4: Nos Jardins Suspensos da Babilônia

Assim como no caso do Nilo, os rios Tigre e Eufrates garantiam a fertilidade na Mesopotâmia, favorecendo o desenvolvimento da agricultura e o surgimento de civilizações. Mas, enquanto as margens do Nilo foram ocupadas apenas pelos egípcios, a Mesopotâmia foi habitada por vários povos. Entre eles destacamos:

- sumérios – inventaram a primeira escrita de que temos notícia – chamada cuneiforme, registrada em tabuletas de barro;
- babilônios – criaram o primeiro conjunto de leis, o Código de Hamurabi.

Os sumérios foram absorvidos pelos babilônios, que tiveram sua fase mais desenvolvida por volta de 575 a.C., durante o reinado de Nabucodonossor.

4.1 As triplas babilônicas

As conquistas matemáticas desses povos ficaram registradas em tabuletas de argila. A mais famosa é conhecida como Plimpton 322, na qual está registrada uma família de pares de números, que geram *triplas pitagóricas*. Uma tripla pitagórica é formada por três números inteiros a, b e c, tais que $c^2 = a^2 + b^2$. Por exemplo, os dois primeiros números dessa tabuleta são 119 e 169. Realmente, juntos com 120 eles geram um triângulo retângulo.

$$169^2 = 28\,561 \;=\; 14\,161 \;+\; 14\,400 \;=\; 119^2 + 120^2.$$

Portanto, $(119, 120, 169)$ é uma tripla pitagórica.

A tabuleta Plimpton 322 revela uma cultura matemática mais rica do que a egípcia. Os matemáticos da Mesopotâmia usavam um sistema numérico de base 60 (o nosso sistema é decimal, de base 10), bastante adequado ao estudo da astronomia, que eles conheciam muito bem. O uso do sistema numérico sexagesimal foi passado para a cultura grega que o preservou, pelo menos, nessa área. É por isso que dividimos o círculo em 360 graus, a hora em 60 minutos, e assim por diante.

Esses povos sabiam que os números

$$2uv, \quad u^2 - v^2 \;\text{ e }\; u^2 + v^2$$

geram uma tripla pitagórica, pois

$$(u^2 + v^2)^2 \;=\; (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2.$$

Isto é, se tomarmos $u = 12$ e $v = 5$, obtemos a tripla pitagórica $(12^2 - 5^2, 2 \times 12 \times 5, 12^2 + 5^2) = (119, 120, 169)$. No entanto, eles usavam essa técnica apenas para números u e v relativamente primos e tais que seus fatores primos fossem apenas 2, 3 ou 5, os fatores primos de 60.

Atividade 6

Usando $u = 64 = 2^6$ e $v = 27 = 3^3$, gere a segunda tripla pitagórica que aparece em Plimpton 322.

Sabendo que 4601 e 6649 são números na próxima tripla em Plimpton 322, descubra os correspondentes geradores u e v, assim como o terceiro número.

No início do século 6 a. C., a cidade de Mileto, na Jônia, assistiu ao surgimento de uma nova cultura, que dominaria o mundo por aproximadamente mil anos e influenciaria a maneira de pensar e produzir ciência até os nossos dias.

Texto 5: O Surgimento da Matemática Grega

Enquanto egípcios e babilônios armazenavam conhecimentos e os transmitiam às novas gerações sem maiores questionamentos, os matemáticos gregos passaram a buscar razões para explicar os resultados. Além disso, uniram a essa atitude o rigor lógico, que pautava toda sua atitude científica. Foi uma mudança extraordinária.

Outra característica introduzida pelos gregos foi a personalização da Matemática. Tales de Mileto é o primeiro matemático de que temos notícia. Ele deve ter sido um personagem muito especial. As muitas lendas e histórias associadas ao seu nome atestam isso.

