

Álgebra Linear I

Stoian Izanov Zlatev



São Cristóvão/SE
2009

Álgebra Linear I

Elaboração de Conteúdo
Stoian Izanov Zlatev

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

Copyright © 2009, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Z82a	Zlatev, Stoian Izanov. Álgebra linear I / Stoian Izanov Zlatev -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009.
------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. Matemática. 2. Álgebra linear. I. Título.

CDU 512.64

Presidente da República

Luiz Inácio Lula da Silva

Chefe de Gabinete

Ednalva Freire Caetano

Ministro da Educação

Fernando Haddad

Coordenador Geral da UAB/UFS**Diretor do CESAD**

Antônio Ponciano Bezerra

Secretário de Educação a Distância

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-coordenador da UAB/UFS**Vice-diretor do CESAD**

Fábio Alves dos Santos

Reitor

Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor

Angelo Roberto Antonioli

Diretoria Pedagógica

Clotildes Farias (Diretora)

Hérica dos Santos Mota

Iara Macedo Reis

Daniela Souza Santos

Janaina de Oliveira Freitas

Núcleo de Avaliação

Guilhermina Ramos (Coordenadora)

Carlos Alberto Vasconcelos

Elizabete Santos

Marialves Silva de Souza

Diretoria Administrativa e Financeira

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)

Sylvia Helena de Almeida Soares

Valter Siqueira Alves

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais

Giselda Barros

Núcleo de Tecnologia da Informação

João Eduardo Batista de Deus Anselmo

Marcel da Conceição Souza

Coordenação de Cursos

Djalma Andrade (Coordenadora)

Assessoria de Comunicação

Guilherme Borba Gouy

Núcleo de Formação Continuada

Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Coordenadores de Curso

Denis Menezes (Letras Portugêses)

Eduardo Farias (Administração)

Haroldo Dorea (Química)

Hassan Sherafat (Matemática)

Hélio Mario Araújo (Geografia)

Lourival Santana (História)

Marcelo Macedo (Física)

Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria

Edvan dos Santos Sousa (Física)

Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)

Janaina Couvo T. M. de Aguiar (Administração)

Priscilla da Silva Góes (História)

Rafael de Jesus Santana (Química)

Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)

Trícia C. P. de Santana (Ciências Biológicas)

Vanessa Santos Góes (Letras Portugêses)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)

Edvar Freire Caetano

Isabela Pinheiro Ewerton

Lucas Barros Oliveira

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

Tadeu Santana Tartum

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Aula 1: Sistemas de equações lineares	15
1.1 Introdução	16
1.2 Equações de retas e planos	16
1.2.1 Retas no plano	16
1.2.2 Planos no espaço	18
1.3 Corpos	19
1.4 Sistemas de equações lineares	21
1.4.1 Equações lineares	21
1.4.2 Sistemas de equações lineares	22
1.4.3 Soluções	22
1.4.4 Sistemas homogêneos e não-homogêneos	23
1.5 O método de eliminação	23
1.5.1 Sistemas equivalentes	24
1.5.2 O método da eliminação	25
1.6 Conclusões	27
1.7 Resumo	28
1.8 Glossário	28
1.9 Atividades	29
1.10 Próxima aula	29
1.11 Referências	29

Aula 2: Matrizes	31
2.1 Introdução	32
2.2 Matrizes	32
2.2.1 Definição e algumas classes de matrizes . . .	32
2.2.2 Duas matrizes associados a um sistema linear	33
2.2.3 Operações elementares sobre as linhas da ma- triz aumentada	34
2.3 Operações com matrizes	39
2.3.1 Notação	40
2.3.2 Igualdade de matrizes	40
2.3.3 Adição de matrizes	41
2.3.4 Multiplicação de uma matriz por um escalar	42
2.3.5 Multiplicação de matrizes	42
2.3.6 Propriedades das operações com matrizes .	43
2.3.7 A forma matricial de um sistema linear . .	46
2.4 Conclusões	47
2.5 Resumo	48
2.6 Glossário	48
2.7 Atividades	49
2.8 Próxima aula	50
2.9 Referências	50
Aula 3: Espaços vetoriais	51
3.1 Introdução	52
3.2 Espaço vetorial	52
3.2.1 Vetores no plano e no espaço	52
3.2.2 Espaço vetorial	53
3.2.3 Exemplos de espaços vetoriais	56

