Unidade 4

O Quinto Postulado da Geometria Euclidiana

Nesta unidade didática você conhecerá uma das questões que ocupou a atenção de muitos matemáticos, desde os tempos de Euclides até os dias de Gauss, quando foi definitivamente esclarecida, de maneira surpreendente. A questão era se o Quinto Postulado, formulado por Euclides, decorreria (ou não) como conseqüência dos outros postulados.

Para entender melhor essa história, é bom aprender um pouco sobre o contexto em que surgiu a chamada geometria euclidiana.

Texto 10: Os Elementos de Euclides

Até 300 a.C., Atenas havia sido o principal pólo cultural da Antigüidade, mas essa primazia passou para uma cidade da África – Alexandria, no Egito, – que abrigou a maior biblioteca da Antigüidade. Melhor seria chamá-la *papiroteca*, pois chegou a ter em seu acervo mais de 600 000 rolos de papiro, os livros daquela época.

Euclides (325 - 265 a.C.)

Neste ambiente extremamente propício para o estudo e para a pesquisa, a Matemática grega atingiu o apogeu e viveu sua era de ouro. A escola de Matemática de Alexandria foi fundada por Euclides e gerou matemáticos fabulosos, como Aristarco, Arquimedes, Apolônio e Eratóstenes.

O núcleo do conhecimento matemático que havia sido desenvolvido pelas gerações anteriores foi compilado em uma coleção de 13 livros, todos extremamente sucintos, geralmente apresentados em um só volume, sob o título de *Elementos*. O organizador dessa obra foi Euclides.

O sucesso dessa coletânea foi tamanho que todas as outras coleções semelhantes, escritas antes dela, pereceram. Isso porque os livros eram copiados a mão e os trabalhos considerados superados não eram mais reproduzidos.

10.1 Breve descrição dos Elementos

Os seis primeiros livros dos Elementos apresentam a geometria plana. O primeiro deles começa com 23 definições, seguidas de 5 postulados e mais 5 *noções comuns* que essencialmente estabelecem a existência de objetos matemáticos e, por assim dizer, as regras do jogo. Lembre-se: postulados e noções comuns são os axiomas da teoria apresentada por Euclides, a que chamamos (muito propriamente) de geometria euclidiana.

Por exemplo, o primeiro postulado garante a existência da reta que contém dois pontos dados. Uma das *noções comuns* é a afirmação: "Coisas que são iguais à mesma coisa são iguais entre si."

O quinto postulado é chamado *Postulado das Paralelas* e difere dos quatro anteriores, por ser bem mais elaborado.

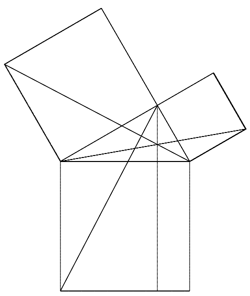


Diagrama ilustrativo da demonstração do Teorema de Pitágoras, como é apresentada nos Elementos.

Com o cenário estabelecido pelas definições, pelos postulados e noções comuns (os axiomas da teoria), são apresentadas 48 proposições. O primeiro livro é um verdadeiro *tour de force*, cujo objetivo é apresentar, justamente nas duas últimas proposições, o Teorema de Pitágoras e a sua afirmação inversa.

Caso você disponha de acesso à rede internet, poderá visitar a página www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html e ler uma tradução para português deste primeiro livro.

O quinto livro apresenta o trabalho de Eudoxo, sobre a teoria das proporções, enquanto o livro seis as aplica à geometria plana.

A seguir, continuamos a falar sobre os Elementos, com atenção especial a números.

Texto 11: Euclides e os Números

Os livros sete, oito e nove lidam com teoria de números. Os principais resultados aí apresentados incluem:

- algoritmo de Euclides, para calcular o máximo divisor comum de dois números;
- prova de que há uma infinidade de números primos;
- prova de que todo número inteiro positivo da forma

$$n \;=\; 2^{m-1}\,(2^m - 1)$$

  é um número perfeito, sempre que o número $2^m - 1$ for primo.

11.1 A infinitude dos primos

Todos nós sabemos da grande utilidade do algoritmo de Euclides e a prova de que há uma infinidade de primos é uma pérola matemática. A idéia é mostrar que, dada uma lista de números primos, sempre podemos encontrar um outro primo que não está na lista. Veja:

Dados $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, números primos, considere o número

$$p \;=\; (p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_m) \;+\; 1.$$

que é maior do que qualquer um dos p_i.

