Unidade 3

Teoria das Proporções de Eudoxo

Na unidade anterior, você aprendeu como o surgimento da cultura grega, no início do século IV a.C., mudou profundamente a concepção que o homem tinha do universo, sua maneira de pensar e de produzir ciência.

Ousadia e inovação são palavras que facilmente associamos a este fenômeno cultural que desencadeou uma onda de criatividade, se estendeu por centenas de anos e deu base à nossa concepção de filosofia e de ciência.

Texto 6: A Primeira Grande Crise na Matemática

Os primeiros matemáticos gregos tomaram o volume de conhecimento matemático acumulado ao longo de milênios pelas culturas que floresceram na Mesopotâmia e no Egito e o moldaram à sua maneira.

No entanto, a descoberta de dois segmentos *não comensuráveis*, o lado e a diagonal de um quadrado, gerou uma crise profunda, perturbando essa ordem por eles criada com a força de um cataclismo.

Para entender a razão de tamanha comoção é preciso lembrar da maneira como os gregos passaram a conceber a Matemática, introduzindo o *método dedutivo*. Isso é o que chamamos de *axiomatização da Matemática*. Esta é, basicamente, a mesma maneira como fazemos Matemática até hoje.

Em poucas palavras, é o seguinte: o método dedutivo usa as regras definidas pela lógica (outra invenção dos gregos) para demonstrar as afirmações matemáticas, os teoremas, usando resultados anteriores. Esse processo precisa começar em algum lugar. Os pontos de partida são afirmações aceitas como verdadeiras, chamadas *axiomas*. As teorias matemáticas, isto é, as coleções de teoremas estabelecidos, permanecerão para sempre. Novas teorias podem ser construídas sobre este alicerce, ele as suportará. É uma situação totalmente diferente de outras ciências, como a Biologia ou a Física. Nestas ciências, acontece de novas teorias surgirem derrubando as anteriores.

6.1 A questão dos segmentos não comensuráveis, mais uma vez

Observe que, na terminologia atual, os termos *postulado* e *axioma* querem dizer a mesma coisa, são sinônimos. No passado, no entanto, dava-se o nome de axioma às afirmações que eram "evidentes por si mesmas e tinham que ser admitidas necessariamente como verdadeiras", já postulado "poderia ser demonstrado, mas era tomado como verdadeiro e usado sem demonstração". A priori, a afirmação chamada de postulado ainda não fora aceita como verdadeira pela pessoa a quem era endereçada. Por isso o nome, uma vez que postular também indica um pedido.

Neste quadro, os axiomas funcionam como verdadeiras pedras fundamentais sobre as quais toda a estrutura repousa. O primeiro axioma apresentado no primeiro livro dos Elementos de Euclides é a afirmação:

> Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une.

A terminologia antiga é *postulado*. Veja, a palavra axioma, que agora usamos, originalmente significava *dignidade* ou *valor*.

Muito bem, os pitagóricos consideravam como axioma, ou seja, assumiam como verdadeira, a afirmação:

> Quaisquer dois segmentos são comensuráveis.

A descoberta de que o lado de um quadrado qualquer e a sua diagonal não são comensuráveis, equivalentemente $\sqrt{2}$ não é da forma p/q, para inteiros p e q, com q não nulo, significou que a afirmação não mais poderia ser usada como axioma. Isso invalidou todas as demonstrações que haviam sido feitas usando essa afirmação, de maneira direta ou indireta. Ou seja, uma série de teoremas ficaram, subitamente, sem suas demonstrações. Isto é, não eram mais teoremas. Numa palavra: desastre.

Realmente, os pitagóricos acreditavam que tudo que há no universo poderia ser descrito pela Matemática. Eles acreditavam na máxima:

> Todas as coisas são números.

A existência de dois segmentos não comensuráveis ameaçava esta afirmação, pois os números a que eles se referiam eram os números racionais.

Veja, o fato da relação entre o lado e a diagonal de um quadrado ser $\sqrt{2}$ mostra que existem relações físicas que não podem ser representadas em termos dos números racionais. Por isso, eles chamavam essa razão de *alogos*, o inexprimível.

