Unidade 7

A equação de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Nesta unidade didática você conhecerá alguns dos triunfos de Leonhard Euler, um dos matemáticos mais produtivos de todos os tempos e o mais importante do século 18.

Verá como os desafios matemáticos continuavam estimulando a criatividade dos matemáticos, indicando que a sede de resolver problemas continuava, entre os matemáticos, forte como sempre.

Iniciamos mostrando como as equações matemáticas passaram a ocupar espaço no cenário da Matemática, que começava a ficar mais sintética e menos literal.

Texto 24: A Essência da Matemática

O número de outubro de 2004 da revista *Physics World* traz um artigo intitulado *The greatest equations ever*, algo assim como *As maiores equações de todos os tempos*. O artigo é resultado de uma pesquisa proposta aos leitores da revista, pedindo indicações de suas equações preferidas, acompanhadas de uma justificativa da escolha.

Entre as mais indicadas estavam equações bem conhecidas e, também, surpresas. Veja algumas.

$\boxed{1 + 1 = 2}$ $\boxed{E = m\,c^2}$ $\boxed{F = m\,a}$

A equação $1+1=2$ foi indicada, por exemplo, por sua simplicidade, enquanto as outras duas têm a popularidade garantida devido à sua importância no mundo da Física. A equação $E = m\,c^2$, formulada por Einstein, expressa a relação entre a massa e a energia, no contexto da Teoria da Relatividade e $F = m\,a$ é a formulação da Segunda Lei de Newton, relacionando a aceleração provocada por uma força atuando sobre um corpo.

O artigo também provocou uma discussão sobre o significado do termo equação. Mais especificamente, as pessoas queriam saber a diferença entre termos como equação, fórmula e teorema. Como se trata de nomenclatura, a discussão tem uma importância relativa, mas é interessante. Por exemplo, é bem provável que muitas pessoas respondam com a equação $a^2 = b^2 + c^2$ ao pedido de citar o Teorema de Pitágoras.

É verdade que a fórmula *não é* o Teorema de Pitágoras, no sentido que a igualdade pode não ser satisfeita caso a, b e c não sejam os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. E, mesmo que fossem, a igualdade só se cumpre se a for o comprimento do lado maior, a hipotenusa.

Mas, implicâncias matemáticas à parte, não podemos negar que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

carrega, em si, a essência do teorema.

Outro exemplo vem da fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + F \;=\; 2$$

relacionando algebricamente o número de seus vértices, arestas e faces.

Heinrich Hertz (1857-1894), físico alemão que demonstrou pela primeira vez, em 1888, a existência de radiação eletromagnética, construindo um aparelho que produzia ondas de rádio. Seu nome é usado para denotar a unidade de freqüência que um determinado evento repetitivo, como o som ou ondas eletromagnéticas, ocorre por unidade de tempo. 1 Hz (um hertz) indica que o evento ocorre uma vez por segundo.

Uma das citações famosas sobre esse tema é de Hertz:

> É impossível evitar o sentimento de que essas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, que elas são mais sábias do que nós, mais sábias mesmo que seus descobridores, que conseguimos delas algo mais do que foi originalmente colocado nelas.

A frase de Hertz tem um extra significado quando notamos que entre as mais indicadas na pesquisa estavam as equações de Maxwell, que descrevem como um campo eletromagnético varia no espaço e no tempo. Vale a pena dar uma olhada nessas equações, mesmo que não esteja em nossos planos nos aprofundarmos em tal direção.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 J + \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

James Clerk Maxwell (1831-1879), físico britânico que explicou as propriedades do eletromagnetismo. Publicou um conjunto de quatro equações diferenciais nas quais descreve a natureza dos campos eletromagnéticos em termos de espaço e tempo.

Nestas equações, E é o campo elétrico, B o campo magnético, $\nabla \cdot X$ denota o divergente do campo X, $\nabla \times X$ o seu rotacional e, bem, assume-se que as grandezas estão representadas no sistema de unidades mks.

As duas primeiras equações dizem que o campo elétrico e o campo magnético satisfazem à Lei de Gauss.

Apesar de terem uma estrutura relativamente simples, as equações de Maxwell nos permitiram uma nova perspectiva da natureza, unificando eletricidade e magnetismo. Essa teoria enlaçou a Física e a Matemática de uma maneira inovadora, fazendo mais do que descrever os fenômenos eletromagnéticos. Tal descoberta afetaria a maneira de produzir tanto Matemática quanto Física.

