2

AULA

Matrizes

METAS:

- Introduzir o conceito de matriz.
- Reformular o método de Gauss em termos de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada.
- Introduzir as operações com matrizes.

OBJETIVOS: Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada para resolver um sistema linear pelo metodo de Gauss;
- usar corretamente as operações com matrizes e as propriedades dessas operações.

PRÉ-REQUISITOS:

- Sistemas de equações lineares.
- Método de Gauss.

2.1 Introdução

As *matrizes*, que conheçeremos nessa aula, aparecerão como uma ferramenta simples e intuitiva para a gravação das informações essenciais sobre um sistema linear. Portanto, não é surpreendente que o método de Gauss, por exemplo, admite uma formulação eficiente em termos de matrizes. No entanto, as aplicações das matrizes na Álgebra Linear não se reduzem a uma ou outra refomulação dos métodos de resolução de sistemas lineares. As matrizes não são simples "tabelas de escalares" mas, sim, objetos algébricos para os quais podemos definir *operações*. Essas operações e suas propriedades conheceremos na segunda parte da aula.

2.2 Matrizes

2.2.1 Definição e algumas classes de matrizes

Todas as informações sobre um sistema linear estão contidas nos coeficientes e nas constantes das equações. Consideremos o sistema linear do Exemplo 1.9

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +3y & +3z & = & 4 \\ 4x & -y & +2z & = & 3 \\ 6x & -y & -4z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Os coeficientes do sistema escrevemos na forma de uma tabela:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

A posição de cada um dos números na tabela é importante. Por exemplo, o *primeiro* coeficiente da *terceira* equação do sistema encontramos na terceira linha e na primeira coluna da tabela (2.27).

Definição 2.4. Uma **matriz** A, $m \times n$ (m por n) é uma tabela de números com m **linhas** e n **colunas**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

O número a_{ij}, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, é o **elemento** (a **entrada**) de posição ij da matriz A.

Matriz linha é uma matriz $1 \times n$, isto é, uma matriz com uma única linha,

$$(a_1 \dots a_n)\,.$$

Matriz coluna é uma matriz com uma única coluna, isto é, uma matriz $m \times 1$,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matriz quadrada de ordem n é uma matriz $n \times n$. Os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ de uma matriz quadrada de ordem n formam a **diagonal principal** da matriz.

2.2.2 Duas matrizes associados a um sistema linear

Dado um sistema linear (1.11), duas matrizes a ele associadas têm um papel importante.

A matriz do sistema é a matriz dos coeficientes, isto é, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Aplicando o método de Gauss a um sistema linear, modificamos os coeficientes e as constantes do sistema. É conveniente definir uma matriz cujas entradas são os coeficientes e as constantes do sistema.

A matriz aumentada de um sistema linear (1.11) é a matriz dos coeficientes e das constantes do sistema. Escrevemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{2.30}$$

2.2.3 Operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada

As operações sobre as equações de um sistema linear, usadas no método de Gauss podemos susbstituir por operações sobre as linhas da matriz aumentada. Com efeito, a i-ésima linha

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \dots a_{in} \,|\, b_i$$

da matriz (2.30) contem todas as informações sobre a i-ésima equação do sistema linear (1.11),

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Proposição 2.1. Uma troca das posições da i-esima e da j-ésima equação[1] no sistema linear (1.11), isto é, uma substituição do sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 & +\dots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}x_1 & +\dots & +a_{jn}x_n & = b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2.31}$$

pelo sistema equivalente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}x_1 & +\dots & +a_{jn}x_n & = b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 & +\dots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

corresponde à troca da i-ésima e da j-ésima linha da matriz aumentada (2.30),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

[1]Sem perda de generalidade assumimos que $1 \leq i < j \leq m$.

Proposição 2.2. À multiplicação da i-ésima equação por um escalar $\alpha \neq 0$, isto é, a substituição do sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 & +\dots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

pelo sistema equivalente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1}x_1 & +\dots & +\alpha a_{in}x_n & = \alpha b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

corresponde a multiplicação da i-ésima linha da matriz por α:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} & \alpha b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Proposição 2.3. Finalmente, a substituição da i-ésima equação do sistema pela soma da i-ésima e do múltiplo da j-ésima equação por um escalar α corresponde à substituição da i-ésima linha da matriz pela soma da i-ésima e do múltiplo da j-ésima linha por α.