Neste ponto, é preciso dizer uma palavra em favor dos pitagóricos. O erro cometido é sutil. A idéia é a seguinte: parece razoável que possamos medir dois segmentos quaisquer usando apenas múltiplos de uma certa unidade. Ora, basta que tomemos essa unidade *suficientemente pequena*, não é mesmo? Por exemplo, dadas duas distâncias, se não for possível medir ambas usando quilômetros de maneira justa (algo assim como 13 km ou 307 km), talvez possamos fazê-lo usando metros ou mesmo milímetros. Foi nisso que os antigos gregos acreditaram. Além do mais, há o aspecto prático, que não podemos esquecer. Até hoje, usamos aproximações racionais para expressar todas as grandezas do mundo que nos cerca. A tecnologia nos ajuda a melhorar essas aproximações.

No entanto, não é possível encontrar uma unidade de comprimento que meça, de maneira justa, o lado e a diagonal de um quadrado, por menor que seja, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional, como vimos na unidade didática anterior.

A crise gerada pela existência de segmentos não comensuráveis perdurou até que um matemático genial apresentasse uma idéia nova, que alavancaria a questão. Esse matemático foi Eudoxo, nascido na ilha de Cnido, um contemporâneo de Platão, fundador de uma escola de filosofia, chamada Academia, que tanto influenciou nossa cultura.

Atividade 9

Você conhece outro exemplo de um par de magnitudes não comensuráveis?

Use o fato de π ser irracional para mostrar que o raio r de um círculo e sua circunferência, $2\,\pi\,r$, são não comensuráveis.

Você conhece duas áreas que sejam não comensuráveis? Pense no problema da quadratura do círculo.

Antes de contarmos um pouco da história de Eudoxo e de suas idéias para resolver o problema dos segmentos não comensuráveis, vamos falar sobre a noção de infinito, como era vista naquele tempo.

Texto 7: Problemas com Infinito

O que causou toda a dificuldade, isto é, a existência de segmentos não comensuráveis, de certa forma, é o infinito, um adversário fenomenal. Essa crise colocava os matemáticos da época frente a um conceito que tem provocado, ao longo da história da ciência, e da Matemática em particular, algumas de suas maiores dificuldades, mas que tem gerado, também, alguns de seus melhores resultados. O problema reside no fato de, mesmo não sendo $\sqrt{2}$ um número racional, podermos encontrar números racionais *arbitrariamente* próximos a ele.

7.1 $\sqrt{2}$ e as frações contínuas

Queremos obter uma seqüência de números racionais que estejam mais e mais próximos a $\sqrt{2}$. Uma maneira de fazer isso é expressando esse número como uma *fração contínua*. Você não precisa ser um *expert* no assunto, que é muito interessante, para entender a idéia geral.

Observe que

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+\sqrt{2}-1 = \\ &= 1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}.\end{aligned}$$

Se você achou que essa é uma maneira estranha de escrever $\sqrt{2}$, veja o que mais podemos fazer.

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

Prosseguindo assim, obtemos

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$$

Esse processo pode ser *continuado* por tantas vezes quanto quisermos, gerando uma espécie de fração prolongada, representada por

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}$$

Se interrompermos esse processo, obtemos um número racional que será uma *aproximação* racional de $\sqrt{2}$. Realmente, uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 9 casas decimais é 1.414213562, enquanto

$$1{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/2)))))) \;=\; \frac{577}{408} \;=\; 1.414215686.$$

Uma fração contínua é algo assim como um *fractal algébrico*.

Agora vamos dar uma pausa para você fazer um exercício.

Atividade 10

Use a igualdade

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

para gerar uma fração contínua, como foi feito no caso de $\sqrt{2}$.

Use essa fração contínua para calcular uma *boa* aproximação do número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como *razão áurea* e uma *boa* aproximação de $\sqrt{5}$.

Continuando, lembramos que a noção infinito é de enorme importância para a Matemática, mas as dificuldades que apresenta são igualmente fenomenais, como você pode perceber, no caso da crise gerada pelo descobrimento da existência de comprimentos não comensuráveis.

Essas crises se repetem ao longo da história e cada superação representa um avanço monumental. O surgimento do Cálculo, no século 17, e a compreensão das teorias desenvolvidas por Cantor, no início do século 20, são exemplos disso.