O tema é interessante mas, adiantamo-nos. Essas equações são chamadas diferenciais e foram formuladas no século 19. Nesta unidade didática, entretanto, vamos falar sobre acontecimentos ocorridos no século 18. Isso nos traz à outra das equações mais votadas:

$$\boxed{e^{i\,\pi} + 1 \; = \; 0.}$$

Conhecida por *equação de Euler*, ela não descreve algum fenômeno especial da natureza, não dita uma certa identidade válida para quaisquer grandezas, como a famosa $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \; = \; 1$, ou é a conclusão de um grande teorema, como a equação $a^2 = b^2 + c^2$, conclusão do Teorema de Pitágoras. No entanto, ela tem um sentido simbólico forte.

A equação reúne nove conceitos básicos de Matemática numa só expressão. Temos: e, a base dos logaritmos naturais; a operação elevar ao expoente; a constante π; a multiplicação; números complexos; a operação de soma, representada por $+$; o número 1; igualdade; o número 0.

A equação merece ser citada no Guinness. (Adivinhe qual das equações é citada nesse livro!)

Na verdade, a equação simboliza a diversidade, reunindo numa frase tão curta tantas diferentes áreas matemáticas. Além do mais, é um tributo a um homem genial, Leonhard Euler (1707 - 1783), que com sua simplicidade, criatividade e muito trabalho contribuiu de maneira singular para o desenvolvimento da Matemática.

É por essa razão que consideramos as equações a essência da Matemática.

24.1 Os irmãos Bernoulli

Começamos a descrever o desenvolvimento matemático ocorrido no século 18 fazendo menção a dois membros de uma famosa família de matemáticos: os irmãos Jakob e Johann Bernoulli, precursores do genial Euler.

O mais velho dos irmãos Bernoulli, Jakob (1645 - 1705), deu enormes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, das séries (somas infinitas) e, especialmente, à probabilidade. Seu principal trabalho foi publicado em 1713, sob o nome de *Ars Conjectandi* (*Arte de Conjecturar*), sobre probabilidade.

Jakob publicou uma prova da divergência da série harmônica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \dots$$

num livro de 1689, atribuindo, no entanto, a solução do problema ao irmão Johann Bernoulli (1667 - 1748). É interessante observar que o argumento apresentado é diferente daquele usado por Nicole Oresme, mais do que dois séculos antes. Além dos argumentos dados por Oresme e pelos Bernoulli, o italiano Pietro Mengoli (1625 - 1686) apresentou uma terceira demonstração, que antecedeu à de Johann por quarenta anos.

Isso mostra como a divulgação dos resultados matemáticos era deficiente. Com o passar do tempo isso melhoraria muito. De fato, os principais matemáticos do século 18 estavam ligados a alguma academia de ciência. As mais importantes eram a de Paris, Berlim, São Petersburgo e Londres. Essas academias estavam diretamente ligadas aos governantes daqueles países, como Luís XV e Luís XVI, Frederico, o Grande, Catarina, a Grande.

Johann Bernoulli também foi um grande matemático e teve um papel de destaque, juntamente com seu irmão, no desenvolvimento e divulgação do Cálculo. Eles mantiveram freqüente correspondência com Leibniz. Johann foi professor de um nobre francês, o Marquês de l'Hôpital (1661 - 1704), que publicou o primeiro livro texto de Cálculo, em 1696, chamado *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (*Análise dos infinitamente pequenos para o entendimento de curvas*).

Esse livro apresentou a conhecida *Regra de l'Hôpital*, um resultado obtido por Johann Bernoulli, que permite calcular com desembaraço alguns limites, garantindo que, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis tais que $f(a) = g(a) = 0$ e, $g(x) \neq 0$ para valores diferentes x de a, suficientemente próximos a a,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite da direita exista.

Uma interrupção para um pouco de prática.

Atividade 28

Use a Regra de l'Hôpital para calcular o limite a seguir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 6x + 6 \operatorname{sen} x}{x^5}.$$

24.2 O desafio da Braquistócrona

Com o desenvolvimento do Cálculo, surgiu uma nova forma de equação, que serviria para modelar muitos problemas provenientes de outras áreas científicas.

