Unidade 8

Construção dos Números Reais – Cauchy e Dedekind

Nesta unidade didática você conhecerá como a Matemática se tornou, no decorrer do século 19, uma ciência mais abstrata e independente da realidade física.

Verá como a atividade matemática ganhou um caráter mais especializado, o que refletiu na divisão de áreas, como a Geometria e a Álgebra, em áreas mais específicas, assim como no surgimento de novos campos de interesse.

Texto 26: Uma Longa Jornada Rumo à Abstração

Nos dias de Euler, os problemas que ocupavam os matemáticos provinham, principalmente, da mecânica e da astronomia, além das questões de Teoria de Números.

Os matemáticos eram membros de academias científicas, raramente davam aulas e dedicavam todo o tempo às pesquisas. A maioria deles escrevia seus trabalhos em latim, a língua da ciência.

Essas características estavam prestes a se alterar, assim como haveria mudanças em outros setores da atividade humana, com a chegada do século 19.

Elas ocorreriam na ordem social, através de fenômenos como a Revolução Francesa (1789) e a Revolução Industrial. Esta, iniciada nos meados do século 18, na Inglaterra, espalhou-se por toda a Europa no decorrer do século 19 e chegou à América, por exemplo:

- em 1807, Robert Fulton construiu o primeiro barco a vapor;
- em 1814, George Stephenson construiu a primeira locomotiva a vapor;
- em 1836, Samuel Morse inventou o telégrafo.

A eletricidade passou a ser usada como fonte de energia após as descobertas feitas por Georg Simon Ohm, sobre a corrente elétrica, em 1827, e a divulgação das noções básicas de eletromagnetismo por Michael Faraday, em 1831.

As artes seriam palco de movimentos como o romantismo. Basta citar o poeta e cientista Johann Wolfgang von Goethe (1749 - 1832) e o compositor Ludwig van Beethoven (1770 - 1827), que viveram nesse período de transição. Na pintura, as obras de Joseph Turner (1775 - 1851) começam a apresentar indícios de mudanças, que culminariam no movimento impressionista.

Também as ciências seriam afetadas. Em 1859 o naturalista inglês Charles Darwin (1809 - 1882) abalou o mundo científico com a publicação de *A origem das espécies por meio da seleção natural*.

Na Matemática, os conceitos do Cálculo careciam de uma fundamentação mais sólida. Nesse sentido, as primeiras contribuições viriam de Gauss, com a noção de convergência de séries, que seria levado a termo com a criação da Análise Matemática, explicitada nos trabalhos de Cauchy, Weierstrass e Dedekind.

A Matemática ganharia maior abstração e especialização, e passaria a ser expressa na língua nativa dos matemáticos, facilitando sua divulgação.

Você já viu, na quarta unidade, como a questão do Quinto Postulado de Euclides acabou gerando novos tipos de geometrias. Na Álgebra, essa onda de abstração tomou a forma da teoria de grupos e surgiram os primeiros exemplos de produtos não-comutativos, algo que antes era inconcebível.

Os matemáticos passariam a ocupar posições nas universidades e outras escolas, como academias militares, assumindo o papel de professores.

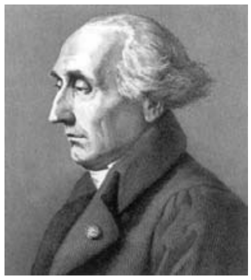
A preocupação com o rigor no estabelecimento dos axiomas e definições, assim como nas argumentações, estaria mais em evidência.

É importante lembrar que nesse período, devido à maior divulgação científica e aos avanços sociais, as mulheres passaram a contribuir diretamente para a Matemática.

No entanto, tudo isso aconteceria aos poucos. Para entender melhor este período de transição, vamos falar da obra de um matemático que o viveu, mencionando algumas questões para as quais ele contribuiu.

