Unidade 6

Uma Nova Matemática para um Mundo Novo

Nesta unidade didática você verá como a descoberta do Cálculo introduziu vida nova à Matemática e mudou, definitivamente, o cenário científico mundial.

No entanto, imaginar que o surgimento dessa nova ferramenta matemática tenha ocorrido independentemente do contexto científico e cultural é, no mínimo, ingênuo.

O século 16 assistira a descobertas e avanços científicos impressionantes, mas nada que se compare com o que estava por vir.

Texto 20: Sobre os Ombros de Gigantes

O mundo se expandira, era a época das grandes navegações, que ocorreram com a ajuda de novos instrumentos e desenvolvimentos ocorridos na cartografia.

Precisamos lembrar que a imprensa havia sido inventada por Gutenberg na metade do século 15 e isso dera um grande impulso à difusão de informações e conhecimento.

O mundo vivia o momento histórico conhecido como Renascimento, ocorrido nas artes e nas ciências. Um personagem típico desse período foi Luca Pacioli (1445 - 1517), um franciscano e matemático amigo de Leonardo da Vinci. Pacioli teve um de seus livros, o *Divina proportione*, sobre poliedros regulares, ilustrado pelo famoso artista.

Na Matemática, a descoberta de métodos algébricos para a resolução das equações cúbicas e quárticas, resultado dos esforços de dal Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari, assim como os trabalhos de François de Viète, fazendo progressos na parte da notação matemática, dava ânimo aos outros matemáticos e preparava o terreno para novas descobertas.

Nessa época, o desenvolvimento tecnológico passou a exigir da Matemática respostas para seus próprios problemas. Por exemplo, questões sobre áreas e volumes, associadas ao cálculo de centros de gravidade, motivaram Luca Valério (1552 - 1618) a aprofundar os métodos desenvolvidos pelos antigos gregos.

Era o momento de Galileu Galilei (1564 - 1642) fazer pesquisas sobre a queda livre dos corpos, realizadas com genialidade, e mudar definitivamente a maneira de se produzir ciência. Foi ele quem apontou o telescópio para os céus, tornando um brinquedo em uma ferramenta científica, sendo o primeiro ser humano a vislumbrar a grandeza do cosmo.

Outro gigante das ciências foi Johannes Kepler (1571 - 1630) que revelou aos homens as leis que regulam o funcionamento do sistema solar, decifrando um mistério milenar.

A primeira lei de Kepler afirma que as órbitas planetárias são elipses nas quais o sol ocupa um dos focos. (Nada de círculos, ou círculos se revolvendo sobre outros círculos, a solução não era euclidiana, no sentido de régua e compasso.) A segunda afirma que o segmento (imaginário) que une o sol ao planeta descreve áreas (setores elípticos) iguais em tempos iguais. Isso explica por que os planetas aceleram quando se aproximam do sol e diminuem sua velocidade quando dele se afastam.

Vale a pena ouvir, pelo menos uma vez, o canto de vitória de Kepler, escrito no prefácio do seu *Harmonices mundi*, descrevendo a intensidade de seus sentimentos ao vislumbrar sua descoberta:

> Fui iluminado, em meio a uma contemplação muito admirável, há dezoito meses por um primeiro clarão, há três meses por uma claridade diferente e há poucos dias pelo próprio sol.

Veja, Kepler estava consciente da importância de sua descoberta, mas sabia de que ela encontraria resistência em alguns setores. A virada do século 16 para 17 assiste à mudança do eixo de produção matemática da Itália para mais ao norte da Europa. A necessidade de um ambiente onde há liberdade de pensamento para a produção científica explica, em parte, esse fenômeno. É bom lembrar que Galileu foi forçado a renegar suas idéias e terminou seus dias isolado.

O século 17 foi inaugurado com um avanço matemático notável – a introdução, aperfeiçoamento e utilização de uma ferramenta matemática extraordinária – o logaritmo. Isso foi resultado dos esforços conjuntos de dois britânicos: John Napier (1550 - 1617) e Henry Briggs (1561 - 1631).