Agora, ou p é primo, e teremos o extra primo (que não está na lista original), ou p tem fatores primos que não estão listados.

A razão é a seguinte: se algum dos primos listados originalmente for um fator de p, esse número dividiria a ambos os números $(p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_m) \;+\; 1$ e $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_m$. Portanto, dividiria a diferença entre eles, o que é um absurdo, pois essa diferença é 1 e o menor primo é o 2.

A única imperfeição nesse livro é a falta de uma demonstração rigorosa do fato conhecido como Teorema da Fatorização Única. Isto é, todo número (inteiro positivo) se decompõe, de maneira única, como um produto de fatores primos, a menos da ordem: $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2$.

Esse teorema foi demonstrado por Gauss, muito tempo depois.

Atividade 15

Considere a lista 2, 3 e 5, de números primos, e obtenha um extra número primo usando a estratégia usada na demonstração apresentada.

Faça a mesma coisa com a lista 3, 5 e 7.

11.2 Números perfeitos

O conhecimento que os gregos tinham sobre os números mostra seu enorme interesse pela Matemática. O estudo dos números perfeitos é herança dos matemáticos pitagóricos

Um número inteiro positivo é *perfeito* se for igual à soma de seus divisores *próprios*. Por exemplo, os divisores próprios de 6 são: 1, 2 e 3. Como $1+2+3=6$, ele é um número perfeito, assim como 28 e 496.

Você pode constatar isso usando a fórmula dada por Euclides, listada anteriormente. Por exemplo, para $m=3$,

$$28 \;=\; 2^2\,(2^3-1) \;=\; 4\times 7.$$

A fórmula dada por Euclides gera números perfeitos desde que 2^m-1 seja um número primo. Portanto, uma boa pergunta seria: quando 2^m-1 é primo?

É fácil descobrir muitos casos em que esse número *não* é primo.

Usando o fato de $2^{ab}-1 \;=\; (2^a)^b-1^b$ e as fatorizações do tipo

$$\begin{aligned}
x^2-y^2 &= (x-y)\,(x+y)\\
x^3-y^3 &= (x-y)\,(x^2+xy+y^2)\\
x^4-y^4 &= (x-y)\,(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\\
x^5-y^5 &= (x-y)\,(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)
\end{aligned}$$

obtemos

$$2^{a\,b} \;-\; 1 \;=\; (2^a-1)\big((2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1\big).$$

Assim, se m não é primo, então 2^m-1 também não é primo, pois pode ser fatorado por 2^n-1, para algum fator n de m.

Resta a pergunta: se m é primo, 2^m-1 é primo?

Se a resposta fosse positiva, estaria provado que há uma infinidade de números perfeitos, uma vez que há uma infinidade de números primos. No entanto, como o número $2^{11}-1$ se decompõe como 23×89, a resposta é não.

O tema dos números perfeitos e dos primos da forma $2^m - 1$ continua interessando os matemáticos até hoje. Os números da forma $2^m - 1$ são chamados números de Mersenne, em homenagem ao padre Marin Mersenne (1588 - 1648). Esse padre afirmou, no prefácio de um livro, que os expoentes

$$2, 3, 5, 7, 13, 17, 19 \text{ e } 31$$

geram números perfeitos.

A partir daí, os cálculos ficam difíceis para serem efetuados a mão, pois os números se tornam muito grandes.

Posteriormente, Leonhard Euler (1707 - 1783) provou que todo número perfeito par é da forma descrita pelos gregos, fechando essa parte da história que havia começado na Antigüidade. No entanto, vários problemas envolvendo essas questões continuam a nos desafiar até hoje. Por exemplo, mesmo com a ajuda de computadores, só conhecemos 32 números perfeitos. Além disso, não se sabe se há uma infinidade deles, assim como não se sabe se há algum número perfeito ímpar. Apesar de que, se houver algum, ele será maior do que 10^{300}.

Ainda sobre números, o décimo livro apresenta a teoria dos números irracionais, trabalho devido ao matemático Teeteto, adequado por Euclides às idéias introduzidas por Eudoxo.