26.1 Um matemático modesto – Joseph-Louis Lagrange

Em 12 de agosto de 1755, um jovem matemático de Turino, na época capital do reino da Sardenha, hoje na Itália, enviou uma carta a Euler descrevendo os resultados que obtivera sobre o problema da *tautócrona*, usando um método de determinar máximos e mínimos que desenvolvera.



Joseph-Louis Lagrange

Lagrange trabalhou em problemas de astronomia, mecânica, mecânica dos fluidos, probabilidade. Por exemplo, escreveu um trabalho explicando por que a lua exibe sempre a mesma face para a terra.

Muito bem, ele se chamava Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) e o método é estudado nos cursos de Cálculo: *multiplicadores de Lagrange.*

A tautócrona é a curva sobre a qual o período de oscilação (desprezados o atrito e a perda de energia) não depende da amplitude do movimento. Em outras palavras, se duas bolinhas forem soltas de diferentes pontos da tautócrona, chegarão ao seu ponto mais baixo no mesmo intervalo de tempo.

Quando Euler retornou para São Petersburgo, Lagrange mudou-se para Berlim, ocupando a direção da Academia de Ciências, em 1766. Ele se mudou mais uma vez, em 1787, para Paris, onde permaneceu ativo até o fim da vida.

A palavra tautócrona provém do grego *tauto* e quer dizer mesmo, como em tautologia, e *cronos* significa tempo, como em braquistócrona. Bem, essa curva é (surpresa!) – a ciclóide e a carta impressionou Euler, que a respondeu em poucos dias.

Criou uma teoria sistemática sobre as equações diferenciais, incluindo um método de resolução chamado *variação de parâmetros*. Publicou, em 1788, o livro *Mécanique analytique* (*Mecânica analítica*). Em *Réflexions sur la résolution algebrique des équations* (*Reflexões sobre a resolução algébrica das equações*) estudou a razão das equações de grau até 4 poderem ser resolvidas por radicais. Nesse trabalho considera as raízes de uma equação como quantidades abstratas, em vez de terem valores numéricos. Assim, foi o primeiro a estudar as permutações das raízes, o que levaria ao desenvolvimento da Teoria de Grupos, por Galois e Cauchy.

Uma permutação de um conjunto ordenado X é um novo arranjo de seus elementos. Por exemplo, se X é a tripla $(1, 2, 3)$, há seis permutações.

Lagrange produziu resultados importantes em Teoria de Números, como as provas de que todo número inteiro positivo é a soma de quatro números inteiros elevados ao quadrado ($5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$) e, também, o Teorema de Wilson, que afirma:

p é primo se, e somente se, p divide $(p - 1)! + 1$.

Atividade 30

Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio r, usando multiplicadores de Lagrange.

Atividade 31

Verifique o Teorema de Wilson para os números 4, 5, 6 e 7.

Atividade 32

Escreva 99 como a soma de quatro quadrados de três maneiras diferentes.

Você já sabe como foi importante a atuação de Carl Friedrich Gauss na resolução dos três clássicos problemas da Matemática, apresentados na primeira unidade didática, além de suas contribuições para a questão do Quinto Postulado de Euclides.

No próximo texto, conhecerá outros resultados associados a Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Uma de suas frases mais marcantes é :

"A Matemática é a rainha das ciências, e a Aritmética, a rainha da Matemática."

Texto 27: Ligget se', disse o jovem Gauss

Nascido de pais muito simples, Gauss foi reconhecido como uma criança prodígio e recebeu ajuda do Duque de Brunswick. Estudou na Universidade de Göttigen e obteve seu doutorado pela Universidade de Helmstedt, no ano de 1799. De 1807 até sua morte, em 1855, trabalhou como professor, astrônomo e diretor do observatório da Universidade Göttigen.