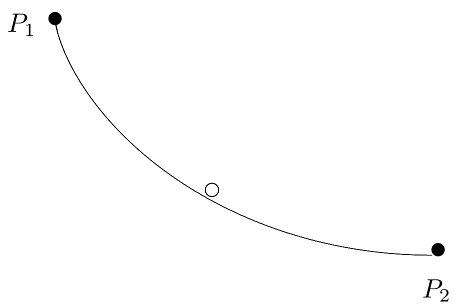
São equações cujas soluções não são números, mas o que nós chamamos funções. Naqueles dias podiam ser chamadas simplesmente curvas. Essas equações são as chamadas *equações diferenciais*. Por exemplo, as equações diferenciais lineares, que estudamos ainda nos cursos de Cálculo, têm a forma geral

$$y' + p(x)\,y \;=\; q(x).$$

Um exemplo de problema desse tipo foi proposto por Johann Bernoulli, em 1696, num artigo publicado na revista *Acta Eruditorum*, editada por Leibniz. Na verdade, Johann propôs um desafio a seus colegas matemáticos, bem no estilo dos desafios havidos nos dias de Tartaglia, Cardano e Ferrari. O problema consistia em descobrir a identidade da curva que ele nomeou *braquistócrona*, junção das palavras gregas *brachistos*, que quer dizer *o mais curto*, e *chronos*, que significa *tempo*.

> Descubra a curva que une dois pontos P_1 e P_2 num plano vertical, de tal modo que um ponto material de massa m, deslizando sem atrito sobre essa curva, sujeito apenas à gravidade, a percorra num intervalo de tempo mínimo.

É claro que a tentativa mais primitiva consiste em tomar a reta que une os dois tais pontos. No entanto, essa não é a resposta correta.



O prazo estipulado por Johann para que a resposta fosse apresentada terminava em 1 de janeiro de 1697. Ao fim desse prazo, a única resposta apresentada fora a de Leibniz. Na verdade, o grande desafio estava estendido a Newton, que nesses dias andava ocupado com a direção da Casa da Moeda inglesa. Johann estendeu o prazo de seu desafio até a Páscoa e fez questão de enviá-lo até a Inglaterra.

Quando chegou a Páscoa, Johann havia recebido cinco soluções. Uma era dele próprio e outra dada por Leibniz. Jakob também apresentou sua solução, para possível embaraço de seu orgulhoso irmão, assim como o fez o jovem Marquês de l'Hôpital. No entanto, mais uma resposta correta chegara da Inglaterra, porém sem nenhuma assinatura. A braquistócrona nada mais é do que parte da ciclóide, curva conhecida e estudada por Pascal, Galileu e outros.

Para saber mais! Se você quiser saber mais detalhes sobre o problema da braquistócrona, há informação, por exemplo, no site

www.icms.sc.usp.br/∼szani/bra/bra.html,

da página da Universidade de São Paulo, em São Carlos.

Conta a lenda que, ao abrir a solução enviada por uma carta anônima de Londres, Johann, entre surpreso e embaraçado, disse: *pela pata se reconhece o leão!*

Chegamos aqui ao matemático que, por sua inventividade, constitui o tema da unidade.

Leonhard Euler (1707-1783).

Texto 25: Euler – O Gênio do Século

Nesse momento histórico, tão rico em atividade matemática e de muita competição, nasceu Leonhard Euler, na Basiléia, Suíça. Seu pai, Paul Euler, era pastor luterano e havia sido aluno de Jakob Bernoulli e dera ao filho suas primeiras lições. Devido a essa conexão com a família Bernoulli, Euler foi aluno de Johann Bernoulli e manteve amizade por toda a vida com seus filhos, Daniel e Nicolau, ambos matemáticos.

Euler dividiu sua vida profissional entre duas instituições: a Academia de Ciência de São Petersburgo, na Rússia, e a Academia de Ciência de Berlim. Ele ocupou, em 1727, a cadeira de Medicina na Academia de Ciência de São Petersburgo, que fora fundada dois anos antes por Catarina I, esposa de Pedro, o Grande, Czar da Rússia. Alguns anos depois, ocupou a cadeira de Matemática, que ficara vaga quando Daniel Bernoulli mudou-se de volta para a Suíça. Em 1741 mudou-se para Berlim, onde permaneceu até 1766. Leonhard Euler era um homem simples e nunca se sentira à vontade na corte de Frederico, o Grande, patrono da Academia de Berlim, na qual brilhavam nomes como Voltaire, e as discussões filosóficas eram muito apreciadas. Assim que uma nova oportunidade surgiu, Euler retornou definitivamente para São Petersburgo.