É um pouco difícil para um jovem estudante de Matemática, que pode comprar uma calculadora científica em qualquer esquina, entender o porquê de toda essa importância. No entanto, os logaritmos transformam multiplicações e divisões em somas e diferenças, respectivamente, ajudando imensamente todas as atividades científicas que demandavam cálculos elaborados, como a astronomia.

A motivação para essa descoberta fora a comparação entre a série aritmética e a série geométrica, colocadas em direta correspondência por Michael Stiefel no livro *Arithmetica Integra*, de 1544:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \dots \end{array}$$

observando que a soma na seqüência da linha superior correspondia ao produto na série da linha inferior. Stiefel se referia aos números de cima como os *expoentes* dos números de baixo.

Você se lembra do famoso algoritmo para extrair *raízes quadradas? Veja que extrair significa tirar sob duras penas... Muito bem, sem usar a calculadora, marcando no relógio, depois de passar uma meia hora treinando para relembrar, realize, então, o exercício proposto.*

Atividade 26

Calcule $\sqrt{13457.29}$.

Agora, quanto tempo você levaria para dividir 9.507276246 por dois? Portanto, se você dispusesse de uma maneira de transformar 13457.29 em 9.507276246 e, aplicando o processo inverso, *destransformar* a metade deste número de volta, você ainda tentaria usar o algoritmo da raiz quadrada?

Veja, $\ln 13457.29 = 9.507276246$, $9.507276246/2 = 4.753638123$ e $e^{4.753638123} = 116.0055602$. Portanto, $\sqrt{13457.29} = 116.0055602$.

Note que as primeiras tabelas de logaritmo, construídas por Napier, não eram na base 10. Em 1615, com a colaboração de Briggs, foram construídas as tabelas onde o logaritmo de 1 é zero e logaritmo de 10 é 1. Isso é, logaritmo na base 10. A constante e, base do que chamamos logaritmo natural, foi introduzida posteriormente, por Euler.

Texto 21: Prelúdio do Cálculo

No início do século 17 os matemáticos voltaram a enfrentar um velho adversário – o infinito. Havia três tipos de questões que se apresentavam:

- as somas *infinitas*;
- o cálculo de áreas (problemas do tipo *quadratura*);
- o problema das tangentes a curvas dadas.

A questão das somas infinitas tem suas raízes no passado, já na época dos gregos. Por exemplo, um dos paradoxos de Zenão pode ser colocado assim:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots \;=\; 1?$$

Durante a Idade Média, foram feitos vários progressos nesse sentido. Por exemplo, vale a pena conhecer um pouco da história do norueguês Nicole Oresme (1323 - 1382) que estudou na Universidade de Paris e foi amigo de longa data de Carlos V, rei da França. Oresme definitivamente considerava a igualdade anterior verdadeira. Ele calculou a soma da série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\dots\; +\;\frac{n}{2^n}+\dots$$

e foi o primeiro matemático a provar a divergência da série harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

Isso é um feito e tanto. Para mostrar que a série diverge, é preciso mostrar que, dado um número qualquer $R > 0$, existe um número inteiro N, tal que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \;=\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N} \;>\; R.$$

Veja, para ultrapassar o número $R = 10$, por exemplo, é necessário tomar $n = 12\,367$. Ou seja, a soma dos $12\,366$ primeiros termos da série é, aproximadamente, 9.999962148.

Observe como Oresme resolveu o problema:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \ldots \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Prosseguindo assim, tomando partes cada vez mais compridas da série, seguimos somando parcelas que, de $1/2$ em $1/2$, ultrapassam qualquer número $R > 0$.

É claro que isso toma muitos termos, mas temos uma quantidade inesgotável deles.

Atividade 27

Repita um dos feitos de Oresme e calcule a soma a seguir.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$$

As questões do tipo cálculo de áreas e de volumes, assim como as questões sobre tangentes a curvas, ocuparam muitas mentes brilhantes. Novamente, a questão de lidar com infinito ou infinitésimos estava em pauta.