É folclórica a história de como Gauss, ainda um garoto de dez anos, impressionou seu professor da escola primária. O professor, aparentemente, pretendia manter os alunos ocupados por algum tempo e mandou-os somar os números inteiros de 1 até 100. Mal havia enunciado o problema e o jovem Gauss colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo – *ligget se'* –, algo assim como – *aqui está [a resposta].*

O professor, evidentemente, não podia crer que Gauss tivesse a resposta correta, mas para a sua surpresa, lá estava: 5050. É claro que o padrão de crescimento constante da série de números não passou despercebido ao menino. Ele notou que a soma de elementos em posições simétricas é constante: $1 + 100 = 101$,

$2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ etc. Como há 50 parcelas desse tipo,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 \;=\; 50 \times 101 \;=\; 5050.$$

27.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Carl Friedrich Gauss foi, muito possivelmente, um dos maiores matemáticos de que temos notícia. Seus trabalhos conservam alguns traços da Matemática do século 18: ele se dedicou tanto à Matemática *pura* como à *aplicada*, viveu relativamente isolado, ocupava-se de problemas ligados à astronomia e escrevia os trabalhos em latim. O escopo de sua obra é imenso, apesar do número limitado de publicações. Lembremo-nos de um de seus motos: *pouca sed matura (pouco, porém maduro)*.

Gauss tinha uma enorme preocupação com o rigor, uma das características que marcaria a Matemática do século 19.

Em sua juventude, provaria muitos resultados que já haviam sido descobertos anteriormente, além de alguns por ele mesmo. No entanto, suas demonstrações eram, em geral, mais rigorosas e completas do que as de seus antecessores. Ele estudou as obras dos matemáticos do passado e era bem crítico. Na verdade, a insatisfação com as argumentações anteriores era uma fonte de motivação.

Euler, Laplace, Lagrange e Legendre eram agraciados por Gauss com o elogio *clarissimus*, em latim, é claro. Newton, no entanto, era considerado *sumus*.

Sua preocupação com o rigor teve grande influência na atitude geral dos matemáticos a partir de então, devido à sua reconhecida importância.

No diário em que registrava suas descobertas, em 10 de julho de 1796, está escrito:

$$\mathrm{EΥPHKA\ !} \quad \mathrm{num} \;=\; \Delta + \Delta + \Delta.$$

Gauss acabara de provar que todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de três números triangulares. Isto é, os números 0, 1, 3, 6, 10, 15, $\ldots$

Por exemplo, $28 \;=\; 1 + 6 + 21$.

Essa descoberta foi tão importante que ele a saudou com a arquimediana exclamação: eureka!

Sua estréia na carreira matemática não poderia ter sido mais impressionante: após um período de perto de 2000 anos, alguém descobre mais um polígono regular que pode ser construído com régua e compasso: o heptadecágono, um polígono de 17 lados. A solução desse problema é equivalente a chegar ao seguinte resultado:

$$16\cos\frac{2\pi}{17} = -1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Em sua tese de doutorado ele demonstra o chamado Teorema Fundamental da Álgebra, que pode ser apresentado como:

> Toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas ou reais, coincidentes ou distintas.

Na verdade, há outras formulações equivalentes do teorema. Uma delas diz que toda equação polinomial de coeficientes reais pode ser expressa como o produto de fatores lineares ou quadráticos (irredutíveis) com coeficientes reais.

Por exemplo, $3x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x - 2 = (3x-1)(x^2+2x+2)(x-1)^2$. Note que $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$ é irredutível, isto é, não tem raízes reais, e o fator $(x-1)$ tem multiplicidade 2.

Antes de Gauss, vários matemáticos haviam tentado demonstrar este teorema, como Jean d'Alembert (1717 - 1783), que enunciou o teorema e tentou uma demonstração, sem sucesso.

Euler (é claro) mostrou a validade do teorema para polinômios de grau até 6 e tentou uma demonstração para o caso geral.

Em sua dissertação, apresentada em 1799, Gauss critica as provas dadas anteriormente. Sobre a prova de d'Alembert, afirma: *uma prova rigorosa poderia ser construída nestas mesmas bases*. A prova dada por Gauss é de natureza topológica e também é passível de crítica, sob nosso ponto de vista. De qualquer forma, em 1816, Gauss publicou uma segunda prova, seguindo a abordagem dada por Euler. Essa prova é correta.