Texto 8: Zenão e seus Paradoxos

Zenão de Eléia

Paradoxo (do grego $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$) significava, originalmente, opinião errada, em oposição a ortodoxo, que significava opinião correta. Com o passar do tempo a palavra paradoxo passou a indicar as afirmações auto-contraditórias, como 'eu estou mentindo'. Se admitirmos que a frase é verdadeira, surge uma contradição. Se admitirmos que ela é falsa, ocorre a mesma coisa.

A disputa finito versus infinito é quase tão antiga quanto a Matemática e suas dificuldades indicam a importância da questão. É claro que esse problema transcende a Matemática.

Os paradoxos de Zenão são resultados dessa antiga disputa. Para que você entenda como eles se colocam é preciso ter uma idéia do contexto cultural onde eles surgiram.

Do ponto de vista da filosofia, o principal debate está na questão da verdadeira existência de algo que seja infinito. Todos concordam que o conjunto dos números naturais é uma coisa *potencialmente* infinita. Algo como um infinito *virtual*. No entanto, como diria Aristóteles, esse infinito só existe nas nossas mentes.

Anaximandro, discípulo de Tales de Mileto, concebia o universo como uma infinidade de mundos que existem desde sempre e que existirão durante um tempo inesgotável. Dessa forma, ele inaugurou a questão posicionando-se a favor da existência de algo infinito.

Em posição radicalmente oposta a Anaximandro, Parmênides acreditava que o universo seria constituído de um único objeto. Essa concepção monista do universo implica a negação de qualquer movimento. Isso porque a existência de algum movimento demanda uma posição inicial e uma posição final, contrariando a unicidade do universo.

Muito bem, Zenão era discípulo de Parmênides e queria dar suporte à teoria de seu mestre, mostrando que o movimento seria apenas uma ilusão. Para tanto, produziu quatro famosos argumentos com os quais pretendia mostrar que admitir a existência de movimento implicaria algum tipo de absurdo. Esses argumentos são conhecidos como *paradoxos de Zenão*.

Um desses paradoxos afirma ser *impossível* levantar-se da cadeira onde você está sentado e caminhar até a porta mais próxima. Isto porque primeiro você teria que caminhar a metade desta distância e depois teria que caminhar a metade da metade que estaria faltando. Em seguida, a metade do que restou e assim por diante, interminavelmente.

O absurdo que este paradoxo apresenta se deve à negação do infinito. Se admitirmos, como normalmente o fazemos, ser possível percorrer uma infinidade de pontos em um intervalo finito de tempo, podemos refutá-lo facilmente. Ou seja, Zenão nega o infinito para concluir que o movimento é um absurdo.

Este paradoxo de Zenão pode ser apresentado de uma maneira matemática. Veja:

Um ponto é movido da posição 0 na direção da posição 1, na reta real, da seguinte forma: primeiro ele atinge a posição $1/2$, depois a posição $3/4$, em seguida $7/8$, depois $15/16$, e assim por diante. No n-ésimo estágio, o ponto se encontrará na posição $1 - \dfrac{1}{2^n}$. Logo, é impossível chegar até a posição 1 pois, para chegar até lá, o ponto teria que percorrer uma infinidade de estágios.

Atividade 11

Você poderia mostrar que a equação anterior não tem solução? Isso implica a impossibilidade de mover o ponto da posição 0 para a posição 1?

Além disso, lembre-se da fórmula de soma dos termos de uma progressão geométrica para calcular a seguinte soma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Você sabe a fórmula da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica? Essa fórmula só é válida para as progressões geométricas cujas razões satisfazem uma determinada condição. Qual condição é essa? A progressão correspondente ao paradoxo de Zenão satisfaz a essa condição?