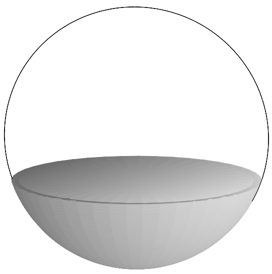
Para o estudo do comportamento dos planetas, Kepler precisava determinar áreas de setores elípticos, mas também considerou, por razões mais prosaicas, o cálculo do volume de barris de vinho. Sua abordagem era a de dividir, por exemplo, um dado sólido em um número infinito de pedaços infinitesimais, ou sólidos *indivisíveis*, de um tamanho ou forma conveniente para o problema.

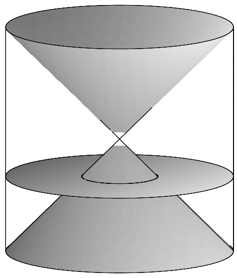
Outro matemático que marcou essa época foi Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), que produziu dois alentados volumes: *Geometria indivisibilibus continuorum* (*Geometria dos Indivisíveis*), de 1635, e *Exercitationes geometricae sex*

(*Seis Exercícios Geométricos*), de 1647. A abordagem de Cavalieri era diferente da de Kepler. Veja o chamado Princípio de Cavalieri:

> Dois sólidos com a mesma altura, que têm suas seções planas de mesmo nível com as mesmas áreas, têm o mesmo volume.

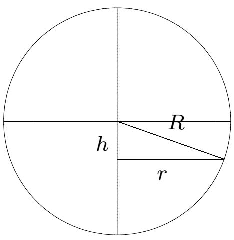
Cavalieri calculou o volume da esfera de raio R, comparando com o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ menos dois cones de altura R e raio R. Para isso, basta mostrar que a área do disco contido na esfera é igual à área da coroa contida no cilindro menos o par de cones, na mesma altura. Veja na figura a seguir.

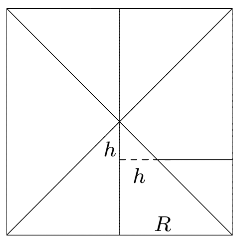




Como o volume do cilindro é $2\,\pi\,R^3$ e o volume de cada cone é $\pi\,R^3/3$, o volume da esfera é $2\,\pi\,R^3 - \dfrac{2\,\pi\,R^3}{3} = \dfrac{(6-2)\,\pi\,R^3}{3} = \dfrac{4\,\pi\,R^3}{3}$.

Para ter certeza de que a conta está correta, observe o diagrama a seguir.





O raio r, do disco de nível $-h$, na esfera, satisfaz a relação $R^2 = r^2 + h^2$, devido ao triângulo retângulo da figura da esquerda. Portanto, a área deste disco é $\pi\,r^2 = \pi\,(R^2 - h^2)$. Por outro lado, a coroa circular consiste do disco de raio R menos o disco de raio h, como mostra o triângulo isósceles da figura da direita. Sua área é, portanto, $\pi\,R^2 - \pi\,h^2$.

No início do século 17, a França produziu algumas pessoas geniais que contribuíram fortemente para a criação do cálculo. Vamos conhecer algumas delas.

Texto 22: A Conexão Francesa

René Descartes (1596 - 1650) é conhecido pela frase – Penso, logo existo – e pelo livro chamado *Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão a Buscar a Verdade Através da Ciência*. Descartes proporcionou aos matemáticos uma experiência riquíssima. Se duas áreas da Matemática são poderosas, juntas são imbatíveis. Descartes uniu equações às curvas, criando a geometria analítica. Estava criado o *sistema cartesiano*, palco de tantas ações matemáticas. Isso tudo fazia parte de um apêndice do *Discurso*, chamado *Geometria*, que era dividido em três partes.

Por exemplo, no segundo desses livros, Descartes considera as equações do tipo

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

e descreve as condições para que elas representem elipses, hipérboles ou parábolas. Ele mostra, ainda, como determinar tangentes a uma dada cônica.

As questões de encontrar tangentes estavam, por assim dizer, no ar.

Contemporâneo de Descartes, Pierre de Fermat (1601 - 1665) ficou conhecido como *Príncipe dos Amadores*, pois se dedicava à Matemática nas horas de folga. Fermat era um conselheiro do parlamento da cidade de Toulouse, no sul da França, e nunca publicou um só artigo de Matemática em toda a vida. Ele divulgava suas descobertas através de correspondência com outros matemáticos e muitas outras de suas contribuições só foram descobertas após sua morte.