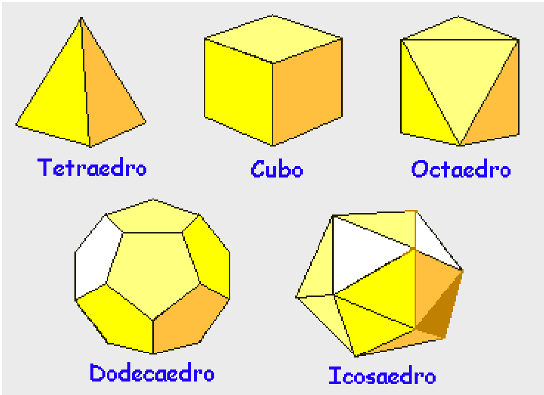
Agora, continuando o texto sobre os Elementos, vamos enfocar os últimos livros, que tratam de Geometria Espacial.

Texto 12: Geometria Espacial

O livro 11 apresenta, principalmente, as definições e fatos básicos. A proposição 2 do livro 12 foi apresentada na unidade didática anterior. É a prova dada por Eudoxo que a razão das áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados dos seus diâmetros. Ou seja, a área do círculo é proporcional ao quadrado do seu diâmetro.

A técnica desenvolvida por Eudoxo, chamada *método da exaustão*, também é usada para mostrar que a razão dos volumes de duas esferas é proporcional à razão dos cubos de seus diâmetros. Essa idéias seriam muito bem aproveitadas por Arquimedes.

O último livro é dedicado aos poliedros regulares, conhecidos como *Sólidos de Platão*. Por exemplo, é dada a prova de que há, precisamente, cinco desses sólidos.



Tudo indica que esse livro foi baseado num tratado sobre o assunto escrito por Theaetetus.

A clareza e precisão com que esses livros foram escritos teve grande influência no desenvolvimento posterior da Matemática. Mesmo com suas imperfeições, permanecerá como uma obra ímpar, um verdadeiro tributo aos esforços feitos pelas gerações de matemáticos que viveram a Era de Ouro da Matemática na Grécia.

Texto 13: A Questão do Quinto Postulado

O Postulado das Paralelas foi a afirmação dos Elementos que mais deu trabalho à comunidade matemática. Por muito tempo, os matemáticos tentaram provar que ele decorreria das afirmações anteriores. Ou seja, na nossa linguagem, em vez de axioma, ele seria um teorema.

Gauss foi o primeiro matemático a crer na impossibilidade de se provar que o Quinto Postulado decorreria dos quatro anteriores, como atesta uma de suas cartas enviada a um matemático chamado Franz Taurinos, em 1824.

Este fato foi demonstrado por Eugenio Beltrami (1835 - 1900) e também por outros matemáticos. Assim, os quatro primeiros axiomas mais o Postulado das Paralelas estabelecem a teoria que chamamos *geometria euclidiana* e é um ótimo modelo para a nossa realidade do dia-a-dia.

No entanto, se considerarmos os quatro primeiros axiomas e tomarmos por axioma a *negação* do Quinto Postulado, obteremos uma teoria tão consistente quanto a geometria euclidiana. Essa teoria é chamada *Geometria Hiperbólica*.

Veja bem, a geometria hiperbólica é a teoria que obtemos ao trocarmos, na geometria euclidiana, o Quinto Postulado pelo seguinte axioma:

Nikolai Ivanovitch Lobachevsky (1793 - 1856) Matemático russo que, assim como Gauss e Bolyai, considerou uma geometria sem o Quinto Postulado.

> *Axioma Hiperbólico:* Existem uma reta r e um ponto P não pertencente a r tais que pelo menos duas retas (distintas) contêm P e são paralelas a r.

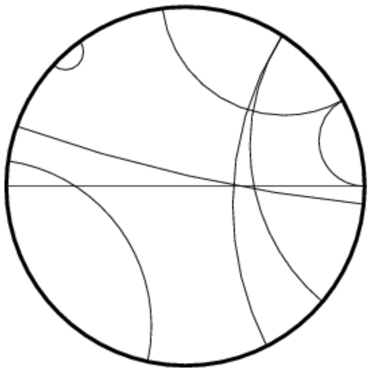
Janos Bolyai (1802 - 1860), filho de um matemático, descobriu, independentemente de Gauss e Lobachevsky, a existência da geometria hiperbólica.