Como era típico, retornou ao tema e, ainda em 1816, apresentou uma terceira prova, que também é de natureza topológica.

Atividade 33

Fatore (segundo o Teorema Fundamental da Álgebra) os seguintes polinômios: x^2-1, x^3-1, x^3+1, x^4-1, x^4+1.

27.2 Investigações Aritméticas

Em 1801, Gauss publicou o livro *Disquisitiones Arithmeticae (Investigações Aritméticas)*, um texto sobre Teoria de Números que é um marco na literatura matemática (escrito aos 24 anos), em que apresenta, de maneira organizada, resultados obtidos por estudiosos como Fermat, Euler, Lagrange e Legendre, além de novos e importantes resultados.

Gauss introduziu a noção de *congruência* entre dois números inteiros: sejam a, b e m números inteiros diferentes de zero. Dizemos que a é *congruente* a b módulo m se m dividir a diferença $a - b$, e escrevemos

$$a \equiv b \mod m.$$

Por exemplo, $13 \equiv 2 \mod 11$ e $25 \equiv 1 \mod 4$. Esse conceito parece muito abstrato, à primeira vista, mas todo mundo conhece e usa com desenvoltura alguns exemplos. Veja, quem nunca brincou de *par ou ímpar*, ou *zerinho ou um*, como as crianças dizem agora? Isto é, cada número inteiro é congruente módulo 2 a 0 ou a 1, e isso divide os inteiros em dois tipos: pares e ímpares.

Outro caso conhecido é a maneira como contamos as horas do dia, tomando-as módulo 12 ou 24, ou os minutos, que tomamos módulo 60.

Usando essa linguagem, Gauss apresenta no *Disquisitiones Arithmeticae* o Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Wilson e outros resultados de forma organizada e sistemática.

Po exemplo, a conclusão do Pequeno Teorema de Fermat: se p é primo e a é um inteiro qualquer, então p divide $(a^p - a)$, pode ser escrita usando a noção de congruência como $a^p = a \mod p$.

Gauss foi o primeiro matemático a enfatizar a importância da propriedade de fatorização única dos números inteiros em fatores primos, conhecida como o Teorema Fundamental da Aritmética, que ele enunciou e provou explicitamente. Esse fato já havia sido usado na demonstração da infinitude dos primos, por Euclides.

No início do *Disquisitiones Arithmeticae* Gauss aborda a questão da resolução de equações do tipo

$$ax \equiv b \mod m,$$

chamadas congruências lineares.

As equações lineares são as mais simples que podemos esperar. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, a equação

$$a\,x = b, a \neq 0,$$

sempre tem solução, que é *única*: $x = \dfrac{b}{a}$.

No entanto, no caso das congruências lineares, mesmo essas equações podem nos reservar algumas surpresas. Como exemplo, vamos analisar as equações

$$2\,x \equiv b \mod 6,$$

para diferentes valores de b.

Devido às congruências, basta tomarmos $b = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5, os possíveis restos de divisões por 6.

Muito bem, se $b = 1, 3$ ou 5, a equação $2\,x \equiv b \mod 6$ não tem solução, como você pode testar por inspeção direta, para $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5. Contudo, para os casos de $b = 0, 2$ ou 4, a equação terá *duas* soluções. Veja: $2\,x \equiv 4 \mod 6$ tem soluções 2 e 5, pois $2 \times 2 = 4$ e $2 \times 5 = 10 = 4 + 6 \equiv 4 \mod 6$.

O estudo das congruências lineares $a\,x \equiv b \mod m$ se resume à análise do máximo divisor comum de a e m, denotado por $d = (a, m)$. A equação terá solução apenas no caso de d dividir b: $d \mid b$. Além disso, se $d \mid b$, o número de soluções será d.