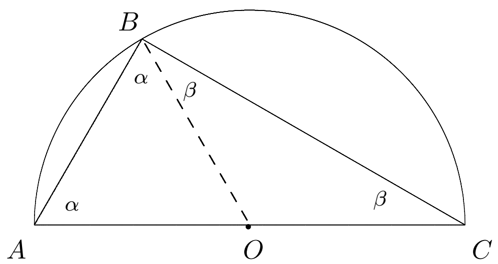
5.1 As contribuições de Tales de Mileto

Os principais resultados matemáticos associados a ele são:

- todo diâmetro divide o círculo em duas partes;
- os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- ângulos opostos pelo vértice, formados por duas retas que se intersectam, são iguais;
- dois triângulos com dois ângulos e um lado iguais são congruentes;
- todo ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Esse último resultado é conhecido como *Teorema de Tales*. Na verdade, todos esses fatos eram conhecidos dos matemáticos das outras culturas que o antecederam. No entanto, cabe a ele o mérito de ter providenciado suas demonstrações.

Veja, no caso de Teorema de Tales, considere o ângulo de vértice em B, inscrito no semicírculo ABC. Usando um segmento auxiliar que liga B ao centro do semicírculo, dividimos ABC em dois triângulos isósceles, pois OA, OB e OC são raios do semicírculo. Veja a ilustração.



Usando o resultado sobre triângulos isósceles, sabemos que os ângulos denotados por α e por β são iguais. Como a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a dois ângulos retos, obtemos

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) \;=\; 2\,\text{ângulos retos.}$$

Portanto, $\alpha + \beta$ é um ângulo reto, como queríamos demonstrar.

Tales também deu contribuições à Filosofia.

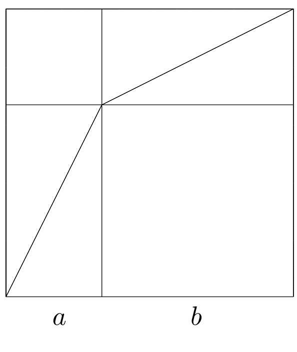
5.2 Pitágoras e o seu teorema

A figura mais lembrada desse período inicial da matemática grega foi, sem dúvida, Pitágoras. Entre os vários resultados atribuídos a ele, o mais famoso é o *Teorema de Pitágoras*, sobre triângulos retângulos. Como você pode ver, esse resultado era, essencialmente, conhecido pelas culturas que o antecederam, mas é atribuída a ele sua primeira demonstração. Conta a história que Pitágoras teria sacrificado cem bois quando descobriu a prova do teorema. Difícil de crer, uma vez que Pitágoras teria sido vegetariano. De qualquer forma, não sabemos exatamente qual foi a demonstração de Pitágoras. A demonstração oficial, digamos assim, apresentada no livro 1 dos Elementos, de Euclides, é o ápice do livro, que parece ter sido escrito para apresentá-la.

5.3 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras

Você conhece a demonstração baseada na identidade algébrica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$? Bem, aqui está ela.

Primeiro, observe que essa identidade pode ser demonstrada pelo diagrama a seguir.

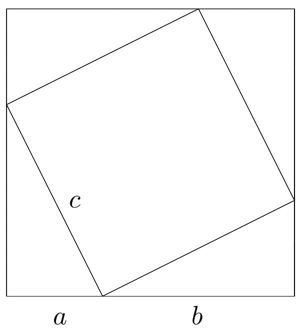


Note que $(a+b)^2$ é a área do quadrado de lado $a+b$, que está dividido em dois quadrados de lados a e b e em quatro triângulos retângulos agrupados dois a dois em dois retângulos de lados a e b.

A área de cada um dos quatro triângulos é $\frac{ab}{2}$. Assim, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos dois quadrados menores com a área dos quatro triângulos:

$$(a+b)^2 \;=\; a^2+b^2+4\left(\frac{ab}{2}\right) \;=\; a^2+2ab+b^2.$$

Agora, um novo arranjo dos triângulos dentro do quadrado maior revela em seu interior um quadrado de lado c, a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b.



Esse diagrama nos diz que

$$(a+b)^2 \;=\; 2ab+c^2.$$

Reunindo ambas informações, obtemos $(a+b)^2 \;=\; a^2+b^2+2ab \;=\; c^2+2ab$. Portanto,

$$a^2+b^2=c^2.$$

Isso conclui a demonstração.