Os primeiros matemáticos a produzirem resultados nessa nova área matemática foram Nikolai Ivanovitch Lobachevsky e Janos Bolyai. A comunidade matemática custou a aceitar e a entender essas novas idéias e tanto Lobachevsky quanto Bolyai ficaram sem receber, em seu tempo, os méritos por seus feitos. Uma possível razão para isso pode ter sido o fato de que os teoremas nessa nova geometria são muito estranhos, se comparados com os similares da geometria euclidiana. Nesse contexto, o Teorema de Pitágoras é falso, assim como a fórmula da distância que conhecemos da geometria analítica. Foi difícil para a comunidade acostumar-se com o fato de duas retas poderem estar tão próximas quanto quisermos, sem ter qualquer interseção.

Em 1868, Beltrami conseguiu um modelo euclidiano para a geometria hiperbólica. Isso, mais um resultado provado por Lobachevsky, mostra que a geometria hiperbólica é consistente se, e somente se, a geometria euclidiana é consistente.

Em 1882, Henri Poincaré construiu um segundo modelo euclidiano para a geometria hiperbólica, usando idéias que remontam a Apolônio, um dos grandes matemáticos do passado, ligado à escola de Matemática de Alexandria.

Este modelo para a geometria hiperbólica é conhecido como *disco de Poincaré*, no qual as retas são representadas por arcos de círculos cujos extremos são perpendiculares ao bordo do disco.



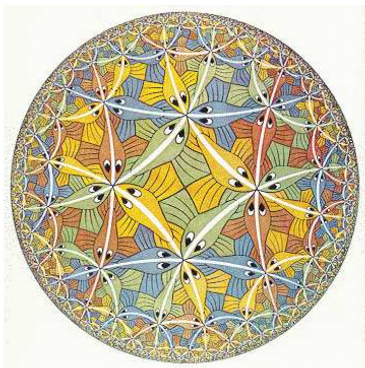
Henri Poincaré (1854 - 1912) foi um matemático extraordinário. Deu contribuições em diversas áreas da matemática, especialmente na Topologia, uma área que ganhou grande importância ao longo do século 20. Nessa área ele propôs a chamada *Conjectura de Poincaré*, um problema que atravessou o século dando trabalho aos melhores matemáticos do mundo. Em 2003, o russo Grigori Perelma apresentou uma solução para o problema. Se a sua solução for aceita pela comunidade, ele pode ganhar um prêmio de um milhão de dólares.

Os diâmetros do disco também são considerados retas. Dois arcos que não se intersectam representam duas retas paralelas. Isso inclui os arcos que se intersectam no bordo, pois o modelo considera apenas o interior do disco. Como você já deve estar imaginando, retas perpendiculares são arcos que não se intersectam.

Há, também, um modelo que usa, no lugar do disco, um semiplano. Neste caso, as retas são as semi-retas perpendiculares ao bordo e semicírculos cujo centro pertence ao bordo. Dessa forma, as extremidades desses semicírculos intersectam o bordo do semiplano ortogonalmente. Nessa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é *menor* do que 180°, e pode variar de triângulo para triângulo. Além disso, triângulos com os mesmos ângulos têm as mesmas áreas.

Assim, o Quinto Postulado é o axioma que caracteriza a geometria euclidiana. Mudanças nessa afirmação geram outras teorias, que são chamadas *geometrias não-euclidianas*. A Geometria Hiperbólica é uma delas.

Observe como a gravura do artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher, a seguir, lembra esse tipo de geometria.



Um outro exemplo de geometria não-euclidiana é a chamada *geometria elíptica*, e foi estudada por Riemann. Essa geometria pode ser vista como a superfície de uma esfera, na qual as retas são os grandes círculos. Nessa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180°.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) contribui profundamente para o avanço da Matemática contemporânea, graças a sua enorme criatividade. Riemann foi, entre outras coisas, o precursor do conceito de *variedade diferenciável*. Essa noção permite levar as idéias do cálculo diferenciável a um nível de abstração muito elevado e tem aplicações em muitas áreas além da Matemática.

Você já estudou bastante até aqui. Faça uma interrupção na leitura e procure realizar a atividade que propomos.

Atividade 16

Usando o modelo de Poincaré, para a geometria hiperbólica, e o modelo da esfera com grandes círculos, para a geometria elíptica, desenhe triângulos e comprove que a soma de seus ângulos internos é menor do que 180°, no caso da hiperbólica e maior do que 180°, no caso da elíptica.

Texto 14: Crepúsculo Dourado de uma Época

Entre os nomes famosos associados à escola de Alexandria estão Aristarco (310 - 250 a.C.) e Eratóstenes (275 - 195 a.C.), que, além de matemáticos, também eram astrônomos.

