Álgebra Linear I

Stoian Izanov Zlatev

CESAD

São Cristóvão/SE
2009

Álgebra Linear I

Elaboração de Conteúdo
Stoian Izanov Zlatev

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Z82a Zlatev, Stoian Izanov.
Álgebra linear I / Stoian Izanov Zlatev -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009.

1. Matemática. 2. Álgebra linear. I. Título.

CDU 512.64

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

1

AULA

Sistemas de equações lineares

META:

- Introduzir o conceito de sistema de equações lineares e o método de Gauss para resolução de sistemas lineares.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar o método de Gauss para determinar se um dado sistema linear tem uma solução, tem várias soluções ou não possui soluções;
- encontrar as soluções de um sistema linear quando tais soluções existem.

PRÉ-REQUISITOS:

- Equações de retas e planos.

1.1 Introdução

Caro aluno, seja bem-vindo a nossa primeira aula de Álgebra Linear! Nela conheceremos um método de resolução de sistemas lineares de equações: o método de Gaus, chamado tambem “método de eliminação”.

As origens da Álgebra Linear encontramos em problemas associados a sistemas de equações lineares. Na Geometria Analítica equações lineares são usadas na descrição de retas e planos. A Álgebra Linear é uma teoria matemática abstrata. As aplicações desta teoria na Geometria têm o mérito de oferecer modelos de “visualização” de certos conceitos algébricos. Principalmente por este motivo, iniciaremos o nosso estudo com o problema da interseção de retas no plano e de planos no espaço.

1.2 Equações de retas e planos

1.2.1 Retas no plano

Dado um sistema cartesiano de coordenadas no plano e uma reta r no plano, podemos associar à reta uma equação linear

$$ax + by = c, \tag{1.1}$$

onde a, b e c são números reais e x, y são as variáveis reais.

Soluções da equação e pontos da reta

Uma *solução* para a eq. (1.1) é um par de números, x_0, y_0, tal que

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Dado um referencial cartesiano no plano, temos estabelecida uma correspondência biunívoca entre os *pontos da reta* e as *soluções da equação.*

Duas retas no plano

Seja

$$a'x + b'y = c' \tag{1.2}$$

uma equação de uma segunda reta r' no plano. Sabemos da geometria que sempre uma, e somente uma, das seguintes afirmações é verdadeira (e as outras duas são falsas):

(a) as retas r e r' coincidem;

(b) as retas têm um único ponto de interseção;

(c) as retas não possuem nenhum ponto em comum.

Correspondentemente, o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a\,x & +b\,y & = c \\ a'x & +b'y & = c' \end{cases}$$

(a) tem várias soluções;

(b) tem uma única solução;

(c) não possui soluções.

Exemplo 1.1. Sejam duas retas, r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$x + 2y = 3 \tag{1.3}$$

e

$$2x + 4y = 6 \tag{1.4}$$

correspondentemente. As duas retas coincidem. Toda solução da equação (1.3) é uma solução para a equação (1.4) e *vice versa*.

Exemplo 1.2. Sejam duas retas, r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$x + 2y = 3, \qquad 2x + y = 3. \tag{1.5}$$

As retas têm um único ponto de interseção. O sistema formado pelas equações (1.5) possui uma (e somente uma) solução: $x = 1$, $y = 1$.

Exemplo 1.3. Sejam duas retas, r_1 e r_2 dadas pelas equações

$$x + 2y = 3, \qquad 2x + 4y = 3. \tag{1.6}$$

O sistema (1.6) não possui soluções (verifique!). As retas r_1 e r_2 não têm pontos de interseção. São retas paralelas.

