Unidade 9

Teoria de Conjuntos e Números Transfinitos de Cantor

Nesta unidade didática você conhecerá como as contribuições de Cantor e de Hilbert ajudaram a moldar o desenvolvimento da Matemática no século 20.

Um velho conhecido dos matemáticos mais uma vez ocuparia um lugar de destaque nos seus problemas. Veja a frase de Hilbert:

"O infinito! Nenhuma outra questão jamais moveu tão profundamente o espírito humano."

Texto 31: O Surgimento de uma Nova Matemática

O século 19 fora particularmente propício para a Matemática. Desde os trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), sobre a teoria do calor, que resultou na publicação de *Théorie analytique de la chaleur (Teoria analítica do calor)*, em 1822, passando pela obra monumental de Gauss, dos trabalhos de Bolyai e Lobachevsky sobre geometria não-euclidiana, tudo o que se via era novas idéias e resultados.

Vieram à luz contribuições para a Álgebra, com os trabalhos de Evariste Galois (1813 - 1832) e de Niels Abel (1802 - 1829).

O primeiro exemplo de um produto não comutativo foi dado em 1843, por William Rowan Hamilton (1805 - 1865). Ele introduziu a noção de números quatérnios, que generaliza o conceito de números complexos.

A análise matemática foi estabelecida, de início com os trabalhos de Cauchy, que partira da noção de função dada por Lagrange. Esse trabalho seria completado por Weierstrass e Riemann. Cauchy também desenvolveu a teoria das funções de uma variável complexa.

Além de Weierstrass, questões sobre os números reais haviam recebido as contribuições de Dedekind.

Enfim, tudo parecia estar assentado e resolvido. No entanto, muitas novidades ainda estavam por vir. As noções de estruturas algébricas dariam à Álgebra um caráter ainda mais abstrato. Essa noção não ficaria, no entanto, limitada à Álgebra. Surgiram a Análise Funcional, a Teoria de Medida e a integral de Lebesgue. Topologia Algébrica e Diferencial surgiriam como fortes áreas de pesquisa, além de outras, como a que chamamos Sistemas Dinâmicos.

A comunidade se dividiria em debates, tomando posições sob nomes tais como formalismo, intuicionismo e logicismo. Mas, antes que tudo isso tomasse forma, a comunidade matemática teria que assistir à criação da teoria de conjuntos. Os questionamentos que ela acarretaria marcariam, de maneira indelével, a virada do século 19 para o século 20.

31.1 A universalização da Matemática

Um fenômeno importante marcou a Matemática nas primeiras décadas do século 20. Você deve ter percebido como, ao longo da história, a atividade matemática concentrou-se em algumas partes do mundo. Na época do Renascimento, a Itália foi o palco dessa atividade que, com o tempo, mudou-se para a França e, depois, para a Alemanha. Nos fins do século 19, a atividade matemática concentrava-se nos países europeus, principalmente na França e Alemanha, e era praticada, essencialmente, por matemáticos.

Com a chegada do século 20, houve mudanças dramáticas. Basta lembrar que entre 1914 e 1945 ocorreram dois conflitos de proporções continentais. Como conseqüência de todas essas transformações, a Matemática ganhou um caráter mais universal. Por exemplo, os Estados Unidos da América receberam cientistas europeus, e muitos matemáticos entre eles. Outros países passaram a contribuir com grandes nomes para a Matemática, como o Japão e a Rússia.

Além disso, por ser uma ciência básica, a Matemática pôde se desenvolver com facilidade em países em desenvolvimento. Assim, Índia, Brasil, México e países do leste europeu também colaboraram para o avanço da Matemática.

No próximo texto, você conhecerá as idéias principais de Cantor a respeito do infinito. A ferramenta que ele desenvolveu para lidar com essa questão ficou conhecida como a Teoria de Conjuntos.

A teoria desenvolvida por Cantor encontrou muita resistência antes de ser aceita, mas acabou se impondo.

Texto 32: O Infinito Contra-ataca

Georg Cantor nasceu em 3 de março de 1845,em São Petersburgo, filho de um casal de amantes da arte e da cultura. Cantor sabia tocar violino e, além da Matemática, tinha um grande interesse por filosofia e por literatura. Formou-se na Univesidade de Berlim e passou sua vida como professor na Universidade de Halle.

A teoria de conjuntos desempenha papel relevante na abordagem de questões envolvendo noção de infinito e surgiu, como assunto de pesquisa, por volta de 1874, criada por Georg Cantor, um dos matemáticos mais originais de que se tem notícia. Com o passar do tempo, tornou-se a linguagem com a qual expressamos a Matemática.