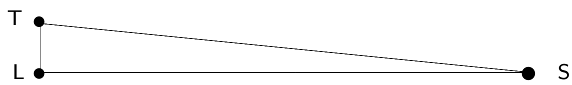
Aristarco considerava verdadeiras as seguintes afirmações sobre o sistema solar:

- a lua, a terra e o sol são corpos esféricos;
- a terra gira em torno do sol e a lua gira em torno da terra;
- os raios solares viajam em linhas retas;
- a lua reflete a luz solar.

Os eclipses solares ocorrem quando a lua passa entre a terra e o sol, bloqueando a luz solar e os eclipses lunares ocorrem quando a terra passa em frente ao sol, projetando sua sombra sobre a lua.

Você pode ver que, para a época, Aristarco tinha uma visão bastante correta do sistema solar. Muito bem, usando esses fatos, sem qualquer artefato como uma luneta ou um telescópio, ele calculou a razão da distância da terra até o sol pela distância da terra até a lua.

A idéia é a seguinte: quando a lua está na sua fase quarto crescente, pode ser vista no céu simultaneamente com o sol e o triângulo de vértices sol, lua e terra é um triângulo retângulo.

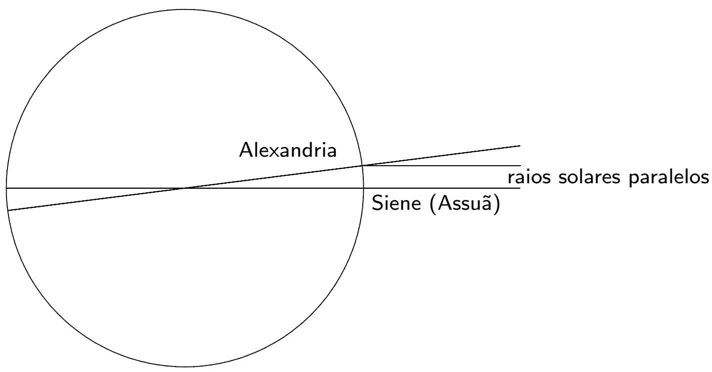


Medindo o ângulo $\angle LTS$, Aristarco pôde calcular a razão TS/TL, desenhando um triângulo semelhante.

Feito grandioso, também, foi o de Eratóstenes: mediu o raio da terra. Para isso, usou seus conhecimentos de geografia. Primeiro, considerou que os raios solares atingem paralelamente a terra, pois o sol está tão distante que, ao fazer isso, estaria cometendo um erro desprezível.

Eratóstenes sabia, por ter lido em textos conservados na biblioteca de Alexandria, que a cidade de Siene (atualmente incorporada em Assuã) se encontrava exatamente sobre o Trópico de Câncer. Isso porque no dia 21 de junho, o solstício de verão, o sol do meio-dia iluminava as águas de um poço profundíssimo. Sabia, assim, que nesse momento o sol incidia perpendicularmente sobre essa cidade. Então, Eratóstenes procurou saber qual seria a posição do sol, no mesmo dia e instante, sobre a cidade de Alexandria.

Para isso, mediu a sombra de um obelisco e concluiu que os raios solares e o obelisco formavam um ângulo de 7° $1/5$, a quinquagésima parte de um círculo.



Portanto, o ângulo formado pelo raio solar e pelo obelisco, que está na direção do diâmetro da terra que passa por Alexandria, é o mesmo ângulo do setor circular cujo arco tem extremidades em Siene (Assuã) e Alexandria.

Conta a lenda que ele pagou a um escravo para medir a distância de Alexandria até Siene (Assuã), que é de 800 km. De posse dessas informações e usando geometria elementar, calculou a circunferência da terra:

$$\frac{360°}{7°1/5} \times 800 = 40\,000 \text{ km}.$$

Assim, chegou ao raio da terra: 6 366, 2 km. Impressionante, não é?

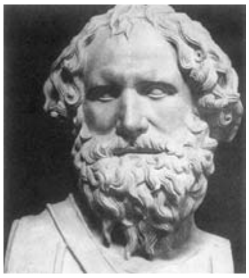
Texto 15: Eureka!