1.2.2 Planos no espaço

De modo analogo, podemos usar sistemas de equações lineares para tratar a o problema da interseção de dois (ou mais) planos no espaço. A equação cartesiana de um plano tem a forma

$$ax + by + cz = d, \tag{1.7}$$

onde a, b, c e d são números reais enquanto x, y e z são variáveis. Suponhamos que dois planos no espaço são dados pelas equações

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

correspondentemente. Então as coordenadas dos pontos que pertencem à *interseção* dos planos satisfazem o *sistema de equações*

$$\begin{cases} a_1x & +b_1y & +c_1z & = d_1 \\ a_2x & +b_2y & +c_2z & = d_2 \end{cases} \tag{1.8}$$

(1.8). Dependendo dos valores dos *coeficientes* a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 e das *constantes* d_1 e d_2 o sistema pode ter uma infinidade de *soluções* ou pode não possuir soluções.

1.3 Corpos

Os coeficientes e as constantes nas equações de retas e planos são números reais. As variáveis nessas equações tomam valores no conjunto dos reais. O conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação é um exemplo da estrutura algébrica denominada "corpo". Esta estrutura e essencial para o desenvolvimento da teoria geral dos sistemas lineares e dos espaços vetoriais, enquanto outras propriedades do conjunto dos reais (como, por exemplo, a existência de ordenamento) não são essenciais.

As propriedades das operações algébricas com os elementos de um corpo serão usadas na demonstração dos teoremas da Álgebra Linear. Apresentaremos a definição.

Definição 1.1. Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações binárias, adição ($+$) e multiplicação ($\cdot$), com as seguintes propriedades.

1. A adição é associativa: quaisquer que sejam a, b, c em $\mathbb{K}$, vale
$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. A adição e comutativa: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{K}$, vale
$$a+b = b+a.$$

3. Existe um **elemento neutro aditivo** em $\mathbb{K}$, chamado de "zero"e denotado por 0, tal que, para todo a em $\mathbb{K}$,
$$a + 0 = a.$$

4. Para cada a em $\mathbb{K}$ existe um elemento simétrico em $\mathbb{K}$, indicado por $(-a)$, tal que
$$a + (-a) = 0.$$

5. A multiplicação é associativa: quaisquer que sejam a, b, c em $\mathbb{K}$, vale
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

6. A multiplicação e comutativa: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{K}$, vale
$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7. Existe um elemento 1 em $\mathbb{K}$, tal que, para todo a em $\mathbb{K}$,
$$1 \cdot a = a.$$

8. Para cada $a \neq 0$ em $\mathbb{K}$ existe um elemento a^{-1} em $\mathbb{K}$, tal que
$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

9. É válida a lei distribuitiva,
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Sempre tendo em vista um corpo $\mathbb{K}$, geralmente não vamos concretizar a natureza dele (a não ser em alguns exepmplos). Os elemento do corpo são chamados de **escalares**.

Exemplo 1.4. O **corpo dos números reais** $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

Exemplo 1.5. O **corpo dos números complexos** $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos.

Exemplo 1.6. O **corpo dos números racionais** $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais com as operações usuais de adição e multiplicação de números racionais.

1.4 Sistemas de equações lineares

1.4.1 Equações lineares

Definição 1.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma *equação linear* com n variáveis (incognitas) é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.9}$$

onde $a_1, a_2, \ldots a_n$ e b são elementos fixos de $\mathbb{K}$ e $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis que tomam valores em $\mathbb{K}$. Os elementos $a_1, a_2, \ldots a_n$ são chamados de **coeficientes** da equação, b é a **constante** da equação e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são chamadas de **váriáveis** ou **incógnitas**).

Equações homogêneas e não-homogêneas

Uma equação linear (1.9) se diz **equação linear homogênea** se $b = 0$. Em caso contrário ($b \neq 0$) a equação se diz **equação linear não-homogênea**.

Soluções

Dizemos que a sequência finita de escalares $c_1, c_2, \ldots c_n$, é uma *solução* para a equação (1.9) se

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b. \tag{1.10}$$

1.4.2 Sistemas de equações lineares

Definição 1.3. Um *sistema de equações lineares* é um conjunto finito de equações da forma (1.9),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.11}$$

O número m das equações no sistema não é necessariamente igual ao numero das incognitas n. Ele pode ser também menor ou maior de n.