3.2.4	Subespaço	58
3.2.5	Combinação linear	60
3.3	Dependência linear e independência linear	62
3.3.1	Definições e exemplos	62
3.3.2	Propriedades	64
3.3.3	Sistemas lineares	65
3.4	Soma e soma direta de subespaços	67
3.4.1	Soma de subespaços de um espaço vetorial	67
3.4.2	Propriedades da soma de subespaços	68
3.4.3	Soma direta de subespaços	70
3.5	Conclusão	73
3.6	Resumo	73
3.7	Glossário	74
3.8	Atividades	75
3.9	Próxima aula	75
3.10	Referências	75
Aula 4: Base e dimensão		77
4.1	Introdução	78
4.2	Base: definição e exemplos	78
4.3	Espaços gerados por subconjuntos finitos	80
4.3.1	Base finita. Unicidade da representação	81
4.3.2	Subconjunto linearmente independente maximal	82
4.3.3	Espaços gerados por subconjuntos finitos	84
4.3.4	Obtenção de uma base	85
4.3.5	O teorema da substituição	86

4.4	Dimensão	89
4.4.1	Definição e exemplos	89
4.4.2	Subespaços	90
4.5	Mudança da base	90
4.5.1	Base ordenada	90
4.5.2	Matriz da mudança de base	92
4.5.3	A mudança inversa	94
4.6	Conclusão	95
4.7	Glossário	96
4.8	Resumo	96
4.9	Atividades	97
4.10	Próxima aula	97
4.11	Referências	97

Aula 5: Determinantes 99

5.1	Introdução	100
5.2	Determinantes de matrizes 2×2	100
5.2.1	Definição e exemplos	100
5.2.2	A regra de Cramer	102
5.2.3	Determinantes e permutações	103
5.3	Permutações de n objetos	104
5.3.1	Definição	104
5.3.2	Propriedades	105
5.3.3	Sinal	108
5.3.4	Transposições	113
5.4	Determinantes de matrizes $n \times n$	114
5.4.1	Definição e exemplos	114
5.5	Propriedades elementares dos determinantes	116

5.6	Conclusão	124
5.7	Resumo	125
5.8	Atividades	125
5.9	Glossário	125
5.10	Próxima aula	126
5.11	Referências	126
Aula 6: Propriedades e aplicações dos determinantes		127
6.1	Introdução	128
6.2	O determinante como uma função das colunas da matriz	128
6.3	Determinante do produto de duas matrizes	131
6.4	A regra de Cramer	132
6.5	Expansões de determinantes	137
6.5.1	Expansão do determinante segundo uma li- nha da matriz	137
6.5.2	Expansão do determinante segundo uma co- luna da matriz	143
6.6	Matriz inversa	144
6.7	Conclusão	147
6.8	Resumo	147
6.9	Atividade	148
6.10	Glossário	148
6.11	Próxima aula	148
6.12	Referências	149
Aula 7: Aplicações lineares		151
7.1	Introdução	152
7.2	Aplicações	152

7.2.1	Tipos de aplicações	153
7.2.2	Composição	154
7.2.3	Aplicações invertíveis	154
7.3	Aplicações lineares	157
7.4	Núcleo e imagem de uma aplicação linear	159
7.4.1	Definição e propriedades	159
7.4.2	O teorema da dimensão	162
7.5	Conclusão	166
7.6	Resumo	167
7.7	Atividades	167
7.8	Glossário	167
7.9	Próxima aula	168
7.10	Referências	168

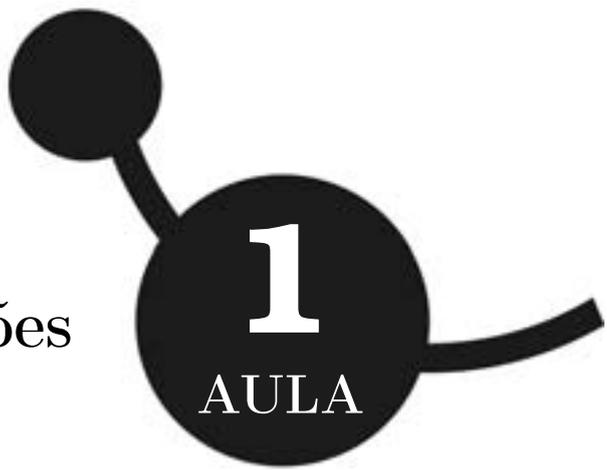
Aula 8: Operações com aplicações lineares **169**