No passado, antes do aparecimento da teoria de conjuntos, os matemáticos lidavam com números, figuras geométricas, equações etc. A mesma coisa ocorre hoje, com a diferença que, agora, os números são elementos de conjuntos, as figuras geométricas são vistas como subconjuntos do plano, e o próprio plano considerado como um conjunto. As equações estabelecem condições que definem conjuntos.

Podemos dizer que os objetos com que os matemáticos lidam são conjuntos, seus elementos e suas propriedades, assim como com as relações entre eles.

E tudo isso começou com Cantor. Como matemático ele sempre foi genial, mas os trabalhos que antecederam a teoria de conjuntos não levavam a crer que pudesse produzir matemática de tamanha originalidade. Aqui está uma de suas frases mais bonitas:

> "A essência da Matemática é a sua liberdade."

Nenhuma nova teoria, porém, que carregue tanta originalidade, é recebida sem resistência. As idéias de Cantor receberam oposição, principalmente de um dos líderes da comunidade matemática daquela época: Leopold Kronecker (1823 - 1891).

Kronecker era um homem rico, um grande matemático, e chegara a uma posição de destaque na Universidade de Berlim por seus próprios méritos. Por que, então, fazia tanta oposição a Cantor? No cerne da disputa estava uma questão quase tão antiga quanto a própria Matemática: finito versus infinito.

Você já viu como essa questão desempenhou papel importante em diferentes períodos da história. Basta lembrar de Zenão e seus paradoxos.

O infinito, porém, foi adotado e usado por matemáticos geniais, como atestam os trabalhos de Eudoxo e Arquimedes, na Antigüidade, e a obra de Newton e Leibniz, que criaram o cálculo diferencial e integral.

O próprio Gauss tinha reservas sobre o tema:

> "[...] Eu protesto sobretudo contra o uso de uma quantidade infinita como algo *completo*, que em Matemática nunca é permitido. O Infinito é apenas uma maneira de falar [...] "

Cantor estava disposto a considerar, por exemplo, o conjunto de *todos* os números como um objeto matemático legítimo. Assim entendemos a resistência que a teoria de conjuntos recebeu do segmento liderado por Kronecker. Era uma questão de princípios. Kronecker acreditava que a Matemática deveria lidar com um número finito de objetos e com procedimentos que envolvessem apenas um número finito de passos.

A respeito desse fenômeno completamente novo, que distinguia não só entre coleções finitas e infinitas, mas entre coleções com infinitos elementos, Cantor escreveria ao seu amigo matemático Julius Dedekind –
"Vejo, mas não posso acreditar!"

No próximo texto você conhecerá mais detalhes dessa história.

Texto 33: Como contar infinidades?

Quando queremos comparar duas classes de coisas, temos a tendência de contar o número de cada uma delas. Ao contarmos cinco dedos em cada mão, sabemos que temos o mesmo número de dedos em cada uma delas. Mas, essa não é a única maneira de fazer isso. O chefe de uma tribo de nativos de certa ilha, que não dispõe de números para contar, pode, ainda assim, determinar se uma família é maior ou menor do que uma família rival. Basta que ele faça com que as duas famílias se disponham em duas filas paralelas. Se a cada membro de uma das famílias corresponder um membro da outra, elas têm o mesmo número de elementos. Caso contrário, o chefe poderá perceber qual das duas é maior.

Cantor explorou essa idéia estabelecendo o seguinte:

> Dois conjuntos M e N são *equivalentes* se é possível colocá-los, por alguma lei, em tal relação um com o outro, de tal forma que a cada elemento de um deles corresponde um e somente um elemento do outro.

Usando a linguagem atual, dizemos que, nesse caso, os conjuntos M e N têm a mesma *cardinalidade*.

Por exemplo, observe que podemos estabelecer uma correspondência um-a-um entre os números naturais e os números pares, através da lei $n \mapsto 2n$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots
\end{array}
$$

Cantor estabeleceu que todo conjunto cujos elementos podem ser colocados em correspondência um-a-um com os números naturais é dito *enumerável*, tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, que ele denotou $\aleph_0$. Assim ele introduzia um novo cardinal, *transfinito*.

O símbolo $\aleph_0$ deve ser lido "alef-zero". Alef ($\aleph$) é a primeira letra do alfabeto hebraico.