Um outro paradoxo de Zenão é conhecido como *Aquiles e a tartaruga*. Aquiles, o mais famoso corredor da antiga Grécia, aposta uma corrida com a sábia tartaruga. Considerando sua morosidade, a tartaruga pede a Aquiles uma pequena vantagem: que ela possa iniciar a corrida na metade do percurso. Aquiles cede, pois corre duas vezes mais rápido que a tartaruga. Muito bem, segundo Zenão, ele perde a corrida. Na verdade, segundo Zenão, a corrida nunca mais terminará e a tartaruga estará sempre na frente de Aquiles. Isso porque, quando ele atinge o ponto de onde a tartaruga largou, a metade da raia, ela já avançou até a metade da metade que lhe faltava percorrer. Aquiles segue até esse ponto, mas a tartaruga já se encontra na metade de sua próxima etapa, e assim por diante. Resumindo, a tartaruga sempre estará na frente do magnífico Aquiles.

Note que, para o argumento funcionar como Zenão o quer, é preciso admitir que o espaço e o tempo são contínuos e o movimento é uniforme (velocidade constante). Além disso, a maneira como Zenão descreve a história sugere que Aquiles e a tartaruga passariam por uma infinidade de etapas, metade de metade, depois a metade do que faltou, e assim por diante.

Para refutar esse paradoxo, basta que lembremos da nossa concepção de movimento. Admitimos que é possível percorrer uma infinidade de posições (cada um dos pontos entre a partida e a chegada) em uma infinidade de instantes (um para cada posição), mas num intervalo limitado de tempo.

Você pode buscar os outros paradoxos de Zenão e analisá-los. Eles seguem o mesmo padrão: negação do infinito com mais algumas considerações, que implicam a não existência de movimento. Essa formulação é equivalente ao seguinte: a admissão da existência de movimento com mais algumas considerações, que implicam a existência de infinidades.

Nossa concepção admite infinidades. Numa linguagem moderna, aceitamos a fórmula matemática

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \;=\; 1.$$

Uma das dificuldades que encontramos ao tentar entender a maneira como os antigos enfrentavam os problemas matemáticos está no fato de nós, de uma certa maneira, já sabermos as soluções.

Nesta seção vamos fazer um esforço de compreender a questão da existência de segmentos não comensuráveis da maneira como ela estava colocada para os pitagóricos.

A recompensa será apreciar a genialidade de Eudoxo.

Texto 9: Eudoxo e a Teoria da Proporção

Na raiz do problema está o fato de que os gregos antigos tinham uma visão geométrica da matemática. Eles não dispunham das ferramentas algébricas que dispomos hoje, uma vez que essas só vieram a ser desenvolvidas posteriormente. A notação matemática faz uma diferença fundamental na resolução dos problemas.

Veja como podemos colocar a questão com a ajuda da Álgebra:

> Queremos comparar dois comprimentos x e y.

Suponhamos que exista um certo comprimento u tal que $x = m \times u$ e $y = n \times u$, com m e n dois inteiros. Ora, se m for maior do que n, x é maior do que y. Caso contrário, x é menor do que y.

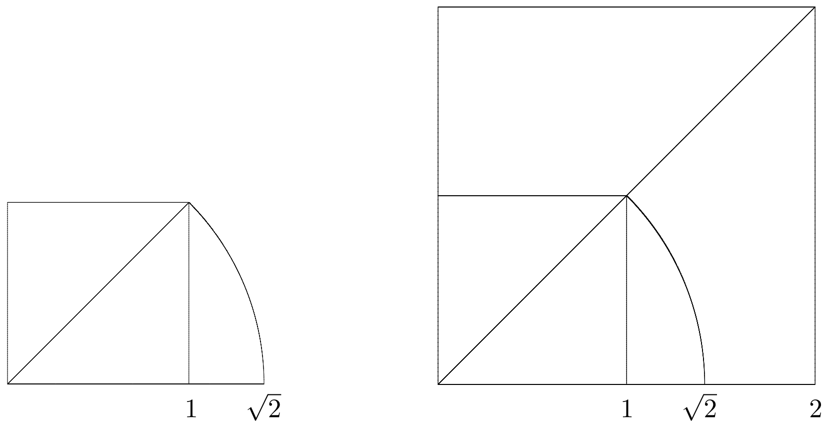
Como você sabe, os pitagóricos acreditavam que essa possibilidade ocorreria para cada par de comprimentos. Mas, como você sabe, isso não acontece para o lado e a diagonal de um dado quadrado, 1 e $\sqrt{2}$.