8.1	Introdução	170
8.2	O espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$	170
8.3	Composição de aplicações lineares	172
8.4	Isomorfismo	174
8.4.1	Isomorfismo de espaços vetoriais	174
8.4.2	Isomorfismo de espaços vetoriais de dimensão finita	176
8.5	Operadores	179
8.6	Conclusão	181
8.7	Resumo	181
8.8	Glossário	182
8.9	Próxima aula	183
8.10	Referências	183

Aula 9: Aplicações lineares e matrizes	185
9.1 Introdução	186
9.2 Matriz associada a uma aplicação linear	186
9.3 Composição de aplicações e multiplicação de matrizes	191
9.4 Matrizes associadas a operadores lineares	194
9.4.1 Matriz de um operador linear relativa a uma base	194
9.4.2 Composição de operadores e multiplicação de matrizes	196
9.4.3 Mudança da base	197
9.4.4 Determinante de um operador linear	200
9.5 Conclusão	202
9.6 Resumo	202
9.7 Glossário	202
9.8 Próxima aula	203
9.9 Referências	203
Aula 10: Autovalores e autovetores	205
10.1 Introduction	206
10.2 Autovalores e autovetores	206
10.2.1 Autovalores e autovetores de um operador linear	206
10.2.2 Autovalores e autovetores de uma matriz quadrada	208
10.3 Polinômio característico	210
10.3.1 Polinômio característico de uma matriz qua- drada	210
10.3.2 Polinômio característico de um operador linear	211

10.3.3	Existência de autovalores e autovetores . . .	213
10.3.4	Propriedades dos autovetores	214
10.4	Diagonalização	216
10.5	Conclusão	222
10.6	Resumo	222
10.7	Glossário	222
10.8	Referências	223

Sistemas de equações lineares



1
AULA

META:

- Introduzir o conceito de sistema de equações lineares e o método de Gauss para resolução de sistemas lineares.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar o método de Gauss para determinar se um dado sistema linear tem uma solução, tem várias soluções ou não possui soluções;
- encontrar as soluções de um sistema linear quando tais soluções existem.

PRÉ-REQUISITOS:

- Equações de retas e planos.

Sistemas de equações lineares

1.1 Introdução

Caro aluno, seja bem-vindo a nossa primeira aula de Álgebra Linear! Nela conheceremos um método de resolução de sistemas lineares de equações: o método de Gaus, chamado também “método de eliminação”.

As origens da Álgebra Linear encontramos em problemas associados a sistemas de equações lineares. Na Geometria Analítica equações lineares são usadas na descrição de retas e planos. A Álgebra Linear é uma teoria matemática abstrata. As aplicações desta teoria na Geometria têm o mérito de oferecer modelos de “visualização” de certos conceitos algébricos. Principalmente por este motivo, iniciaremos o nosso estudo com o problema da interseção de retas no plano e de planos no espaço.

1.2 Equações de retas e planos

1.2.1 Retas no plano

Dado um sistema cartesiano de coordenadas no plano e uma reta r no plano, podemos associar à reta uma equação linear

$$ax + by = c, \quad (1.1)$$

onde a , b e c são números reais e x , y são as variáveis reais.

Soluções da equação e pontos da reta

Uma *solução* para a eq. (1.1) é um par de números, x_0 , y_0 , tal que

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Álgebra Linear I



Dado um referencial cartesiano no plano, temos estabelecida uma correspondência biunívoca entre os *pontos da reta* e as *soluções da equação*.

Duas retas no plano

Seja

$$a'x + b'y = c' \quad (1.2)$$

uma equação de uma segunda reta r' no plano. Sabemos da geometria que sempre uma, e somente uma, das seguintes afirmações é verdadeira (e as outras duas são falsas):

- (a) as retas r e r' coincidem;
- (b) as retas têm um único ponto de interseção;
- (c) as retas não possuem nenhum ponto em comum.