No exemplo $2\,x \equiv b \mod 6$, o máximo divisor comum de 2 e 6 é 2 ($d = 2$). Assim, como 2 não divide $1, 3$ ou 5, a equação não tem solução no caso de b ser congruente módulo 6 a algum desses números. Em contrapartida, 2 divide $0, 2$ e 4 e a equação tem duas soluções distintas sempre que b for congruente módulo 6 a algum desses números.

Atividade 34

Determine todas as possíveis soluções de cada uma das congruências lineares a seguir:

$$4\,x \equiv 6 \mod 18; \qquad 4\,x = 8 \mod 12; \qquad 2\,x = 7 \mod 13.$$

Equações lineares com mais de uma solução indicam que há algo de novo no ar. Imagine, então, lidar com congruências quadráticas. Resolver esse tipo de equação é a novidade do livro: a *Lei da Reciprocidade Quadrática*, chamado *Theorema Aureum*, por Gauss. Esse resultado já havia sido descoberto por Euler e Legendre, mas ambos falharam em suas demonstrações. Gauss tinha fascinação por esse teorema, para o qual deu diversas demonstrações, ao longo de sua vida.

A questão se resume em lidar com equações do tipo

$$x^2 \equiv a \mod m.$$

Se a equação tem solução, dizemos que a é um *resíduo quadrático* de m. Por exemplo, 1 e -1 são resíduos quadráticos de 5, uma vez que $4^2 = 16 = 5\times3+1$ e $2^2 = 4 = 5 \times 1 - 1$.

Como é comum nas questões de Teoria de Números, o problema pode ser reduzido aos números primos.

Os possíveis restos da divisão por 4 são 0, 1, 2 e 3. Portanto, há quatro classes de congruência módulo 4. Assim, os números ímpares se dividem em duas classes, aqueles que são da forma $4k + 1$ são congruentes a 1 mod 4; os da forma $4l + 3$ são congruentes a 3 mod 4.

Dados dois números primos p e q, a Lei da Reciprocidade Quadrática diz que as congruências $x^2 \equiv p \mod q$ e $x^2 \equiv q \mod p$ são ambas solúveis ou ambas insolúveis, no caso em que p e q sejam congruentes a $1 \mod 4$. No caso de p e q serem congruentes a $3 \mod 4$, uma das equações terá solução e a outra não. Há uma formulação muito sintética desse teorema usando o símbolo de Legendre. (Veja, por exemplo, o livro *Introdução à Teoria dos Números*, de J. P. de Oliveira Santos, da Coleção Matemática Universitária, IMPA).

27.3 Outras contribuições de Gauss

Após a publicação do *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss voltou-se para questões de natureza mais aplicada. Em 1 de janeiro de 1801, ano da publicação desse livro, o astrônomo Giuseppe Piazzi descobriu um planetóide que denominou Ceres, mas só conseguiu observar 9 graus da órbita, antes que ele desaparecesse atrás do sol.

Usando essas informações, vários astrônomos calcularam sua órbita e fizeram previsões sobre onde ele reapareceria. A previsão de Gauss era muito diferente das outras e (quem diria?) foi confirmada, em 7 de dezembro de 1801. Apesar de não divulgar como fizera os cálculos, ele havia usado uma técnica que desenvolvera, chamada *método dos mínimos quadrados*.

Seu segundo livro, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis so-*

lem ambientium (Teoria do movimento dos corpos celestes por seções cônicas), publicado em 1809, é um tratado sobre os movimentos dos corpos celestes.

Gauss tinha um grande interesse em Geometria Diferencial, devido a seus trabalhos com geodésicas. Sua maior contribuição a esse campo foi a obra *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, em que aparecem a noção de curvatura gaussiana e o famoso *Teorema Egregrium (Teorema Notável)*.

O teorema afirma que a curvatura de uma superfície é uma propriedade intrínseca a ela. Isso quer dizer que é possível determinar a curvatura de uma superfície, isto é, como ela se curva dentro do espaço tridimensional no qual está mergulhada, usando apenas medidas de ângulos e distâncias na própria superfície.