Portanto, nesta altura, 1 e $\sqrt{2}$ não poderiam ser comparados.

O quinto livro dos Elementos de Euclides apresenta uma teoria que resolve esta questão. A quarta definição desse livro é chamada *Axioma de Eudoxo* e foi a ele atribuída pelo grande Arquimedes. Ela diz:

> Duas magnitudes podem ser comparadas quando um múltiplo de cada uma delas for maior do que a outra.

Veja, segundo essa definição, um comprimento e uma área não são magnitudes comparáveis. No entanto, a diagonal do quadrado é maior do que seu lado e, por sua vez, é menor do que o dobro deste lado.



Assim, segundo Eudoxo, 1 e $\sqrt{2}$ são comparáveis.

Mas restava uma outra etapa, ainda mais difícil. Como definir a igualdade de duas razões de magnitudes comparáveis? Ou seja, queremos estabelecer a igualdade

> a está para b assim como c está para d.

Nós dizemos, simplesmente, a está para b assim como c está para d se, e somente se, $a \times d = c \times b$. Mas, lembre-se, os pitagóricos (assim como Eudoxo) não dispunham da multiplicação.

Note que eles já sabiam como fazer para os pares de magnitudes comparáveis. Suponha que existam magnitudes u e v, assim como números inteiros m, n, p e q, tais que $a = m \times u$, $b = n \times u$, $c = p \times v$ e $d = q \times v$. Então, dizemos que a está para b assim como c está para d se, e somente se, $m\, q = n\, p$. (É fácil multiplicar números inteiros!)

Mas, como eles poderiam estabelecer que 1 está para $\sqrt{2}$ assim como $\sqrt{2}$ está para 2?

Veja a brilhante solução de Eudoxo. Ela aparece como a quinta definição do quinto livro dos Elementos de Euclides. Em termos atuais é o seguinte:

> a está para b assim como c está para d se, e somente se, para quaisquer inteiros m e n, vale:
>
> (1) $ma < nb$ se, e somente se, $mc < nd$;
>
> (2) $ma = nb$ se, e somente se, $mc = nd$;

(3) $ma > nb$ se, e somente se, $mc > nd$.

Atividade 12

Use a definição de Eudoxo para convencer-se de que 1 está para $\sqrt{2}$ assim como $\sqrt{2}$ está para 2. Ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observe que, nesse contexto, número inteiro quer dizer número positivo. Os números negativos só foram introduzidos posteriormente.

O mérito dessa definição está no fato de que ela permitiu que os antigos gregos dispusessem da estrutura dos números reais. O progresso feito por essa teoria só se compara aos trabalhos sobre os números reais realizados por Cauchy, Weierstrass e Dedekind, matemáticos do século 19, dos quais voltaremos a falar.

9.1 Eudoxo e a área do círculo

Nascido em 408 a.C., em Cnido, uma pequena ilha grega próxima da atual Turquia, Eudoxo estudou Astronomia, Medicina, Geografia e Filosofia, além de Matemática, com importantes mestres e em diferentes lugares por onde viajou. Estudou na Itália com Arquitas, que fora aluno de Platão. Arquitas estava interessado no problema da duplicação do cubo. Chegou a estudar na Academia de Platão, em Atenas, por um breve período. Como era muito pobre, morava em um bairro da periferia de Atenas, nas bases do monte Piraeus, zona portuária, e percorria diariamente um longo caminho de ida e volta até a escola de Platão.

Ele retornou a sua nativa ilha onde contribuiu como legislador, atuando na vida pública. Escreveu livros sobre astronomia, meteorologia e outros temas, ensinou essas disciplinas e construiu um observatório. Eudoxo morreu em Cnido, no ano 355 a.C.

Do ponto de vista matemático, como você viu, resolveu a primeira grande crise que a Matemática enfrentara. Veja, a seguir, como suas idéias resultavam em teoremas. Eudoxo demonstrou que

> a área de um círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro.

Para isso, ele usou um resultado observado por Antifão, que fora o primeiro a sugerir que a área do círculo poderia ser calculada em termos de polígonos regulares nele inscritos.

Aqui está o resultado de Antifão:

> Um 2^n-ágono regular inscrito em um círculo ocupa mais do que $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ de sua área.