Pitágoras fundou uma irmandade cujos interesses iam além da Matemática. Os membros dessa irmandade atribuíam todas as suas descobertas a ele. Apresentamos, a seguir, uma lista de algumas de suas descobertas, além da demonstração do Teorema de Pitágoras.

5.4 Outras contribuições dos pitagóricos

- Estudo das médias aritmética $\dfrac{a+b}{2}$, geométrica $\sqrt{ab}$ e harmônica $\dfrac{2ab}{a+b}$, assim como as relações entre elas.

- Estudo dos números perfeitos e dos pares de números *amigáveis*. Chamamos (m, n) um par de números inteiros positivos de números amigáveis, se a soma dos divisores próprios de um deles é igual ao outro e vice-versa. Por exemplo, os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 20, 11, 22, 44, 55 e 110, cuja soma é 284. Agora, os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142, cuja soma é 220.

  Na unidade didática 4 você conhecerá um fato muito interessante a respeito dos números perfeitos, aqueles cuja soma de seus divisores próprios é igual a ele mesmo, como $6 = 1 + 2 + 3$.

- Os pitagóricos conheciam os cinco sólidos regulares.

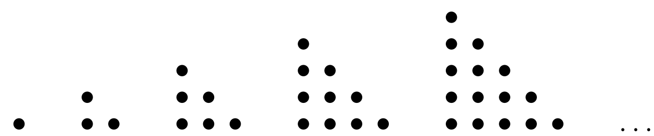
- Eles demonstravam uma grande consideração para os números e buscavam conhecê-los muito bem. Distinguiam entre eles os chamados *números figurados*, que contavam certos arranjos geométricos, como os números triangulares e quadrados.

É interessante como a perspectiva geométrica prevaleceu na cultura grega. Mesmo os resultados que hoje obteríamos por outras maneiras eram estudados de uma forma geométrica.

Veja um exemplo a seguir.

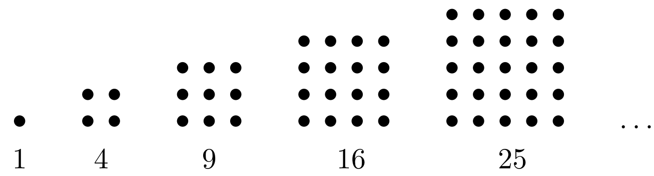
5.5 Números figurados e um resultado da teoria de números

Os números da forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$, para n inteiro maior ou igual a 1, eram conhecidos pelos pitagóricos como números triangulares. Isso porque eles podem ser dispostos num diagrama na forma de triângulos. Aqui estão alguns deles.



1 3 6 10 15

Agora consideraremos os números quadrados. Esses podem ser representados em diagramas na forma de quadrados, daí o seu nome:

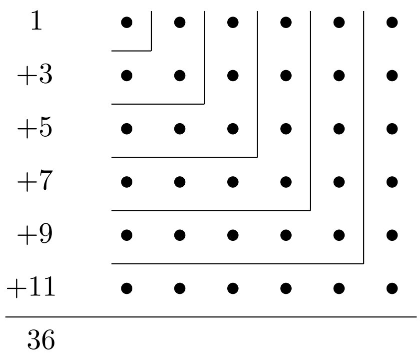


Veja um resultado de teoria de números que os pitagóricos demonstrariam usando, digamos assim, simples geometria.

> Teorema: A soma de uma seqüência de números ímpares, começando de 1, é um número quadrado:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+\ 3+5+7 &= 16 \\ 1+\ 3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

Podemos entender o que está acontecendo olhando o diagrama a seguir, assim como os pitagóricos o fizeram há mais ou menos 2500 anos.



Atividade 7

Use um esquema semelhante para mostrar que a soma de dois números triangulares subseqüentes, como 6 e 10, é um número quadrado.