Euler teve uma vida sem dificuldades financeiras, devido aos cargos que ocupou, e constituiu uma enorme família. Foi perdendo a visão do olho direito ao longo da década de 1730 e viveu seus últimos 17 anos completamente cego.

Isso, no entanto, não o impediu de seguir produzindo Matemática de qualidade e em quantidade até, virtualmente, seu último suspiro. Dotado de uma memória vastíssima, sabia de cor, não só uma enormidade de números primos, mas também suas potências, como 337^6, por exemplo. Além disso, tinha uma habilidade estupenda para executar mentalmente cálculos extremamente elaborados. Suas obras completas ocupam mais de 70 volumes.

25.1 Algumas das contribuições de Euler

Euler contribuiu, de maneira decisiva em diversas áreas da Matemática, tais como geometria, cálculo e teoria de números. Foi o responsável pela integração das versões de Cálculo dadas por Leibniz e por Newton, introduzindo muitas novidades, tais como os fatores de integração das equações diferenciais. Estudou mecânica, considerando o chamado *Problema dos Três Corpos*, em sua versão mais simples. Isso é, Euler considerava o problema de determinar o movimento de um corpo de uma certa massa que se movimenta na presença do campo gravitacional de duas outras massas que estão fixas no espaço.

O *Problema dos Três Corpos* consiste em encontrar os movimentos subseqüentes de três corpos, determinados pelas leis da mecânica clássica (Leis de Gravitação, de Newton), dadas as posições iniciais, massas e velocidades.

Apenas as contribuições na área de Teoria de Números seria suficiente para garantir a Euler lugar no panteão dos matemáticos. Essas contribuições consistem de provas de teoremas formulados por Fermat.

As afirmações de Fermat chegaram até Euler pelas cartas de Christian Goldbach, que o conhecera pessoalmente. Essas cartas aguçaram a curiosidade de Euler que se envolveu profundamente com a área de Teoria de Números. Por exemplo, Goldbach perguntou sobre a conjectura proposta por Fermat, de que os números da forma $2^{2^n} + 1$ seriam primos. Euler concluiu que a afirmação é falsa, mostrando que $2^{32} + 1 = 4294967297$ é divisível por 641. Se você acha isso pouco, lembre-se que ele não dispunha de computadores.

Para ter uma idéia do feito, tente fatorar 307007 usando apenas papel e lápis! Voltaremos a falar um pouco mais sobre esse tema na última unidade didática.

Um dos grandes triunfos de Euler na Teoria de Números é a prova de que todo número perfeito par tem a forma descrita pelos antigos gregos, $2^{n-1}(2^n - 1)$, sempre que $2^n - 1$ for um número primo.

Outro resultado interessante, provado por Euler, é o chamado *Pequeno Teorema de Fermat*. Esse teorema afirma que, se a é um número inteiro dado qualquer e o primo p não é um de seus fatores, então p é um fator de $a^{p-1} - 1$. Esse resultado é, realmente, estupendo. Veja alguns exemplos:

a	p	$a^{p-1} - 1$	decomposição em fatores primos
2	13	$2^{13-1} - 1$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 13$
8	5	$8^{5-1} - 1$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 13$
10	7	$10^{7-1} - 1$	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
2	41	$2^{41-1} - 1$	$3 \times 5^2 \times 11 \times 17 \times 31 \times 41 \times 61681$

Você deve ter notado que as duas primeiras linhas representam o mesmo número.

Resultados desse tipo ganharam, em nossos dias, um extra interesse devido a seu uso em *criptografia*. Voltaremos a falar sobre esse tema na última unidade didática.

A *criptografia* estuda maneiras de codificar certos dados ou informações para que sejam decodificados apenas por pessoas específicas. A criptografia é muito antiga, mas nos dias de hoje ela ganhou um papel ainda mais importante, devido ao desenvolvimento tecnológico e da comunicação por computadores.