Como Fermat não tinha um compromisso formal, por assim dizer, com a Matemática, muitas de suas descobertas eram divulgadas apenas de forma fragmentada. A história mais famosa devido a coisas como essa é a do chamado Último Teorema de Fermat. Tudo começou com uma nota que ele escreveu em sua cópia do *Aritmética*, de Diofanto, junto da Proposição II.8, sobre a expressão de um quadrado como a soma de dois outros quadrados. Isso é, há números inteiros quadrados que são soma de dois outros números inteiros quadrados, como $5^2 = 3^2 + 4^2$ ou $13^2 = 5^2 + 12^2$.

> É impossível dividir um cubo em dois cubos, ou uma quarta potência em duas potências de quatro, ou geralmente qualquer potência maior do que o quadrado na soma de duas iguais potências; e eu encontrei uma demonstração admirável para esse fato, mas essa margem é muito estreita para contê-la.

A afirmação pode ser traduzida da seguinte forma: não existem três números inteiros x, y e z tais que

$$x^n + y^n \;=\; z^n,$$

para n inteiro maior do que 2, e deveria ser chamada *Conjectura de Fermat*, pois não havia demonstração.

Poucas vezes na história uma questão matemática desafiou tanto a inventividade de matemáticos profissionais e amadores. A facilidade do enunciado certamente contribuiu para atrair o interesse de tantas pessoas, ocultando, no entanto, a enorme dificuldade do problema.

Bem, não *havia* demonstração, mas agora há. Em 1993 Andrew Wiles proferiu uma palestra em Cambridge apresentando os resultados de suas pesquisas. O Teorema de Fermat estaria demonstrado como conseqüência. No entanto, falhas na demonstração de Wiles deixavam de fora alguns casos especiais, entre eles o que provaria o Teorema de Fermat. Como num filme de suspense, o vilão se levantava mais uma vez. Finalmente, em 1994, novos argumentos foram apresentados por Wiles e Richard Taylor cobrindo todos os casos, inclusive o que demonstrava o Teorema de Fermat. Para saber os detalhes dessa história realmente maravilhosa, não deixe de ler o livro *O Último Teorema de Fermat*, de Simon Singh.

Fermat deixou sua marca na teoria de números e também foi o co-responsável pelos fundamentos da probabilidade, devido às suas contribuições através de cartas que trocou com Blaise Pascal (1623 - 1662), outro grande matemático daqueles dias. Seus progressos no desenvolvimento do que chamamos cálculo diferencial foram muitos. Ele percebeu, por exemplo, que a noção de reta tangente a uma dada curva poderia ser usada para detectar pontos de máximo ou de mínimo.

Veja como Fermat teria resolvido o problema a seguir.

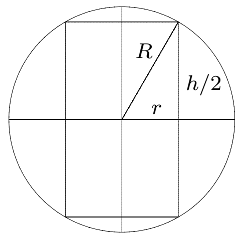
Calcule as proporções do cilindro reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio R.

Esse problema encantaria qualquer um dos matemáticos gregos do passado, mas eles não disporiam de qualquer método que permitisse encontrar a resposta.

Vamos denotar o raio da base do cilindro por r e sua altura por h. Usando o Teorema de Pitágoras, temos $R^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4}$. Isolando o valor de r^2 nessa fórmula e substituindo em $\pi\, r^2\, h$, o volume do cilindro, obtemos a fórmula do volume do cilindro em termos apenas de sua altura:

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h.$$

De posse dessa equação, Fermat calcularia a inclinação da reta que contém os pontos $(h, V(h))$ e $(h + a, V(h + a))$, como estamos habituados a fazer nos cursos de Geometria Analítica, obtendo



Corte da esfera com cilindro reto inscrito por um plano contendo a origem.

$$\begin{aligned}
\frac{V(h+a) - V(h)}{a} &= \frac{\pi \left(R^2 - \frac{(h+a)^2}{4} \right)(h+a) - \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h}{a} \\
&= \frac{\pi \left(4R^2(h+a) - (h+a)^3 - 4R^2 + h^3\right)}{4a} = \\
&= \frac{\pi \left(4R^2h + 4R^2a - h^3 - 3ah^2 - 3ha^2 - a^3 - 4R^2h + h^3\right)}{4a} = \\
&= \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - 3h^2 - 3ha - a^2\right).
\end{aligned}$$