A matriz do sistema (2.31) é substituida pela matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & \dots & a_{in}+\alpha a_{jn} & b_i+\alpha b_j \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Então o método de eliminação de Gauss pode ser descrito (e aplicado também) em termos das seguintes **operações elementares sobre as linhas** da matriz aumentada do sistema linear.

1. Troca das posições de duas linhas da matriz.
2. Multiplicação de uma linha por um escalar não-nulo.
3. Substituição de uma linha pela soma da mesma linha e de uma outra linha da matriz multiplicada por um escalar.

Exemplo 2.12. Encontre as soluções (se tiver) do sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} & y & -z & = & -1 \\ x & +y & +z & = & 3 \\ 2x & -4y & +2z & = & 3 \end{array}\right. \tag{2.32}$$

Solução. A matriz estendida do sistema é

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

A entrada de posição 11 desta matriz é igual a zero. No entanto, existem na primeira coluna da matriz entradas não nulas. Por exemplo, a entrada de posição 21 é igual a 1. Podemos trocar a primeira e a segunda linha da matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{\text{troca da 1a e} \\ \text{da 2a linha}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

O elemento de posição 11 da matriz nova é não-nulo.

Primeira eliminação. Substituimos a *terceira linha* da matriz pela soma da terceira linha e da *primeira linha multiplicada por* (-2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{\text{substitição da} \\ \text{3a linha}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Agora o único elemento diferente de zero na primeira coluna da matriz é o elemento de posição 11.

Segunda eliminação. Substituimos a *terceira linha* da matriz pela soma da terceira linha e da *segunda linha multiplicada por* 6:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{\text{substitição da} \\ \text{3a linha}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{array}\right) \tag{2.33}$$

Depois da segunda eliminação a matriz do sistema, isto é a matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

está na *forma escalonada.*

Definição 2.5. Dizemos que uma matriz esta **na forma escalonada** quando as linhas da matriz satisfazem as seguintes condições.

(a) As linhas que contem pelos menos um elemento não nulo se posicionam de tal modo que o primeiro elemento não-nulo de cada linha ocorre a direita do primeiro elemento não-nulo da linha anterior.

(b) As linhas nulas (compostas por zeros) estão abaixo de todas as linhas que contem pelo menos um elemento não-nulo.

O sistema linear cuja matriz aumentada é dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{array}\right)$$

é equivalente ao sistema (2.32), mas é de fácil resolução porque a matriz do sistema está na forma escalonada. Da terceira equação

$$-6z = -9$$

encontramos $z = 3/2$. Substitundo este valor na segunda equação

$$y - z = -1$$

encontramos $y = 1/2$. Finalmente, substituindo os valores de y e z na primeira equação,

$$x + y + z = 3,$$

encontramos $x = 1$.

2.3 Operações com matrizes

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz, definidas na seção anterior, têm aplicação no método de Gauss. No entanto, podemos definir também **operações com matrizes** que têm inumeras aplicações. As operações com matrizes são definidas atraves de operações com as entradas das matrizes. É conveniete usar uma notação que relaciona as matrizes e as suas entradas.

2.3.1 Notação

Matrizes e entradas

- Seja A uma matriz $m \times n$. Denotaremos por $[A]_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ a entrada de posição ij da matriz A.
- Sejam B uma matriz $m \times n$ e b_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ as entradas da matriz B. Indiquemos a matriz B por (b_{ij}). Isto é, (b_{ij}) será usado como um símbolo alternativo para B.

Conjuntos de matrizes

- Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Por exemplo, $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ será o conjunto das matrizes-coluna com m linhas e entradas reais, enquanto $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C})$ será o conjunto das matrizes-linha com n colunas e entradas complexas.
- Denotaremos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o conjunto das *matrizes quadradas* $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.

2.3.2 Igualdade de matrizes

Antes de definir as operações com matrizes, definiremos uma *relação*: a **iguldade** de duas matrizes.

Definição 2.6. Sejam A e B duas matrizes. Dizemos que A é igual a B e escrevemos $A = B$ se

(a) o número de linhas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B (seja m este número);

(b) o número de colunas da matriz A é igual ao número de colunas da matriz B (seja n este número);

(c) $[A]_{ij} = [B]_{ij}; \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n.$

Verifica-se que que a igualdade de matrizes é:

(i) reflexiva ($A = A$);

(ii) simétrica (se $A = B$ então $B = A$);

(iii) transitiva ($A = B$, $B = C \Rightarrow A = C$).