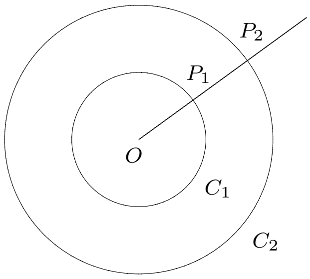
Atividade 36

Estabeleça uma correspondência um-a-um entre os conjuntos de números naturais e inteiros.

33.1 A enumerabilidade dos números racionais

Usando essa definição de cardinalidade, alguma luz pode ser lançada sobre o *Paradoxo de Galileu*:

Considere C_1 e C_2 dois círculos concêntricos, um com raio igual ao dobro do outro. A circunferência do círculo de raio maior é o dobro da circunferência do outro. Apesar disso, para cada ponto na circunferência menor corresponde um único ponto da circunferência maior, e vice-versa. Basta tomar, para cada ponto P_1 da circunferência menor, o raio OP_1 e prolongá-lo até a circunferência maior, determinando seu ponto correspondente P_2. Veja bem, apesar de uma circunferência ser o dobro da outra, ambas são conjuntos de mesma *cardinalidade*.



Este tema havia sido considerado por Bernard Bolzano (1781 - 1848), um teólogo, filósofo e matemático tcheco que acreditava no conceito de infinito. Foi ele quem estabeleceu a diferença entre as coleções finitas e infinitas. Uma coleção infinita pode ser colocada em correspondência um-a-um com uma de suas partes próprias, como atesta o exemplo de correspondência entre os naturais e os pares.

Isto, definitivamente, não ocorre com coleções finitas. Por exemplo, o conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ não pode ser colocado em correspondência um-a-um com o subconjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Podemos afirmar categoricamente: como estamos com apenas um número finito de números, é possível escrever uma lista com *todas* as correspondências entre esses conjuntos e constatar que *nenhuma* delas é um-a-um. É claro que nesse caso é mais fácil contar.

Se o fato dos conjuntos de números naturais e pares terem a mesma cardinalidade, apesar de um ser subconjunto próprio do outro, causa alguma surpresa, mais surpresas ainda estão a caminho.

Os conjuntos de números naturais, inteiros e *racionais* têm *todos* a mesma *cardinalidade*. Isto é, a cardinalidade dos racionais é $\aleph_0$.

O fato dos números racionais serem *densos* no conjunto dos números reais enquanto os números naturais são *isolados* mostra como a intuição pode nos enganar, quando se trata de conjuntos infinitos. Dizer que o conjunto dos números racionais é denso nos reais significa que *tão próximo quanto quisermos* de qualquer número real há números racionais.

Para estabelecer uma correspondência um-a-um entre os naturais e os racionais positivos, vamos colocá-los em fila indiana. Basta organizar os racionais na forma de uma tabela. Cada linha tem frações com o mesmo numerador e cada coluna tem frações com o mesmo denominador. Na verdade, a tabela contém todos os números racionais com repetições. Por exemplo, toda a diagonal principal é formada por cópias do número 1. Ainda assim, podemos colocar os elementos da tabela em correspondência um-a-um com os números naturais.

$$
\begin{tikzcd}
1/1 \arrow[r] & 1/2 \arrow[dl] & 1/3 \arrow[r] & 1/4 \arrow[dl] & 1/5 \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
2/1 \arrow[d] & 2/2 \arrow[ur] & 2/3 \arrow[dl] & 2/4 \arrow[ur] & 2/5 \arrow[dl] & \cdots \\
3/1 \arrow[ur] & 3/2 \arrow[dl] & 3/3 \arrow[ur] & 3/4 \arrow[dl] & 3/5 \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
4/1 \arrow[d] & 4/2 \arrow[ur] & 4/3 \arrow[dl] & 4/4 \arrow[ur] & 4/5 \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

33.2 A não-enumerabilidade dos números reais

Até 1874 parecia que os conjuntos se dividiam em dois tipos: finitos e infinitos, porém enumeráveis, de cardinalidade $\aleph_0$. Foi então que Cantor publicou o artigo *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Sobre uma propriedade da coleção de todos os números algébricos)*. Nesse trabalho Cantor mostra um conjunto infinito não-enumerável. Ele mostrou que qualquer intervalo de números reais, não importa de qual comprimento, não pode ser colocado em correspondência um-a-um com os números naturais.

Vamos provar os seguinte:

> Teorema: O intervalo $(0,\,1)$ de todos os números reais entre 0 e 1 não é enumerável.