Euler tentou mostrar que todo número inteiro positivo é a soma de quatro números inteiros elevados ao quadrado $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Por exemplo, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$ e $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$. É claro que não há unicidade nessa representação pois, por exemplo, $13 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$. Apesar de seus progressos, essa façanha seria deixada para Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813).

Goldbach entrou para a história da Matemática com mais uma de suas perguntas. Em uma carta escrita em 7 de junho de 1724, pergunta a Euler se seria possível escrever qualquer número inteiro maior do que dois como a soma de três primos. Goldbach considerava o número 1 como um primo, coisa que não fazemos mais. Euler reapresentou a pergunta da seguinte forma: seria possível escrever qualquer número inteiro par como a soma de dois números primos? Por exemplo, $12 = 7 + 5$, $14 = 11 + 3$ e $1248 = 337 + 911$.

Essa questão continua desafiando os praticantes de teoria de números até esse momento!

25.2 Somas infinitas, mais uma vez ...

Jakob Bernoulli havia provado que a série harmônica diverge usando o fato de a soma dos inversos dos números triangulares ser igual a 2:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \cdots + \frac{2}{k\,(k+1)} + \ldots \;=\; 2.$$

O cálculo dessa soma fora o primeiro triunfo de Leibniz. A próxima pergunta era, naturalmente, a soma dos inversos dos números quadrados,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$$

Nesse caso, o problema mostrou-se mais resistente. Veja, para cada inteiro positivo k,

$$\frac{1}{k^2} \;<\; \frac{1}{\dfrac{k\,(k+1)}{2}},$$

Como a série dos inversos dos números triangulares converge, a série dos inversos dos números quadrados também converge, uma vez que seu termo geral é menor.

Você se lembra do Teste da Comparação? A questão era descobrir o resultado da soma.

Ao resolver esse problema, em 1734, Euler estabeleceu definitivamente sua reputação como matemático genial. Ele começou observando que a soma daria, aproximadamente, 1.6449. Chegar a essa aproximação sem usar um computador ou mesmo uma calculadora de bolso já é um feito memorável. No entanto, essa aproximação não dá qualquer indicação de qual seria, exatamente, o resultado.

A solução dada por Euler usou o fato de que a função seno pode ser aproximada por polinômios:

$$\operatorname{sen} x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Ele sabia que, se $P(x)$ é um polinômio tal que $P(0) = 1$ e a, b, c, $\ldots$, d são raízes de $P(x)$, então podemos escrever

$$P(x) \;=\; \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{c}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{d}\right).$$

Atividade 29

Efetue

$$16\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{4}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

e mostre que suas raízes são $-2,\ 4$ e $\pm\sqrt{2}$.

Euler observou que

$$f(x) \;=\; \frac{\operatorname{sen} x}{x} \;=\; 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

é tal que $f(0)=1$ e *deveria* ter raízes $\pm\pi$, $\pm 2\,\pi$, $\pm 3\pi$ e assim por diante. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\,\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\,\pi}\right)\dots = \\ &= \left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\,\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\,\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{25\,\pi^2}\right]\dots \end{aligned}$$

O próximo passo consiste em expandir o produto da direita e obter

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots \;=\; 1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\,\pi^2}+\frac{1}{9\,\pi^2}+\frac{1}{25\,\pi^2}+\dots\right)x^2+(\dots)\,x^4-\dots$$

A resposta está bem depois da próxima esquina! Comparando os coeficientes de x^2, Euler concluiu que

$$-\frac{1}{3!} \;=\; -\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\,\pi^2}+\frac{1}{9\,\pi^2}+\frac{1}{25\,\pi^2}+\dots\right)$$

e, portanto,

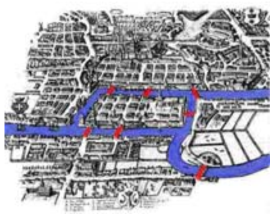
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\dots \;=\; \frac{\pi^2}{6},$$

um resultado realmente surpreendente.

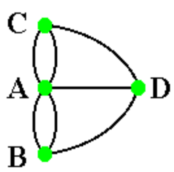
25.3 A aurora de uma nova teoria

A criatividade deu a Euler uma capacidade ímpar de resolver problemas. Ele era capaz de *ver* muito além do que estava ao alcance de seus contemporâneos. Seu nome estará para sempre associado ao nascimento da *Topologia*, uma área que só se desenvolveria plenamente no século 20, após a introdução da Teoria de Conjuntos, por Georg Cantor.