Correspondentemente, o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- (a) tem várias soluções;
- (b) tem uma única solução;
- (c) não possui soluções.

Exemplo 1.1. Sejam duas retas, r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$x + 2y = 3 \quad (1.3)$$

e

$$2x + 4y = 6 \quad (1.4)$$

Sistemas de equações lineares

correspondentemente. As duas retas coincidem. Toda solução da equação (1.3) é uma solução para a equação (1.4) e *vice versa*.

Exemplo 1.2. Sejam duas retas, r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$x + 2y = 3, \quad 2x + y = 3. \quad (1.5)$$

As retas têm um único ponto de interseção. O sistema formado pelas equações (1.5) possui uma (e somente uma) solução: $x = 1$, $y = 1$.

Exemplo 1.3. Sejam duas retas, r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$x + 2y = 3, \quad 2x + 4y = 3. \quad (1.6)$$

O sistema (1.6) não possui soluções (verifique!). As retas r_1 e r_2 não têm pontos de interseção. São retas paralelas.

1.2.2 Planos no espaço

De modo analogo, podemos usar sistemas de equações lineares para tratar a o problema da interseção de dois (ou mais) planos no espaço. A equação cartesiana de um plano tem a forma

$$ax + by + cz = d, \quad (1.7)$$

onde a , b , c e d são números reais enquanto x , y e z são variáveis. Suponhamos que dois planos no espaço são dados pelas equações

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

correspondentemente. Então as coordenadas dos pontos que pertencem à *interseção* dos planos satisfazem o *sistema de equações*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

(1.8). Dependendo dos valores dos *coeficientes* $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ e das *constantes* d_1 e d_2 o sistema pode ter uma infinidade de *soluções* ou pode não possuir soluções.

1.3 Corpos

Os coeficientes e as constantes nas equações de retas e planos são números reais. As variáveis nessas equações tomam valores no conjunto dos reais. O conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação é um exemplo da estrutura algébrica denominada “corpo”. Esta estrutura é essencial para o desenvolvimento da teoria geral dos sistemas lineares e dos espaços vetoriais, enquanto outras propriedades do conjunto dos reais (como, por exemplo, a existência de ordenamento) não são essenciais.

As propriedades das operações algébricas com os elementos de um corpo serão usadas na demonstração dos teoremas da Álgebra Linear. Apresentaremos a definição.

Definição 1.1. Um **corpo** é um conjunto \mathbb{K} munido de duas operações binárias, adição (+) e multiplicação (\cdot), com as seguintes propriedades.

1. A adição é associativa: quaisquer que sejam a, b, c em \mathbb{K} , vale

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. A adição é comutativa: quaisquer que sejam a e b em \mathbb{K} , vale

$$a + b = b + a.$$

Sistemas de equações lineares

3. Existe um **elemento neutro aditivo** em \mathbb{K} , chamado de "zero" e denotado por 0 , tal que, para todo a em \mathbb{K} ,

$$a + 0 = a.$$

4. Para cada a em \mathbb{K} existe um elemento simétrico em \mathbb{K} , indicado por $(-a)$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

5. A multiplicação é associativa: quaisquer que sejam a, b, c em \mathbb{K} , vale

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

6. A multiplicação é comutativa: quaisquer que sejam a e b em \mathbb{K} , vale

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7. Existe um elemento 1 em \mathbb{K} , tal que, para todo a em \mathbb{K} ,

$$1 \cdot a = a.$$

8. Para cada $a \neq 0$ em \mathbb{K} existe um elemento a^{-1} em \mathbb{K} , tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

9. É válida a lei distributiva,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Sempre tendo em vista um corpo \mathbb{K} , geralmente não vamos concretizar a natureza dele (a não ser em alguns exemplos). Os elementos do corpo são chamados de **escalares**.



Exemplo 1.4. O **corpo dos números reais** \mathbb{R} é o conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

Exemplo 1.5. O **corpo dos números complexos** \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos.

Exemplo 1.6. O **corpo dos números racionais** \mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais com as operações usuais de adição e multiplicação de números racionais.