Por exemplo, um quadrado ocupa mais do que a metade da área do círculo em que está inscrito.

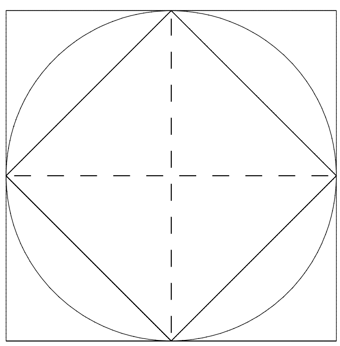
Você já tem conhecimentos suficientes para resolver o próximo exercício. Vamos a ele.

Atividade 13

Mostre que a área de um quadrado ocupa mais do que a metade da área do círculo em que ele está inscrito.

Mostre que a área de um octógono regular ocupa mais do que $\dfrac{3}{4}$ da área do círculo em que está inscrito.

Sugestão. Olhe para o seguinte desenho:



Agora, examinemos a argumentação de Eudoxo.

Veja, precisamos mostrar que a área de um círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro. Em símbolos, devemos mostrar que existe uma constante K, tal que

$$K\,d^2 \;=\; \text{área}(C),$$

onde C é o círculo de diâmetro d.

A constante K é a mesma para *qualquer* círculo. Portanto, se aplicarmos a fórmula para o círculo de diâmetro 1, obtemos

$$K \;=\; \text{área(círculo de diâmetro 1)}.$$

Atividade 14

Calcule o valor de K em termos de π.

Como você sabe, só há três possibilidades:

(a) $K\,d^2 \;<\; \text{área}(C)$,

(b) $K\,d^2 \;=\; \text{área}(C)$ ou

(c) $K\,d^2 \;>\; \text{área}(C)$.

Vamos mostrar que as possibilidades (a) e (c) levam a contradições e, portanto, só restará a possibilidade (b).

Vamos, então, supor que (a) ocorre. Ou seja,

$$K\,d^2 \;<\; \text{área}(C).$$

Agora, segundo o *Axioma de Arquimedes*, que na verdade o atribui a Eudoxo, podemos escolher um número n suficientemente grande, de tal maneira que

$$\frac{1}{2^{n-1}}\,\text{área}(C) \;<\; \text{área}(C) - K\,d^2.$$

Como n é um número grande, $1/2^{n-1}$ é suficientemente pequeno para que $\left(1/2^{n-1}\right)$ área(C) ainda seja menor do que a diferença (positiva)

$$\text{área}(C) - K\,d^2.$$

Podemos reescrever a desigualdade anterior na forma

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{área}(C) > K\,d^2.$$

Vamos denotar por $A_n(C)$ a área do n-ágono regular inscrito no círculo C. Usando essa notação, o resultado de Antifão é

$$A_n(C) > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{área}(C).$$

Assim, dessas duas inequações, obtemos

$$A_n(C) > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{área}(C) > K\,d^2.$$

Paciência, estamos próximos ao fim. Antifão também sabia que $A_n(C)$, a área no n-ágono inscrito em C, é *igual* a $d^2 A_n$, (d^2 vezes A_n, a área do n-ágono inscrito no círculo de diâmetro 1).

Mas, lembre-se, K é área do círculo de diâmetro 1, portanto maior do que A_n, a área do n-ágono nele *inscrito*.

Colocando tudo isso junto, temos,

$$K\,d^2 > A_n\,d^2 \;=\; A_n(C) > K\,d^2.$$

Ora, isso é uma contradição! Portanto, a possibilidade que deu início a tudo isso, (a) $K\,d^2 \;<\;$ área(C), não ocorre.

É possível construir uma linha de argumentação que exclui, também, a possibilidade (c) $K\,d^2 \;>\;$ área(C).

Portanto, como Eudoxo afirmou,

$$K\,d^2 \;=\; \text{área}(C).$$

Nessa unidade didática você aprendeu como foi resolvida a primeira grande crise da Matemática.

Na próxima, você conhecerá um pouco mais a estrutura dos Elementos de Euclides, assim como um panorama das últimas conquistas dessa cultura que ficou conhecida com a Era de Ouro da matemática grega.