A prova se baseia no fato de que podemos representar cada número $x \in (0,\,1)$ usando uma expansão em casas decimais. Assim, os racionais seriam aqueles cuja expansão é finita ou tem um padrão de repetição, que chamamos dízima periódica. Assim,

$$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{12}{101} = 0.118811881188\ldots \quad \frac{1}{9} = 0.1111111\ldots$$

Alguns números racionais podem ter um padrão de repetição longo, como $\frac{13}{17} = 0.7647058823529411764705882352941176470588235294 11\ldots$ e evitamos coisas como $0.499999999999\ldots$ colocando 0.5 no lugar.

No entanto, os números irracionais são caracterizados por não apresentarem qualquer padrão de repetição em sua expansão decimal. Por exemplo, $\frac{\pi}{6} = 0.52359877559829887307710\ldots$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.70710678118654752440084\ldots$.

A prova dada por Cantor consiste em supor que existe alguma correspondência um-a-um entre o conjunto dos números naturais e o intervalo $(0, 1)$ e notar que isso implica uma afirmação absurda. Em linhas gerais, supondo que haja uma tal correspondência, podemos colocar *todos* os números do intervalo $(0, 1)$ em uma fila, escrevendo, por exemplo:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{N} & & & & (0,1) \\
\hline
1 & \leftrightarrow & x_1 & = & 0.3667346777\ldots \\
2 & \leftrightarrow & x_2 & = & 0.3667346777\ldots \\
3 & \leftrightarrow & x_3 & = & 0.2500000000\ldots \\
4 & \leftrightarrow & x_4 & = & 0.1231231231\ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & \leftrightarrow & x_n & = & 0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

O absurdo que essa afirmação implica é que existe elemento do intervalo $(0, 1)$ que não está listado. Realmente, basta considerar o elemento cuja expansão decimal é

$$0.b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$$

no qual b_1 é diferente do dígito da primeira casa decimal do elemento x_1, digamos $b_1 = 2 \neq 3$; b_2 é diferente do dígito da segunda casa decimal do elemento x_2, digamos $b_2 = 7 \neq 5$; e assim por diante, passando por $b_n \neq a_n$. Resumindo, mudando cada elemento na diagonal principal, produzimos um elemento de $(0, 1)$ que difere em pelo menos uma casa decimal de *todos* os elementos listados. Isso contradiz a afirmação de que todos os elementos de $(0, 1)$ já estavam na lista.

Atividade 37

Mostre que quaisquer dois intervalos (a, b) e (c, d) têm a mesma cardinalidade.

Atividade 38

Mostre que o conjunto dos números reais e o intervalo $(0, 1)$ têm a mesma cardinalidade.

Assim, o conjunto dos números reais tem *outra* cardinalidade, diferente de $\aleph_0$. No entanto, Cantor não quis dizer que a cardinalidade dos reais é $\aleph_1$, pois não sabia se haveria algum conjunto com cardinalidade intermediária, entre $\aleph_0$, a cardinalidade dos naturais e a cardinalidade dos reais. Chamou, então, a cardinalidade dos reais de $\mathfrak{c}$, significando *contínuo*.

$\mathfrak{c}$ é o c gótico.

A oposição de Kronecker não foi o principal problema que a teoria de conjuntos enfrentou. O mais grave foi notado pelo próprio Cantor, em 1899, quando ele considerou qual seria o número de elementos do conjunto de todos os conjuntos. Isto levaria a uma contradição, pois já havia sido provado que um conjunto tem "menos" elementos do que o conjunto de suas partes.

Uma versão popular do paradoxo proposto por Russell é a seguinte. Em uma cidade há um barbeiro e os homens da cidade dividem-se em dois conjuntos. Há os que fazem a barba com o barbeiro e os que fazem a sua própria barba. Responda rápido: em qual conjunto se encontra o barbeiro?

Em 1902, Bertrand Russell (1872 - 1970) e Ernest Zermelo (1871 - 1956) descobriram, independentemente, outro paradoxo que abalava novamente a teoria. Eles definiam o seguinte conjunto:

$$A = \{ X \mid X \text{ não é um elemento de } X \}$$

As afirmações "A é um elemento de A" e "A não é um elemento de A" levam a uma contradição.

Apesar dessas dificuldades, a teoria dos conjuntos chegara para ficar. Lógicos e matemáticos posteriormente deram suas contribuições para que tais contradições fossem evitadas. Entre eles o próprio Russell, Zermelo e, também, Adolf Fraenkel (1891 - 1965), cumprindo assim a profecia de Hilbert:

"Ninguém nos expulsará do paraíso criado por Cantor".