2.3.3 Adição de matrizes

Definição 2.7. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Dizemos que a matriz $m \times n$

$$C = (c_{ij})$$

é a **soma** das matrizes A e B e escrevemos $C = A + B$ se

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots m; \quad j = 1, \ldots n.$$

Exemplo 2.13. Sejam A e B as matrizes 2×3 dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A soma dessas matrizes e a matriz

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & -1+1 \\ 0+0 & 3-2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição 2.8. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ e α um escalar (um elemento de $\mathbb{K}$). Definimos a matriz αA por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

ou, seja, a entrada de posição ij de αA é igual ao produto da entrada de posição ij da matriz A e do escalar α. A matriz αA e chamada de **múltiplo escalar** da matriz A.

Exemplo 2.14. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 3.$$

Então

$$\alpha A = 3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.3.5 Multiplicação de matrizes

Definição 2.9. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times l$ e seja $B = (b_{rs})$ uma matriz $l \times n$, ambas com entradas em $\mathbb{K}$. Definimos o **produto** AB como sendo uma matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida por

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj},$$
$$i = 1, \ldots m, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 2.15. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo o número de colunas de A igual ao número de linhas de B, o produto AB está definido. Ele é uma matriz 3×2 já que o número de linhas de A é igual a 3 e o número de colunas de B é igual a 2. O produto AB é dado por

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -15 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o produto BA **não está definido** porque o número de colunas de B é igual a 2 enquanto o número de linhas de A é igual a 3.

2.3.6 Propriedades das operações com matrizes

As três operações com matrizes (adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes) foram definidas em termos de operações com entradas das matrizes. As propriedades destas operações decorrem das propriedades das operações com escalares. Na descrição das propriedades assumimos que A, B, C são matrizes com entradas em um corpo $\mathbb{K}$, enquanto α, β são escalares (elementos do corpo $\mathbb{K}$).

(a) Comutatividade da adição

Sejam A e B matrizes $m \times n$. Então

$$A + B = B + A.$$

Demosntração. Usando a Definição 2.7 de adição de matrizes, obtemos

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = [B]_{ij} + [A]_{ij} = [B+A]_{ij}.$$

Usando a Definição 2.6 concluimos que $A+B = B+A$.

(b) Associatividade da adição

Sejam A, B e C matrizes $m \times n$. Então

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}[(A+B)+C]_{ij} &= [A+B]_{ij} + [C]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} + [C]_{ij} \\ &= [A]_{ij} + [B+C]_{ij} = [A+(B+C)]_{ij}.\end{aligned}$$

Logo, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

(c) Existência e unicidade do elemento neutro aditivo

Em cada conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existe uma matriz, denotada por 0, tal que

$$A + 0 = A. \tag{2.34}$$

É a matriz $m \times n$ com todas as entradas iguais a 0,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica-se facilmente que o elemento com a propriedade (2.34) é único em cada $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. A **diferença** de duas matrizes A e B

do conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definimos por

$$A - B \overset{\text{def}}{=} A + (-B).$$

(d) Existência e unicidade do elemento simétrico

Seja A uma matriz $m \times n$. A equação

$$A + X = 0$$

tem uma, e somente uma, solução em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ela é denotada por $-A$ e satisfaz

$$[-A]_{ij} = -[A]_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.$$

(e) Associatividade da multiplicação de uma matriz por escalares

Sejam A uma matriz $m \times n$ e α, β escalares. Então

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

(f) Primeira lei distributiva

Sejam A uma matriz $m \times n$ e α, β escalares. Então

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

(g) Segunda lei distributiva

Sejam A e B duas matrizes $m \times n$ e α um escalar. Então

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

(h) Asociatividade da multiplicação de matrizes

Sejam A uma matriz $m \times k$, B uma matriz $k \times l$ e C uma matriz $l \times n$. Então

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_{r=1}^{k} [A]_{ir}[BC]_{rj} = \sum_{r=1}^{k} [A]_{ir} \left(\sum_{s=1}^{l} [B]_{rs}[C]_{sj} \right) \\ &= \sum_{s=1}^{l} \left(\sum_{r=1}^{k} [A]_{ir}[B]_{rs} \right) [C]_{sj} = [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