1.4.3 Soluções

A sequência finita de n escalares, $c_1, c_2, \ldots c_n$, é uma **solução** para o sistema (1.11) se

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i \tag{1.12}$$

para todo $i = 1, \ldots, m$. Um sistema de equações lineares pode ter uma ou mais soluções, mas existem também sistemas que não têm soluções.

1.4.4 Sistemas homogêneos e não-homogêneos

Dizemos que um sistema (1.11) de m equações lineares com n variáveis é **homogêneo** se as constantes de todas as equações são iguais a zero. Logo, um sistema homogêneo tem a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = 0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Se pelo menos uma constante b_i no sistema (1.11) é diferente de zero, o sistema se diz **não-homogêneo**.

Em outras palavras, ums sitema linear é homogêneo se *todas* as equações do sistema são homogêneas. Se *pelo menos uma* das equações do sistema for não-homogênea, o sistema é não-homogêneo.

1.5 O método de eliminação

Precisamos de *critérios* e *métodos* para determinar se um dado sistema de equações lineares possui uma única solução, muitas soluções, ou não tem solução. Precisamos, também, de métodos eficientes para encontrar as soluções de um sistema de equações lineares, quando tais soluçoes existem.

Um metodo importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método de Gauss (o método da eliminação). Ele é baseado em transformações consecutivas do sistema linear em sistemas *equivalentes* ao sistema original. Finalmente, chega-se a um sistema cuja forma permite conclusões imediatas sobre a existência de soluções. E, se existirem, as soluções podem ser encontradas com facilidade.

1.5.1 Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares, ambas com n incognitas, são chamadas **equivalentes** se toda solução do primeiro sistema e uma solução para o segundo e *vice versa*.

Exemplo 1.7. Os sistemas de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & = & 0 \\ x & -y & = & -3 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & = & 0 \\ & -3y & = & -3 \end{array}\right. \tag{1.14}$$

são equivalentes. Com efeito, a única solução $x = -2$, $y = 1$ do primeiro sistema é, também, a única solução do segundo.

Dois sistemas equivalentes não sempre têm o mesmo número de equações, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.8. Os sistemas de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & -z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 6 \\ x & -y & & = & -1 \end{array}\right. \tag{1.15}$$

e

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +z & = & 7 \\ x & +2y & +z & = & 8 \\ x & +y & +2z & = & 9 \\ x & -y & -z & = & -4 \end{array}\right. \tag{1.16}$$

são equivalentes. A solúção única do primeiro sistema é dada por $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ela é também a solução única do segundo sistema.

1.5.2 O método da eliminação

Exemplo 1.9. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} 2x & +3y & +3z & = & 4 \\ 4x & -y & +2z & = & 3 \\ 6x & -y & -4z & = & 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Multiplicando a primeira equação por (-2) obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x & +3y & +3z & = & 4 \\ 4x & -y & +2z & = & 3 \\ 6x & -y & -4z & = & 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

que é equivalente ao sistema (1.17). De modo análogo, podemos substituir a terceira equação do sistema (1.18) pela soma desta equação com a primeira equação de (1.18), multiplicada por (-3). O resulato desta subsstituição é o sistema

$$\begin{cases} 2x & +3y & +3z & = & 4 \\ & -7y & -4z & = & -5 \\ & -10y & -13z & = & -12 \end{cases} \tag{1.19}$$

Todas as equações de (1.19) menos a primeira não contem a variável x. O procedimento pode ser repetido com as duas ultimas equações do sistema (1.19) eliminando desta vez a variável y da última equação. Com efeito, adicionando à terceira equação do sistema (1.19) a segunda equação multiplicada por $(-10/7)$, obtemos

$$\begin{cases} 2x & +3y & +3z & = & 4 \\ & -7y & -4z & = & -5 \\ & & -\frac{51}{7}z & = & -\frac{34}{7} \end{cases} \tag{1.20}$$