Muito bem, Eratóstenes foi grande amigo de Arquimedes, possivelmente o maior matemático da Antigüidade. Várias coisas que sabemos a respeito das conquistas científicas feitas por Arquimedes devemos a cartas que ele escreveu para Eratóstenes. Eles se conheceram em Alexandria, onde Arquimedes estudou.

Nesse ponto, cabe a pergunta: o que torna alguém como Arquimedes tão genial? o que o distingue de seus pares, eles mesmos tão elevados, como Aristarco, Eratóstenes e outros?

A originalidade é, certamente, um fator que indica essa distinção. Arquimedes a teve de sobra. Outra é o reconhecimento de sua genialidade pelos outros matemáticos. As obras de Arquimedes foram estudadas e citadas por muitos grandes matemáticos, de diferentes épocas e diferentes culturas. Mas, há uma coisa mais que o torna ímpar. Arquimedes dominou todo o conhecimento matemático de sua época, o fez seu e o moldou à sua maneira. Não se deixou prender pelas imposições conservadoras que limitavam os métodos e as soluções aos problemas matemáticos de seu tempo.

A influência de Platão na maneira de pensar dos matemáticos daquele tempo fora frutuosa, culminando na produção dos Elementos, que têm um papel fundamental na nossa maneira de pensar a Matemática até hoje. A idéia de verdade absoluta que a Matemática busca expressar, apesar de ser apenas a sua sombra. No entanto, essa atitude também traz uma forte limitação. Veja, o problema de dividir um dado ângulo em três partes iguais, por exemplo, não tem solução no âmbito das regras estabelecidas pelos axiomas fixados por Euclides: construções com régua e compasso. No entanto, o problema tem solução, se admitirmos outros métodos, que podemos chamar de *mecânicos*. Muito bem, Arquimedes rompeu com essas limitações, estudou e usou essas novas idéias com o mesmo



Arquimedes (287 - 212 a.C.) nasceu e morreu na cidade de Siracusa, atualmente na Sicília. Filho de um astrônomo chamado Fídeas, foi enviado à Alexandria onde estudou. De volta a sua cidade participou ativamente da vida da corte e produziu uma quantidade enorme de resultados matemáticos e científicos. Arquimedes era o modelo do cientista distraído, que vivia envolto em seus pensamentos, como atestam várias anedotas. A mais pitoresca conta como saiu tempestuosamente de uma banheira gritando eureka! eureka! pela rua, sem se dar conta de sua nudez. Eureka quer dizer achei, encontrei! Arquimedes acabara de ter uma idéia de como resolver o famosos problema da coroa do rei Hierão.

rigor que caracterizou os trabalhos das gerações anteriores. Mais ainda, Arquimedes aplicou esse rigor científico no estudo da Física, da Mecânica, criando novidades que usamos até hoje, como o sistema de bombeamento, chamado *Parafuso de Arquimedes*, e os seus conhecimentos sobre alavancas e polias, para mover grandes pesos.

15.1 Arquimedes e a área do círculo

Para descrever, mesmo rapidamente, os resultados obtidos por Arquimedes, levaríamos mais de uma unidade didática, fugindo do propósito desse nosso trabalho. Mas, para que você aprecie um pouco de sua produção matemática, veja como ele provou que a área do círculo de raio r é πr^2.

Veja a belíssima aproximação de π, dada por Arquimedes:

$$3 + \frac{10}{71} \ < \ \pi \ < 3 + \frac{1}{7}$$

Essa desigualdade reflete, até a terceira casa decimal, a desigualdade $3.140 \ < \ 3.141 \ < \ 3.142$. Impressionante, não?

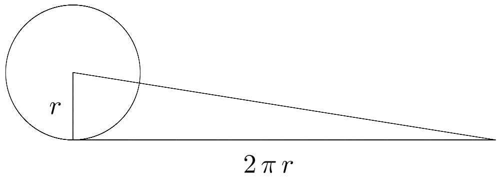
Muito bem, Arquimedes chegou a essa aproximação a partir da seguinte afirmação, tomada como verdadeira por ele:

> Dado um círculo qualquer, há um segmento de reta que é mais comprido do que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito e mais curto do que o perímetro de qualquer polígono convexo circuscrito no círculo. Qualquer outro segmento que satisfaça essa propriedade tem o mesmo comprimento. Esse comprimento é igual à circunferência deste círculo.

Na primeira parte da afirmação ele caracteriza a circunferência do círculo e na segunda estabelece a sua unicidade. Existe e é único, como gostamos de dizer em Matemática.