1.4 Sistemas de equações lineares

1.4.1 Equações lineares

Definição 1.2. Seja \mathbb{K} um corpo. Uma *equação linear* com n variáveis (incógnitas) é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad (1.9)$$

onde a_1, a_2, \dots, a_n e b são elementos fixos de \mathbb{K} e x_1, \dots, x_n são variáveis que tomam valores em \mathbb{K} . Os elementos a_1, a_2, \dots, a_n são chamados de **coeficientes** da equação, b é a **constante** da equação e x_1, x_2, \dots, x_n são chamadas de **váriáveis** ou **incógnitas**).

Equações homogêneas e não-homogêneas

Uma equação linear (1.9) se diz **equação linear homogênea** se $b = 0$. Em caso contrário ($b \neq 0$) a equação se diz **equação linear não-homogênea**.

Sistemas de equações lineares

Soluções

Dizemos que a sequência finita de escalares c_1, c_2, \dots, c_n , é uma *solução* para a equação (1.9) se

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n = b. \quad (1.10)$$

1.4.2 Sistemas de equações lineares

Definição 1.3. Um *sistema de equações lineares* é um conjunto finito de equações da forma (1.9),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.11)$$

O número m das equações no sistema não é necessariamente igual ao número das incógnitas n . Ele pode ser também menor ou maior de n .

1.4.3 Soluções

A sequência finita de n escalares, c_1, c_2, \dots, c_n , é uma **solução** para o sistema (1.11) se

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = b_i \quad (1.12)$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Um sistema de equações lineares pode ter uma ou mais soluções, mas existem também sistemas que não têm soluções.

1.4.4 Sistemas homogêneos e não-homogêneos

Dizemos que um sistema (1.11) de m equações lineares com n variáveis é **homogêneo** se as constantes de todas as equações são iguais a zero. Logo, um sistema homogêneo tem a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Se pelo menos uma constante b_i no sistema (1.11) é diferente de zero, o sistema se diz **não-homogêneo**.

Em outras palavras, um sistema linear é homogêneo se *todas* as equações do sistema são homogêneas. Se *pelo menos uma* das equações do sistema for não-homogênea, o sistema é não-homogêneo.

1.5 O método de eliminação

Precisamos de *critérios* e *métodos* para determinar se um dado sistema de equações lineares possui uma única solução, muitas soluções, ou não tem solução. Precisamos, também, de métodos eficientes para encontrar as soluções de um sistema de equações lineares, quando tais soluções existem.

Um método importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método de Gauss (o método da eliminação). Ele é baseado em transformações consecutivas do sistema linear em sistemas *equivalentes* ao sistema original. Finalmente, chega-se a um sistema cuja forma permite conclusões ime-

Sistemas de equações lineares

diatas sobre a existência de soluções. E, se existirem, as soluções podem ser encontradas com facilidade.

1.5.1 Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares, ambas com n incógnitas, são chamadas **equivalentes** se toda solução do primeiro sistema é uma solução para o segundo e *vice versa*.

Exemplo 1.7. Os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3y = -3 \end{cases} \quad (1.14)$$

são equivalentes. Com efeito, a única solução $x = -2$, $y = 1$ do primeiro sistema é, também, a única solução do segundo.

Dois sistemas equivalentes não sempre têm o mesmo número de equações, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.8. Os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (1.15)$$

e

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \\ x - y - z = -4 \end{cases} \quad (1.16)$$

são equivalentes. A solução única do primeiro sistema é dada por $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ela é também a solução única do segundo sistema.

1.5.2 O método da eliminação

Exemplo 1.9. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 4 \\ 4x - y + 2z = 3 \\ 6x - y - 4z = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Multiplicando a primeira equação por (-2) obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 4 \\ 4x - y + 2z = 3 \\ 6x - y - 4z = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

que é equivalente ao sistema (1.17). De modo análogo, podemos substituir a terceira equação do sistema (1.18) pela soma desta equação com a primeira equação de (1.18), multiplicada por (-3) .