O teorema é notável porque a definição da curvatura gaussiana faz uso da função (mergulho) da superfície no espaço tridimensional.

A partir de 1831, com a chegada a Göttingen do físico Wilhelm Weber, Gauss interessou-se pelas pesquisas sobre a teoria do campo magnético terrestre e escreveu vários trabalhos sobre o assunto.

27.4 Matemática a distância

Gauss manteve correspondência com vários matemáticos, entre eles Gotthold Eisenstein (1823 - 1852), que o visitou em Göttingen, por duas semanas em junho de 1844. Gauss tinha grande admiração por Eisenstein, que lamentavelmente teve uma carreira muito breve.

Além de Eisenstein, Gauss correspondeu-se por um bom tempo com um jovem matemático francês, Monsieur Le Blanc. Esse era, no entanto, o pseudônimo de Marie-Sophie Germain (1776 - 1831), uma jovem e talentosa matemática francesa, que usava o nome Le Blanc para vencer as barreiras colocadas pela sociedade daquela época.

Em 1830, graças aos esforços de Gauss, a Universidade de Göttingen concordou em conceder a Sophie o doutorado, mas ela faleceu antes de receber a honraria.

Gauss soube a respeito de sua verdadeira identidade em 1806.

Dois dos mais famosos alunos de Gauss foram Bernhard Riemann e Richard Dedekind, de quem falaremos no próximo texto.

Texto 28: Cortes de Dedekind

Richard Dedekind
(1831 - 1916)

Com a onda de rigor que percorria a Matemática, fortemente influenciada pelas contribuições de Gauss, uma questão que mais uma vez se apresentava era a necessidade de estabelecer uma correspondência definitiva entre os números e a reta, estabelecendo em definitivo o que chamamos de conjunto dos números reais – um desafio quase tão velho quanto a Matemática. Os números racionais são mais fáceis de estabelecer, a partir dos números inteiros, e bastam para o nosso dia-a-dia. No entanto, como a questão da não-racionalidade de $\sqrt{2}$ mostrou, eles não são suficientes para *medir* tudo.

A convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ para $\dfrac{\pi^2}{6}$, mostrada por Euler, por exemplo, pode ser usada para *definirmos* assim esse número, mas o procedimento não é prático.

A formulação de uma teoria que colocasse um ponto final sobre a questão da existência de números irracionais (pelo menos do ponto de vista da Matemática) viria dos trabalhos de Dedekind, o último aluno de Gauss.

Ele se interessou por essa questão quando ensinou Cálculo, pela primeira vez. A idéia lhe ocorreu no dia 24 de novembro de 1858 e consiste em representar cada número real como uma divisão, um *corte* nos números racionais. Isto é, todo número real r *divide* os números racionais em duas partes distintas, os maiores e os menores do que ele.

Um *corte de Dedekind* é um par ordenado (A, B), no qual A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que A não possui elemento máximo, a união de A e B é o conjunto de todos os racionais e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, $x < y$.

Essas idéias foram publicadas, em 1872, no trabalho *Stetigkeit und Irrationale Zahlen (Continuidade e Números Irracionais)*:

> Em cada caso em que há um *corte* (A_1, A_2) que não é produzido por qualquer número racional, então criamos um novo número a, irracional, que será considerado como completamente definido por este corte; diremos que este número a corresponde a este corte, ou é por ele produzido.

Além dessa importante contribuição à Matemática, Dedekind nos legou a definição de conjuntos finito e infinito, assim como trabalhos em Teoria de Números. Ele também introduziu a noção algébrica de ideal, que tem papel de destaque na teoria de anéis, mais tarde desenvolvida por Hilbert e, posteriormente, por Emmy Noether. Dedekind foi grande amigo de Georg Cantor, de cuja obra falaremos na próxima unidade didática.