No próximo texto você conhecerá algumas contribuições à Matemática feitas por Hilbert, um criador de frases lapidares, como:

"A arte de fazer Matemática consiste em encontrar aquele caso especial que contém todos os germes da generalidade."

Texto 34: Uma Lista de Problemas – um século para resolvê-los

A virada do século 18 para 19 trouxera muitas mudanças ao mundo, mas não se compara com o que estaria por vir com a entrada do século 20. A música era outra. Ouvia-se sinfonias de Mahler, o dodecafonismo de Schoenberg, Berg e Webern. Em França soaria a requintada música de Debussy e Ravel. O mundo conheceria o jazz. Em 1913 estrearia em Paris o balé *Le sacre du printemps (A sagração da primavera)* de Stravinsky, gerando um escândalo sem precedentes no mundo da música. Na pintura, a arte de Pablo Picasso é um bom exemplo de como a velocidade das mudanças passaria para uma escala vertiginiosa. O Brasil assistiria à Semana da Arte Moderna, em 1922.

A mesma coisa ocorreria na Matemática, em que haveria uma explosão de atividade. Ao longo do século 20, ela chegou a níveis nunca antes imaginados. Os interesses se multiplicaram gerando uma miríade de novas áreas de interesse.

A classificação geral das áreas de pesquisa da AMS, a American Mathematical Society, soma perto de 100, entre as quais: teoria de números, geometria algébrica, K-teoria, medida e integração, equações diferenciais ordinárias e parciais, análise de Fourier, geometria diferencial, topologia algébrica, teoria de probabilidades e processos estocásticos, teoria de jogos, economia, biologia e outras ciências naturais, educação matemática.

A classificação completa está acessível em www.ams.org/msc.

David Hilbert (1862 - 1943)

Na virada do século, o matemático mais proeminente era David Hilbert.

Ele tinha interesse em várias áreas da Matemática, especialmente sobre problemas de álgebra de polinômios. Por exemplo, provara que qualquer ideal polinomial admite base finita.

Além disso, iniciara uma corrente de pensamento matemático chamada *for-*

malismo e tinha esperança de que tudo na Matemática poderia e deveria ser provado a partir de axiomas básicos.

Em 1899 publicou o livro *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria)*, uma exposição rigorosa da geometria euclidiana.

No dia 08 de agosto de 1900, em Paris, Hilbert fez uma palestra no II Congresso Internacional de Matemática em que propôs vinte e três problemas de diferentes áreas da Matemática. Ele acreditava que esses problemas norteariam o desenvolvimento da Matemática ao longo do século que estava para começar. Alguns foram resolvidos logo, mas muitos continuam a inspirar os matemáticos e permanecem sem solução.

Na apresentação dos problemas, Hilbert teria dito:

> "Se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato devemos fazer passar por nossas mentes as questões não resolvidas e olhar os problemas que a ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos no futuro."

O primeiro problema da lista ficou conhecido como a *Hipótese do Contínuo*: há alguma cardinalidade entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, a cardinalidade dos números reais?

A resposta veio em 1963-4, dada por Paul Cohen, nascido em 1934, no estado de New Jersey, Estados Unidos da América. Ele mostrou que a Hipótese do Contínuo é formalmente impossível de ser decidida na teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (a teoria de conjuntos que usamos no nosso dia-a-dia).

O problema 7 pergunta se, dados os números a, algébrico, e b, irracional, seria a^b transcendente? O problema foi resolvido de maneira positiva simultaneamente por Aleksandr Gelfond (1906 - 1968), em 1934, e Theodor Schneider, nascido em 1911.

No entanto, várias questões continuam abertas. Uma das mais famosas provém do problema número 8, sobre números primos, conhecido como a *Hipótese de Riemann*. Versa sobre a distribuição dos zeros de uma função definida por Riemann, chamada ζ (zeta). Assim como no caso da Conjectura de Poincaré, há um prêmio de um milhão de dólares, oferecido pelo Clay Institute, para quem resolvê-la.

Em 2004, Xavier Gourdon verificou a Hipótese de Riemann até os primeiros dez trilhões de candidatos usando computadores. Apesar de toda essa evidência, os matemáticos reconhecerão a Hipótese de Riemann como teorema apenas quando uma prova for apresentada.

A próxima e última unidade didática tratará de números primos e criptografia. Você verá como resultados de natureza pura da Matemática podem, de repente, tornar-se de interesse aplicado.

A busca de soluções de problemas per si e a possibilidade de suas aplicações tem mantido o grande interesse pela Matemática. Isso deve continuar por muito tempo.