O resultado desta substituição é o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 4 \\ -7y - 4z = -5 \\ -10y - 13z = -12 \end{cases} \quad (1.19)$$

Todas as equações de (1.19) menos a primeira não contem a variável x . O procedimento pode ser repetido com as duas últimas equações do sistema (1.19) eliminando desta vez a variável y da última equação. Com efeito, adicionando à terceira equação do sistema (1.19) a segunda equação multiplicada por $(-10/7)$, obtemos

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 4 \\ -7y - 4z = -5 \\ -\frac{51}{7}z = -\frac{34}{7} \end{cases} \quad (1.20)$$

Este sistema é equivalente ao sistema original (1.17), mas da terceira equação de (1.20) podemos determinar z imediatamente,

$$z = \frac{2}{3}.$$

Sistemas de equações lineares

Substituindo este valor na segunda equação determinaremos y ,

$$y = -\frac{1}{7}(-5 + 4z) = \frac{1}{3}.$$

Finalmente, substituindo os valores de y e z na primeira equação encontramos

$$x = \frac{1}{2}(4 - 3y - 3z) = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.10. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Eliminando a variável x da segunda e da terceira equação pelo método descrito no exemplo anterior, obtemos

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -5y - 7z = 0 \\ -5y - 7z = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

A terceira equação deste sistema repete a segunda e pode ser omitida. Alternativamente, podemos subtrair a segunda equação do sistema da terceira. Concluimos que (1.22) é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -5y - 7z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

A terceira equação do sistema (1.23) é uma identidade: ela é verdadeira independentemente dos valores das variáveis x , y e z . Portanto, podemos omiti-la. Logo, o sistema (1.21) é equivalente a um sistema de *duas* equações com três incógnitas. Dando a variável

z um valor fixo mas arbitrário, $z = \lambda$, e, depois, transferindo os termos com λ para os segundos membros das equações, obtemos

$$\begin{cases} x + 2y = -3\lambda \\ -5y = 7\lambda \end{cases} \quad (1.24)$$

O sistema tem uma família uniparamétrica de soluções, parametrizada por λ :

$$y = -\frac{7}{5}\lambda, \quad x = -\frac{1}{5}\lambda,$$

onde λ é um escalar arbitrário.

Exemplo 1.11. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Na tentativa de eliminar a primeira variável da segunda equação obtemos

$$0 = -2 \quad (1.26)$$

ou seja, uma igualdade falsa. Concluimos que o sistema (1.25) não tem soluções.

1.6 Conclusões

- O método de Gauss (o método da eliminação) pode ser aplicado a sistemas de equações lineares homogêneas e não homogêneas.
- Quando o sistema possui uma e somente uma solução, o método permite encontrá-la.
- Quando o sistema tem mais de uma solução, o método de Gauss permite encontrar *todas* as soluções (parametrizadas por um parâmetro ou por vários parâmetros).

Sistemas de equações lineares

- Quando o sistema não tem soluções, aplicando o método da eliminação chegamos a uma igualdade falsa do tipo da eq. (1.26).

1.7 Resumo

Vimos que o problema de interseção de retas (planos) na Geometria Analítica admite uma formulação em termos de sistemas de equações lineares. Vimos que um tal sistema pode ter uma solução ou várias soluções, como também pode não possuir soluções. Introduzimos o conceito geral de um sistema linear de m equações com n incógnitas. Os *coeficientes*, as *constantes* e os valores das *incógnitas* em um tal sistema são elementos de um conjunto que possui a estrutura de um *corpo*. Vimos que o método de Gauss (o método de eliminação) pode ser usado para encontrar as soluções de um sistema linear, se tais soluções existirem.

1.8 Glossário

corpo um conjunto munido de duas operações binárias, adição (+) e multiplicação (\cdot), com as propriedades descritas na Definição 1.1.

equação linear uma equação da forma $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ onde a_1, \dots, a_n, b são escalares.

equação linear homogênea uma equação linear cuja constante é igual a zero.

escalar elemento de um corpo.



sistemas equivalentes dois sistemas de equações tais que toda solução do primeiro sistema é uma solução do segundo e *vice versa*.

1.9 Atividades

ATIV. 1.1. Ache as soluções dos sistemas no Exemplo 1.8. Mostre que os sistemas são equivalentes.

ATIV. 1.2. Mostre que cada um dos conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , munidas de operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo.

ATIV. 1.3. O conjunto \mathbb{Z} de todos os números inteiros, com as operações usuais de adição e multiplicação, não é um corpo. Determine porque.

ATIV. 1.4. Use o método de Gauss para encontrar as soluções dos sistemas lineares (1.15) e (1.16) no Exemplo 1.8. Os sistemas são equivalentes?

1.10 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer as matrizes.

1.11 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.