Atividade 35

Seja $A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 < 2\,\}$ e seja $B = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 > 2\,\}$. Mostre que (A, B) é um corte de Dedekind. A qual número real esse corte corresponde?

Cauchy é louco e não há nada que se possa fazer sobre isso, apesar de, atualmente, ele ser a única pessoa a saber como Matemática deve ser feita.

Niels Abel

Augustin Louis Cauchy

Cauchy era um dos responsáveis pela aprovação de um importante trabalho de Abel para a publicação. O trabalho havia sido submetido em 1826 e quando Abel faleceu, em abril de 1829, Cauchy ainda não havia dado seu veredito.

Texto 29: Augustin Louis Cauchy

A frase de Niels Abel (1802 - 1829), um matemático norueguês que conheceu Cauchy quando visitou Paris para tentar a sorte, o descreve bem, apesar de sua contundência.

Nascido em Paris, no ano da Revolução Francesa, Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) foi um matemático que se dedicou ao ideal de rigor na Matemática. Suas aulas de Cálculo não faziam sucesso entre os alunos pois ele insistia em provar *rigorosamente* cada um dos teoremas que citava.

Apesar dessa baixa popularidade, Cauchy legou enormes contribuições em Análise. Entre elas podemos citar uma primeira definição de continuidade de funções (que seria colocada em termos dos famosos ε e δ – épsilon e delta – por Weierstrass).

29.1 A definição de limite, segundo Cauchy

O ponto fraco de toda a teoria criada por Newton e Leibniz e posteriormente desenvolvida por Euler e tantos outros estava na falta de uma definição precisa do limite, tão necessário para lidar com as *quantidades infinitamente pequenas*, seja lá o que isso pudesse querer dizer.

Newton usava a noção de *razão última de quantidades que desaparecem:*

> "[. . .] deve ser entendido como a razão última das quantidades, não antes delas desaparecerem, não depois, mas aquela na qual elas desaparecem."

Leibniz fala de *quantidades infinitamente pequenas*. Isto é, quantidades que, apesar de não serem iguais a zero, não podem ser tomadas ainda menores. Algo como os átomos, da Química, suas quantidades infinitamente pequenas eram como blocos indivisíveis, a coisa mais próxima a zero.

É claro que esse tipo de definição dava margem a preocupações e críticas, sendo de George Berkeley as mais severas.

Cauchy apresentou sua contribuição:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma particular variável aproximarem indefinidamente um valor fixo, de forma que a diferença se torne tão pequena quanto se queira, essa última é chamada *limite* de todas as outras.

Na verdade, esta definição apresentou imensos progressos, pois contém as idéias principais do limite: a noção de *proximidade* e o famoso *tão pequeno quanto se queira*.

Cauchy ainda nos legou o critério de convergência de seqüências, que leva seu nome, assim como uma extensão do Teorema do Valor Médio. Suas contribuições para a análise complexa também foram profundas, como o Teorema de Resíduos. O chamado Teorema da Integral de Cauchy tem uma fórmula muito bonita:

> Se $f(z)$ é uma função analítica definida em uma região simplesmente conexa R, então
>
> $$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$
>
> para qualquer contorno fechado γ completamente contido em R.

Um matemático que não é, também, algo de poeta,
nunca será um perfeito matemático.

Karl Weierstrass

Texto 30: Weierstrass – Um Grande Professor

Weierstrass teve uma vida relativamente desregrada durante seus anos na universidade, em Bonn. Dos 26 anos até o momento que sua primeira publicação lhe rendeu uma posição universitária, ele foi professor de ensino médio.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), ao contrário de muitos matemáticos, que começaram suas carreiras logo na juventude, iniciou sua produção científica relativamente tarde, por volta dos quarenta anos.