Este sistema é equivalente ao sistema original (1.17), mas da terceira equãção de (1.20) podemos determinar z imediatamente,

$$z = \frac{2}{3}.$$

Substituindo este valor na segunda equação determinaremos y,

$$y = -\frac{1}{7}(-5 + 4z) = \frac{1}{3}.$$

Finalmente, substituindo os valores de y e z na primeira equação encontramos

$$x = \frac{1}{2}(4 - 3y - 3z) = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.10. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 0 \\ 3x & +y & +2z & = & 0 \\ 2x & -y & -z & = & 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Eliminando a variável x da segunda e da terceira equação pelo método descrito no exemplo anterior, obtemos

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 0 \\ & -5y & -7z & = & 0 \\ & -5y & -7z & = & 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

A terceira equação deste sistema repete a segunda e pode ser omitida. Alternativamente, podemos subtrair a segunda equação do sistema da terceira. Concluimos que (1.22) é equivalente a

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 0 \\ & -5y & -7z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

A terceira equação do sistema (1.23) é uma identidade: ela é vérdadeira independemente dos valores das variáveis x, y e z. Portanto, podemos omiti-la. Logo, o sistema (1.21) é equivalente a um sistema de *duas* equações com três icognitas. Dando a variável

z um valor fixo mas arbitrário, $z = \lambda$, e, depois, transferindo os termos com λ para os segundos membros das equações, obtemos

$$\begin{cases} x & +2y & = & -3\lambda \\ & -5y & = & 7\lambda \end{cases}. \tag{1.24}$$

O sistema tem uma família uniparamétrica de soluções, parametrizada por λ:

$$y = -\frac{7}{5}\lambda, \qquad x = -\frac{1}{5}\lambda,$$

onde λ é um escalar arbitrário.

Exemplo 1.11. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x & +y & = & 2 \\ x & +y & = & 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Na tentativa de eliminar a primeira variável da segunda equação obtemos

$$0 = -2 \tag{1.26}$$

ou seja, uma igualdade falsa. Concluimos que o sistema (1.25) não tem soluções.

1.6 Conclusões

- O método de Gauss (o método da eliminação) pode ser aplicado a sistemas de equações lineares homogêneas e não homogêneas.
- Quando o sistema possui uma e somente uma solução, o método permite encontrá-la.
- Quando o sistema tem mais de uma solução, o método de Gauss permite encontrar *todas* as soluções (parametrizdas por um parâmetro ou por vários parâmetros).

- Quando o sistema não tem solucões, aplicando o método da eliminação chegamos a uma igualdade falsa do tipo da eq. (1.26).

1.7 Resumo

Vimos que o problema de interseção de retas (planos) na Geometria Analítica admite uma formulação em termos de sistemas de equações lineares. Vimos que um tal sistema pode ter uma solução ou várias soluções, como também pode não possuir soluções. Introduzimos o conceito geral de um sistema linear de m equações com n incognitas. Os *coeficientes*, as *constantes* e os valores das *incognitas* em um tal sistema são elementos de um conjunto que possui a estrutura de um *corpo*. Vimos que o metodo de Gauss (o método de elminação) pode ser usado para encontrar as soluções de um sistema linear, se tais soluções existirem.

1.8 Glossário

corpo um conjunto munido de duas operações binárias, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, com as propriedades descritas na Definição 1.1.

equação linear uma equação da forma $a_1x_1 + \cdots + a_nx_{x_n} = b$ onde $a_1, \ldots, a_n, b$ são escalares.

equação linear homogênea uma equação linear cija constante é igual a zero.

escalar elemento de um corpo.

sistemas equivalentes dois sistemas de equações tais que toda solução do primeiro sistema é uma solução do segundo e *vice versa*.

1.9 Atividades

ATIV. 1.1. Ache as soluções dos sistemas no Exemplo 1.8. Mostre que os sistemas são equivalentes.

ATIV. 1.2. Mostre que cada um dos conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, munidas de oparações usuais de adição e multiplicação, é um corpo.

ATIV. 1.3. O conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros, com as operações usuais de adição e multiplicação, não é um corpo. Determine porque.

ATIV. 1.4. Use o método de Gauss para encontrar as soluções dos sistemas lineares (1.15) e (1.16) no Exemplo 1.8. Os sistemas são equivalentes?

1.10 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer as matrizes.

1.11 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.