Atividade 8

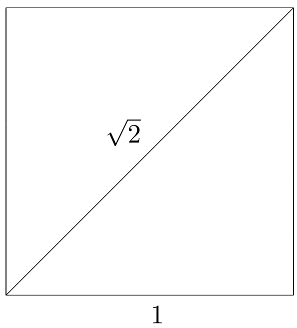
O número $12\,285$ é um elemento de um par de números amigáveis. Descubra o outro número desse par.

5.6 Segmentos comensuráveis e a primeira crise na Matemática

Um conceito usado pelos pitagóricos era a *comensurabilidade* de dois segmentos. Dois segmentos a e b são ditos *comensuráveis* se existir uma unidade de comprimento que meça, de maneira exata, ambos segmentos. Isto é, dados dois segmentos comensuráveis a e b, existe um segmento u e números inteiros p e q tais que $a = p\,u$ e $b = q\,u$. A *razão* de a por b é $\dfrac{p}{q}$.

Os pitagóricos acreditavam que quaisquer dois segmentos seriam comensuráveis. Por isso, a descoberta de um par de segmentos não comensuráveis gerou uma crise matemática sem precedentes. Isso ocorreu quando eles estudaram a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado.

O fato de a diagonal e o lado de um dado quadrado não serem comensuráveis é equivalente a $\sqrt{2}$ não ser um número racional. Realmente, se tomarmos um quadrado de lado, digamos, 1, pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado de sua diagonal será igual a 2.



O fato de $\sqrt{2}$ não poder ser expresso na forma p/q, para números inteiros p e q, significa que não existe segmento u tal que "lado do quadrado" $= q\,u$ e "diagonal do quadrado" $= p\,u$.

Essa descoberta gerou uma crise monumental, pois isso colocava em xeque toda a crença deles, de que a Matemática seria capaz de expressar qualquer coisa da natureza. Devemos lembrar que *número* para os pitagóricos significa *número inteiro* e as possíveis razões seriam os chamados números racionais.

Do ponto de vista prático, todo raciocínio matemático que empregava a suposição de que quaisquer dois segmentos são comensuráveis estava invalidado. Isso deixava um enorme mal-estar, pois os resultados demonstrados usando essa informação estavam, subitamente, invalidados. Era urgente descobrir uma nova cadeia de raciocínio que pudesse substituir esse elo partido e contornar o terrível *imbróglio*.

Quem resolveu o problema foi Eudoxo de Cnido. Mas isso será assunto para a próxima unidade didática. No entanto, antes de terminarmos esta unidade, veja uma demonstração.

5.7 $\sqrt{2}$ não é um número racional

A demonstração de que não há dois números inteiros p e q tais que $\frac{p^2}{q^2}$ seja igual a 2 está no livro *Primeiros Analíticos*, de Aristóteles. Ela é do tipo *redução ao absurdo*. Vamos supor que haja dois inteiros p e q tais que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e produzir uma afirmação absurda.

Realmente, suponhamos que tais números existam. Então, podemos tomá-los de tal forma que eles são primos entre si (não têm fatores comuns). Geometricamente, estamos supondo que a unidade u escolhida é a maior possível. Em particular, isso significa que eles não são ambos pares. Por outro lado, como $p^2 = 2\,q^2$, podemos concluir que p é par, uma vez que seu quadrado é um número par. Assim, existe um número inteiro r, tal que $p = 2\,r$.

Voltando à equação original, temos $(2\,r)^2 = p^2 = 2\,q^2$, donde concluímos que $q^2 = 2\,r^2$. Mas, isso significa que q também é par, o que contraria o fato original que os números p e q não são ambos pares. Fim da demonstração!

As civilizações que se desenvolveram às margens do Nilo e entre o Tigre e o Eufrates não foram as únicas nem as primeiras a produzir e a usar conhecimentos matemáticos. Praticamente todas as civilizações de que temos notícia desenvolveram algum tipo de conhecimento matemático. Dignos de nota são os casos da matemática chinesa, indiana e, no nosso continente, algumas civilizações andinas.

Por razões de ordem prática, consideramos apenas a matemática do Antigo Egito e da Mesopotâmia devido especialmente às suas conexões com a matemática grega. Não deixe de procurar informações sobre as outras culturas assim que tiver alguma oportunidade.