O interesse por Matemática ocorrera desde cedo, mas esse início tardio foi devido, muito provavelmente, à oposição que seu pai fazia para que ele se tornasse matemático. De qualquer forma, a Matemática não perdeu por esperar. Weierstrass foi um matemático excelente. Por exemplo, em 1861 deu um exemplo de uma função contínua que contrariava todas as expectativas dos analistas matemáticos. Veja, cada aluno de Cálculo sabe que a função $f(x) = |x|$ é um exemplo de uma função contínua não diferenciável. Isso ocorre devido ao *bico* que seu gráfico apresenta, na origem. Ou seja, a função não é diferenciável *apenas* na origem. O exemplo de função dado por Weierstrass, apesar de contínua, não é diferenciável em *qualquer* ponto de seu domínio. Tal função é obtida como o limite de uma seqüência de funções que converge *uniformemente*. Isso garante sua continuidade. A função é definida por

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big(\pi\, k^2 x\big)}{\pi k^2}.$$

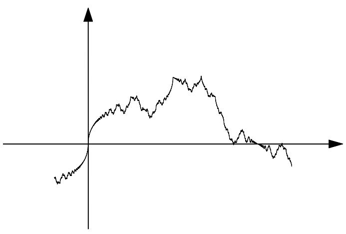


Gráfico de f.

O padrão de rigor estabelecido por Weierstrass teve profundo efeito na Matemática. Ele definiu números irracionais como limites de séries convergentes, convergência uniforme, funções definidas por produtos infinitos, teste de convergência de séries e várias outras coisas. Os alunos de Cálculo o conhecem por sua genial técnica para integrar funções racionais de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, chamada de *arco metade*, baseada na igualdade $t \;=\; \operatorname{tg}(x/2)$, que acarreta

$$\operatorname{sen} x \;=\; \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

30.1 A definição de limite, segundo Weierstrass

A partir da abordagem de Cauchy, Weierstrass estabeleceu a definição de limite que todos aprendem em Cálculo ou Análise.

Ao dizermos "*limite* de $f(x)$ quando x tende a a é L" estamos dizendo:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Leia: para todo *épsilon* maior do que zero, existe *delta* maior do que zero tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$

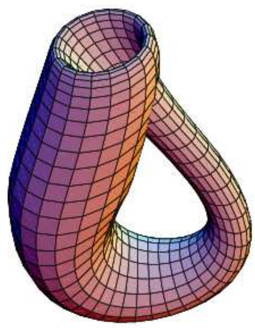
Note: $0 < |x - a| < \delta$ quer dizer "x pertence ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ mas é diferente do próprio a". Analogamente, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quer dizer "$f(x)$ pertence ao intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$". Eis aqui a noção de distância, tão importante para se estabelecer o limite. A grande diferença entre a abordagem de Cauchy e de Weierstrass é que esta última é simbólica, tornando precisa a noção *tão pequeno quanto se queira*. O que *anima* a definição dada por Weierstrass é o símbolo $\forall$. Para que a definição seja satisfeita, devemos mostrar que é verdadeira *para todo* $\varepsilon > 0$, os grandes e os pequenos.

Quando a definição se cumpre, usamos a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

30.2 Alunos de Weierstrass

O número de alunos de Weierstrass é grande e entre eles figuram alguns dos maiores matemáticos da nova geração. Só para citar uns poucos, temos Marius Sophus Lie, Gösta Mittag-Leffler, Georg Frobenius, Hermann Minkowski, Hermann Schwarz. Um deles, Felix Klein, trabalhou em geometrias não-euclidianas, teoria de grupos e propôs o chamado *Erlangen Programme*, para classificar geometrias pelo correspondente grupo de simetrias. Klein é particularmente conhecido dos alunos de topologia pela sua famosa garrafa, um exemplo de superfície fechada não orientável.



Garrafa de Klein

Outros destacados estudantes foram Sonya Kovalevskaya, Georg Cantor. Kovalevskaya recebeu o doutorado da Universidade de Göttingen e uma posição em Estocolmo com a ajuda do mestre. É famosa por suas contribuições na teoria das equações diferenciais parciais.

As inestimáveis contribuições de Cantor, assim como de Hilbert, serão abordadas na próxima unidade didática.