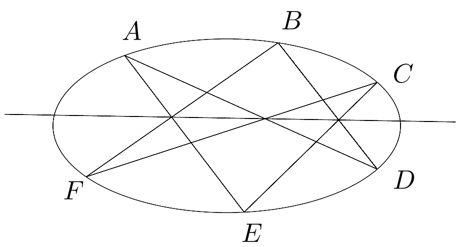
Para determinar a inclinação da reta tangente no ponto $(h, V(h))$, basta fazer $a = 0$, obtendo $\dfrac{\pi\,(4R^2 - 3h^2)}{4}$. O ponto máximo ocorre onde essa inclinação é zero, ou seja, $4R^2 - 3h^2 = 0$. Portanto, o cilindro de volume máximo inscrito na esfera de raio R tem altura $h = \dfrac{2\sqrt{3}\,R}{3}$ e raio $r = \dfrac{\sqrt{6}R}{3}$.

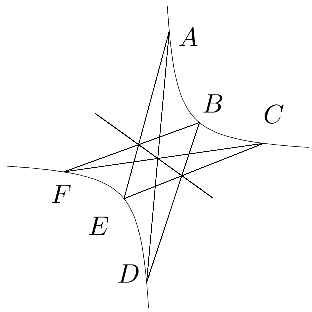
O fato da equação que define o volume do cilindro em termos da sua altura ser polinomial foi crucial para o truque funcionar. Apesar de estarmos calculando uma derivada e igualando-a a zero, em nenhum momento usamos a noção de limite! Isso ficou escondido na passagem em que trocamos o a por zero, *após* termos feito todas as fatorações.

Além de Descartes e Fermat, Pascal também dedicou sua engenhosidade à resolução de problemas de cálculo. Ele começou sua carreira matemática na geometria, provando, aos 16 anos, um teorema sobre a colinearidade dos pontos de interseção dos lados opostos de um hexagrama *místico* inscrito em uma cônica.

> Se um hexágono $ADBFCE$ (não necessariamente convexo) for inscrito em uma cônica (como um círculo ou uma elipse), então os pontos de interseção das retas que conectam vértices opostos (AD com FC, DB com CE e BF com EA) são colineares. Essa reta é chamada *reta de Pascal* do hexaedro.

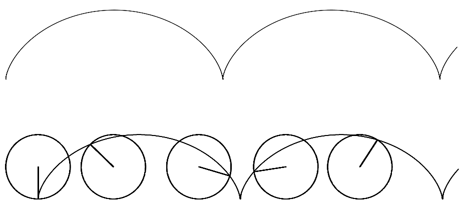
Veja, nas figuras a seguir, duas possibilidades: hexagrama inscrito numa elipse e hexagrama inscrito numa hipérbole.





Aos 18 anos construiu o primeiro computador de que se tem notícia, chegando a produzir e vender cerca de cinqüenta máquinas. Não é por nada que chamamos Pascal uma das primeiras linguagens desenvolvidas para programação de computadores.

Pascal dedicou algumas semanas de sua vida estudando a ciclóide, nome dado por Galileu Galilei à curva obtida do traço de um ponto do bordo de um círculo rolando ao longo de uma reta.



Seria injusto terminar esse momento em que falamos de matemáticos franceses geniais desse período sem mencionar Girard Desargues (1591 - 1661). Ele fundou as bases da *geometria projetiva*, mas seus trabalhos só ganharam reconhecimento posteriormente.

Como você pôde ver, havia uma profusão de resultados do tipo cálculo diferencial (problemas de tangentes a curvas) e integral (questões de cálculo de áreas e volumes). Muitos outros matemáticos, como Evangelista Torricelli (1698 - 1647), Gilles Persone de Roberval (1602 - 1675), John Wallis (1616 - 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) deram suas contribuições. Em particular, Barrow foi o primeiro a notar a conexão que há entre essas duas questões.