Euler resolveu, de maneira absolutamente genial, um antigo problema (mais um) conhecido como o *Problema das Pontes de Königsberg*. Essa cidade ficava, no início do século 18, na Prússia. Cortada pelo rio Pregel, que circunda uma ilha e divide-se numa bifurcação, as diferentes partes da cidade eram conectadas por sete pontes. O Problema das Pontes de Königsberg consistia em determinar se seria possível fazer um passeio completo pela cidade cruzando cada uma das sete pontes uma única vez.



Concentrando-se na essência do problema, Euler observou que a pergunta é equivalente a saber se o diagrama a seguir poderia ser percorrido, indo de um vértice a outro, percorrendo cada uma das arestas uma única vez.



Tais diagramas são conhecidos agora como *grafos*. Usando uma argumentação simples, porém efetiva, estabeleceu um critério matemático que determina se um tal diagrama pode ser percorrido dessa forma: passando por todas as arestas, percorrendo cada uma delas uma única vez.

Veja o Teorema de Euler:

> Teorema: Um grafo G admite um circuito euleriano se, e somente se, é conexo e todos os vértices têm grau par.

Basta observar que todos os vértices do grafo das Pontes de Königsberg têm grau ímpar, pois a cada um deles chega um número ímpar de arestas.

25.4 A equação $e^{i\pi} + 1 = 0$

Os matemáticos anteriores a Euler consideravam senos e cossenos como segmentos de retas relativos a arcos de um círculo de raio R. Foi ele que passou a considerar senos e cossenos como funções, exatamente como o fazemos hoje. Com a definição de Euler, a identidade trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x \;+\; \cos^2 x \;=\; 1$$

é imediata.

Usando a unidade imaginária $i \;=\; \sqrt{-1}$, mais uma novidade introduzida por ele, deduziu a chamada *Identidade de De Moivre*,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n \;=\; \cos nx + i \operatorname{sen} nx.$$

Usando isso, deduziu as séries trigonométricas

$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

e

$$\operatorname{sen} x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Isso permitiu que estabelecesse a relação entre a função exponencial e as funções trigonométricas:

$$\cos x \;=\; \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\operatorname{sen} x \;=\; \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

e

$$e^{ix} \;=\; \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Em particular, para $x = \pi$, obtemos $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Leonhard Euler trabalhou até seu último dia de vida. O planeta Urano havia sido recentemente descoberto e ele estava interessado no cálculo de sua órbita. Os problemas matemáticos nunca deixaram de interessar-lhe.

Atuou em todas as áreas da Matemática que eram conhecidas em seus dias, contribuindo substancialmente para elas. Não restringiu sua atenção apenas a questões de natureza estritamente matemática, mas dedicou-se também a problemas da mecânica e de outras áreas de natureza aplicada. Sua genialidade nos legou novos ramos da Matemática, grandes teoremas e diversos algoritmos, que enfatizam os aspectos aplicados e práticos da Matemática. Muitos deles são usados até hoje.

Euler fora contemporâneo de Johann Sebastian Bach, por exemplo, e possivelmente encontrara um de seus filhos, Karl Philip Emanuel, na corte de Frederico, o Grande, um dos déspotas iluminados da época, que poderia discutir filosofia com Voltaire ou executar ao violoncelo peças compostas exclusivamente para ele. No entanto, quando morreu, em 1783, uma nova ordem social estava prestes a se instalar no mundo. Três anos depois, em 1786, estrearia em Viena a ópera As Bodas de Fígaro, *de Wolfgang Amadeus Mozart, com libreto de Lorenzo da Ponte, baseada numa peça homônima de Beaumarchais. Um novo século estava por vir, trazendo muitas mudanças. A música seria outra. A figura matemática que dominaria a cena nesses dias de mudanças era Johann Carl Friedrich Gauss, que havia nascido em 1777.*

As grandes conquistas feitas no período de vida de Euler estabeleceram um patamar jamais sonhado na Matemática, mas estavam sujeitas a muitas críticas. Era preciso uma geração que se preocupasse com o rigor das teorias e que questionasse todos os seus fundamentos. Essa geração já estava a caminho e isso será o pano de fundo de nossa próxima unidade didática.