(i) Matriz identidade de ordem n

Para cada n natural definimos uma matriz quadrada $n \times n$ que tem todas as entradas na diagonal principal iguais a 1 enquanto todas as entradas fora da diagonal principal são iguais a 0. Esta matriz

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

é a **matriz identidade**. Verifica-se que para toda matriz $m \times n$ A vale

$$I_m A = A I_n.$$

2.3.7 A forma matricial de um sistema linear

Dado um sistema linear de m equações com n incognitas

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right. , \qquad (2.35)$$

sejam

- A a matriz $m \times n$ do sistema, $A = (a_{ij})$
- B uma matriz $m \times 1$ e X uma matriz $n \times 1$ dadas por

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

O sistema (2.35) é equivalente à *equação matricial*

$$AX = B \tag{2.36}$$

no seguinte sentido.

Resultado 2.1. Uma sequencia finita de escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ é uma solução para o sistema (2.35) se, e somente se, a matriz $n \times 1$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

á uma solução para a equação matricial (2.36).

ATIV. 2.5. Prove o Resultado 2.1.

2.4 Conclusões

As matrizes são tabelas de escalares. Introduzidas como uma ferramenta técnica na resolução de sistemas lineares elas se tornam objetos algébricos interessantes após a definição de *operações com matrizes*: adição de matrizes, multiplicação de matrizes por escalares e multiplicação de matrizes.

2.5 Resumo

As matrizes são tabelas de escalares. Dado um sistema linear, associamos a ele duas matrizes:

- a matriz do sistema cujas entradas são os coeficientes das equações do sistema;
- a matriz aumentada cujas entradas são os coeficientes e as constantes das equações do sistema.

Vimos que o método de Gauss admite uma formulação em termos de *operações elementares sobre as linhas* da matriz aumentada. Definimos também operações com matrizes: adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicaçãio de matrizes. Provamos as propriedades dessas operações. Vimos que um sistema linear pode ser expresso na forma de uma equação matricial.

2.6 Glossário

diagonal principal de uma matriz $n \times n$ a sequência das posições ij com $i = j$ $(i = 1, \dots, n)$ na matriz.

elemento (entrada) de posição ij **de uma matriz** o escalar que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna da matriz (ver a Definição 2.4).

matriz aumentada de um sistema linear a matriz dos coeficientes e das constantes do sistema linear.

matriz uma tabela de escalares (ver a Definição 2.4).

matriz coluna matriz com uma única coluna.

matriz de um sistema linear a matriz dos coeficientes do sistema linear.

matriz linha matriz com uma única linha.

matriz quadrada matriz cujo número de linhas é igual ao numero de colunas.

operações com matrizes saã chamada as operações de (1) adição de matrizes; (2) multiplicação de matrizes por escalares; (3) multiplicação de matrizes.

operações elementares sobre as linhas de uma matriz são as operações de (1) troca das posições de duas linhas da matriz; (2) multiplicação de uma linha por um escalar não-nulo; (3) substituição de uma linha pela soma da mesma linha e de uma outra linha da matriz multiplicada por um escalar.

2.7 Atividades

ATIV. 2.6. Escreva a matriz do sistema linear

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +5z & = -9 \\ x & +2y & +5z & = \ \ 2 \\ x & +2y & +5z & = 25 \end{array}\right. \tag{2.37}$$

ATIV. 2.7. Escreva a matriz aumentada do sistema linear (2.37).

ATIV. 2.8. Use operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema linear (2.37) para resolver o sistema.

Resposta: $x = 2$, $y = -3$, $z = -1$.

ATIV. 2.9. Escreva a matriz aumentada do sistema linear

$$\begin{cases} x & -5y & -8z & +t & = & 3 \\ 3x & +y & -3z & -5t & = & 1 \\ x & & -7z & +2t & = & -5 \\ & 11y & +20z & -9t & = & 2 \end{cases} \tag{2.38}$$

ATIV. 2.10. Use operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema linear (2.38) para determinar se o sistema tem soluções. Se tiver, ache as soluções.

Resposta: o sistema não possui soluções.

ATIV. 2.11. Ache o produto das matrizes

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -34 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: $\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

2.8 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer um dos objetos mais importantes da Álgebra Linear: o espaço vetorial.

2.9 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.