Texto 23: Newton e Leibniz – dois gênios e uma idéia!

O fato de que a área abaixo da curva $y = x^n$, de 0 até a ser $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ e de que a inclinação da reta tangente à curva $y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, no ponto de abscissa a, ser a^n, não lhe passou despercebido.

No entanto, dois personagens são reconhecidos como os criadores do Cálculo. A razão disso está no escopo de suas abordagens. Eles não se ativeram a resolver um ou outro problema específico, mas desenvolveram, cada um a sua maneira, métodos gerais de lidar com essas questões. Nisso reside o mérito de suas contribuições.

23.1 *Anni mirabili*

Os anos de 1666 e 1667 foram particularmente difíceis para os ingleses. Uma terrível peste, a peste bubônica, abateu-se sobre a Inglaterra, forçando, inclusive, o fechamento temporário das universidades de Oxford e Cambridge. Esse período de recolhimento foi, no entanto, propício para as ciências. Um estudante de Cambridge retornou para a casa de seus avós, que ficava na zona rural de Woolsthorpe, Lincolnshire. Esse jovem de 24 anos produziu então uma série de resultados científicos que mudariam, de maneira dramática e definitiva, o panorama das ciências.

Isaac Newton

Seu nome era Isaac Newton (1642 - 1727). Entre as descobertas feitas por Newton neste período, que ficou conhecido como *anni mirabili* (*anos miracu-*

losos), temos uma generalização do Teorema Binomial, a Teoria da Gravitação e a análise da natureza da luz.

A importância dos trabalhos de Newton reside na praticidade de seus métodos e no tipo de problemas que ele pôde resolver. Por exemplo, partindo das leis de gravitação e usando os métodos de cálculo por ele desenvolvidos, pôde *demonstrar* as leis de Kepler.

Um exemplo da visão de Newton é sua generalização do Teorema Binomial. Esse teorema descreve como obter a expansão do binômio $(a+b)^n$, para todo inteiro positivo n. Veja,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

e assim por diante.

Para determinar os coeficientes dessas expansões, basta tomar a correspondente linha no chamado *triângulo de Pascal*:

Na verdade, esse arranjo de números era conhecido desde muito antes de Pascal. Por exemplo, Omar Khayyam, matemático árabe, e Chu Shih-Chieh, matemático chinês que o menciona no livro *O Espelho Precioso dos Quatro Elementos*, por volta de 1303.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Para obter a próxima lista, basta começar com o número 1 e seguir somando os dois números logo acima da posição a ser preenchida. Ela seria 1, 7, 21 e assim por diante.

O jovem Newton percebeu que é possível determinar os coeficientes diretamente, sem a construção do triângulo linha por linha até chegar à potência desejada. Algo como fazemos agora com a fórmula para determinar o coeficiente do termo

$a^{n-i}b^i$:

$$C(n,i) = \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \ .$$

Dessa forma, para expandir $(1+x)^3$, fazemos

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{3\times 2}{2}x^2 + \frac{3\times 2\times 1}{3\times 2}x^3 + \frac{3\times 2\times 1\times 0}{4\times 3\times 2}x^4 + \dots$$

observando que, a partir do termo de grau 4, os coeficientes se anularão.

Newton observou que essa fórmula vale para expoentes fracionários e negativos.

Para calcular $(1+x)^{-3}$, ele faria

$$1 + (-3)x + \frac{(-3)(-4)}{2}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{2\times 3}x^3 + \dots$$

obtendo

$$\frac{1}{(1+x)^3} \ = \ 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots$$

A diferença, agora, é que o lado direito da igualdade é uma soma infinita. Ele confirmou sua descoberta observando que

$$(1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots) = 1.$$

Newton *não* observou que essa expressão só vale para valores de x no intervalo $(-1,1)$. Mas essas computações eram mais do que só interessantes. Eram uma poderosa ferramenta de cálculo. Usando esse teorema binomial, obteve a expansão em série da função $y = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$, obtendo

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots$$

Por exemplo, usando esses termos da série, podemos calcular uma aproximação para $\sqrt{3}$. Primeiro, precisamos de um truque. Observe que $3 = 4 - 1$. Assim, $\sqrt{3} = \sqrt{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \ = \ 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$ e

$$\sqrt{3} \cong 2\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{128} - \frac{1}{1024} - \frac{5}{32768} - \frac{7}{262144}\right) = 2\times\frac{227025}{262144} \cong 1.732063293.$$

Não deixe de comparar essa aproximação com aquela que você pode obter usando uma simples calculadora científica. Veja que usamos apenas 6 termos da série.