Arquimedes partiu do ponto deixado por Eudoxo – a área de um dado círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro – para provar, usando o método de exaustão, que:

a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo cujos catetos são o seu raio e a sua circunferência.



A demonstração segue a mesma linha de raciocínio usada por Eudoxo para provar a proporcionalidade (ver a unidade anterior), considerando separadamente as possibilidades de a área do círculo ser maior do que a área do triângulo, o que leva a um absurdo, assim como a possibilidade de ser menor.

O episódio da morte de Arquimedes é coberto por um pouco de lenda, que ajuda a reforçar a imagem do cientista imerso em seus pensamentos, desligado do mundo real. Segundo consta, ele morreu por não ter respondido ao chamado de um soldado romano, por estar profundamente envolvido com um problema de geometria. É difícil crer que um homem que esteve tão atento às necessidades de seus conterrâneos, que tenha tido tantas idéias práticas, não tenha percebido a aproximação e o chamado do soldado.

É bom lembrar que as invenções bélicas de Arquimedes haviam afligido e causado muitas baixas entre os soldados romanos que cercavam Siracusa, no intuito de tomá-la. É bom lembrar que Marcellus, o general romano que comandava o cerco de Siracusa, dera ordens expressas para que a vida de Arquimedes fosse poupada.

De qualquer forma, o episódio nos lembra que a época de ouro dos gregos estava chegando ao fim. Outras civilizações surgiam e o poder mudava de mãos.

A cultura grega ainda continuaria a exercer sua influência, como o faz até os nossos dias, mas era tempo para novas idéias e novas contribuições.

Alguns nomes importantes para a Matemática ainda continuaram a aparecer, como Apolônio, contemporâneo de Arquimedes, com seu tratado monumental (mais de 400 teoremas) sobre as cônicas. Houve também Hiparco, que tanto contribuiu para a fundamentação do que chamamos trigonometria, Menelau *de Alexandria, já na era cristã, que fundamentou a trigonometria esférica, o neo-pitagórico Nicomaco de Gerasa.*

Outro grande matemático foi Diofanto, que viveu já no terceiro século da era cristã, e dedicou-se à teoria de números. Diofanto escreveu uma série de 13 livros cujo conjunto era intitulado Aritmética, dos quais conhecemos nove (seis até 1973, quando mais três foram descobertos, em tradução árabe).

A importância de Diofanto reside, também, no fato de ter sido o primeiro matemático a usar uma notação simbólica para expressões algébricas. Isso lhe rendeu, com justiça, o título de "pai da Álgebra". Mas como álgebra é uma palavra proveniente do árabe, deixaremos essa história para a próxima unidade didática.

Aqui estão mais algumas atividades que o convidam a entrar, pelo menos um pouco, no universo da Matemática daqueles dias.

Atividade 17

Suponha que uma coroa de m kg tenha sido feita usando uma mistura de ouro e prata. Se a densidade do ouro for denotada por γ e a densidade da prata for denotada por σ, o volume da coroa é dado por:

$$v = \frac{x}{\gamma} + \frac{m-x}{\sigma},$$

onde x é o peso (em quilogramas) de ouro usado na coroa.

Conhecendo a massa da coroa (5 kg, segundo consta a história, Hierão tinha um pescoço fortíssimo), como Arquimedes descobriu a quantidade certa de ouro e prata usados para fazer a coroa?

Atividade 18

Considere o triângulo de números a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \end{array}$$

Voce é capaz escrever a próxima linha? e a outra?

Some os números de cada uma dessas linhas. O que você pode observar?

Muito bem, esse triângulo aparece no livro *Introdução à Aritmética*, escrito por Nicomaco, no qual ele nota que a soma dos números na n-ésima linha é n^3.

Atividade 19

Uma das questões que interessava a Diofanto era a seguinte: escreva um dado número, que é a soma de dois quadrados, como a soma de outros dois quadrados.

Por exemplo, 65 é a soma de 64 com 1, dois quadrados.

Você seria capaz de escrever 65 como a soma de outros dois quadrados?

Bem, a resposta de Diofanto é a seguinte:

> 65 se escreve como a soma de dois quadrados de maneiras diferentes pois é o produto de 13 por 5, sendo cada um deles a soma de dois quadrados.

Será que Diofanto conhecia a identidade algébrica

$$(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) \;=\; (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2?$$