Em nossa viagem no tempo e espaço, estivemos em inúmeras regiões. Assim, chegamos à segunda metade do século 17, mais especificamente na Alemanha.

23.2 Leibniz entra em cena

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Além do Cálculo, Leibniz deu grandes contribuições no campo da lógica.

Para saber mais sobre este tema, você pode ler o capítulo "Newton e Leibniz – Um Choque de Titãs", do livro *Grandes Debates da Ciência*, de Hal Hellman, Editora Unesp, 1998.

Alguns anos depois, entre 1673 e 1676, um outro gênio produziu sua versão do Cálculo. Este foi Gottfried Wilhelm Leibniz, que começara sua carreira como diplomata. Ele fora atraído para a Matemática graças à influência de Cristian Huyggens, a quem conhecera em Paris enquanto estava em uma missão diplomática.

Newton e Leibniz, bem como seus seguidores, se envolveram em uma polêmica sobre a originalidade da descoberta do Cálculo. Isto causou grande desgaste pessoal a cada um. A verdade é que suas abordagens foram diferentes, levados por motivações outras. Newton apresenta o Método das Fluxões como uma ferramenta que lhe permite aprofundar seus conhecimentos dos fenômenos físicos. Isto é, uma visão cinemática do Cálculo: a derivada vista como uma taxa de variação. Newton considerava x e y variando, fluindo, em função do tempo. Leibniz, por sua vez, considerava x e y variando sobre uma seqüência de valores infinitamente próximos. Ele introduziu dx e dy como sendo as diferenças entre os valores nesta seqüência.

23.3 O cálculo diferencial e integral

Newton via a integração como um problema de encontrar os x e y de uma determinada fluxão. Isto é, encontrar o deslocamento de uma dada velocidade. Portanto, para ele, a integração era, naturalmente, o processo reverso da diferenciação. Leibniz via a integração como uma soma, no estilo que fizeram, antes dele, Arquimedes e Cavalieri. Leibniz foi feliz em utilizar os 'infinitésimos' dx e dy onde Newton usou x' e y', ou seja, velocidades. Leibniz usava a palavra 'mônada' para indicar algo tão simples que não tem partes. Nenhum deles considerava o que denominamos funções, pois este conceito só foi introduzido muitos séculos depois. No entanto, ambos, definitivamente, pensavam em termos de gráficos. De qualquer forma, estavam travando uma luta com o infinito, no caso, o infinitamente pequeno.

Apesar de Newton ter desenvolvido sua teoria primeiro, coube a Leibniz o mérito de ter publicado sua versão, em 1684, introduzindo o termo *calculus summatorius*, e divulgando suas idéias. Leibniz dava muita importância à notação, no que estava absolutamente certo.

Leibniz introduziu os símbolos matemáticos d e $\displaystyle\int$, estabelecendo, por volta de 1675, a notação

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2},$$

exatamente como nós o fazemos até hoje.

Assim chegamos ao fim da unidade didática com pelo menos uma visão global da enorme odisséia que foi o descobrimento do Cálculo. Newton e Leibniz se sobrepuseram a seus contemporâneos devido ao escopo de suas descobertas. Conseguiram ver *além dos outros matemáticos. Pudera, eles se encontravam sobre os ombros de gigantes, como diria Newton.*

De qualquer forma, muito ainda estava por ser feito e os novos desbravadores já estavam se preparando. Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli e, principalmente, Leonhard Euler, continuariam a descobrir e a usar o Cálculo por todo o século 18 e só no século 19 Cauchy e Weierstrass colocariam toda a teoria em bases sólidas, como a estudamos hoje.

Mas, para contar um pouco sobre essa parte da história, devemos esperar as próximas unidades didáticas.