4

AULA

Base e dimensão

META

- Introduzir os conceitos de base e dimensão de um espaço vetorial.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- distinguir entre espaços vetoriais de dimensão fnita e infinita;
- determinar se um subconjunto de um espaço vetorial é uma base;
- determinar a dimensão de subespaços gerados por conjuntos finitos de vetores;
- calcular as coordenadas do vetor em uma base nova a partir das coordenadas na base antiga.

PRÉ-REQUISITOS

- Sistemas de equações lineares.
- Vetores no plano e no espaço.
- Espaços vetoriais.

4.1 Introdução

Geralmente, um espaço vetorial contem uma infinidade de vetores. O único espaço vetorial com um número finito de elementos é o espaço trivial com um único elemento, o vetor nulo. No entanto, muitos espaços vetoriais são *gerados* por *conjuntos finitos de vetores*. Para um espaço deste tipo podemos definir *dimensão*. A ideia de *base de um espaço vetorial*, por outro lado, pode ser útil também em situações quando o espaço vetorial não é gerado por um conjunto finito de vetores. No entanto, vamos nos limitar nesse caso às situações nos quais a *base* é um conceito estritamente algébrico.

4.2 Base: definição e exemplos

Definição 4.19. Uma **base** B de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um subconjunto de $\mathcal{V}$

(i) linearmente independente;

(ii) que gera $\mathcal{V}$.

Exemplo 4.35. Seja $\mathcal{V}$ o espaço dos vetores no plano. Dado um sistema cartesiano de coordenadas no plano, associamos a ele o conjunto dos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, sendo $\mathbf{i}$ com a direção e o sentido do eixo dos x e $\mathbf{j}$ com a direção e o sentido do eixo dos y. O conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ é linearmente independente. Com efeito, se

$$c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} = 0,$$

então $c_1 = c_2 = 0$. Por outro lado, todo vetor no plano $\mathbf{v}$ é representado por uma combinação linear dos vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Portanto, pela Definição 3.14, o conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ gera $\mathcal{V}$. Concluimos que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ é uma base de $\mathcal{V}$.

Exemplo 4.36. Consideremos no $\mathbb{R}^3$ o subconjunto B formado pelos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Ele é linearmente independente. Com efeito, a equação

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por outro lado, qualquer vetor (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ é represantado por uma combinação linear dos vetores do conjunto B:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Concluimos que B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.37. Seja n um número natural. Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de uma variável real, com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n. Mostraremos que o subconjunto B de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ cujos elementos são os *monômios* t^k de grau k menor ou igual a n

$$B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$$

é uma base em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração. Todo polinômio de grau menor ou igual a n é uma combinação linear dos monômios de B. Por outro lado o conjunto B é linearmente independente. Com efeito, sejam $a_0, a_1, \ldots a_n$ números reais, tais que a combinação linear $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ representa o vetor nulo em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, isto é

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0 \tag{4.60}$$

para todo t em $\mathbb{R}$. Consideremos a função polinomial p definida por

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4.61}$$

A eq. (4.60) implica que todas as derivadas de p são identicamente nulas. Por outro lado, o valor da k-ésima derivada de p em $t = 0$ é dado por

$$p^{(k)}(0) = k! a_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

(onde $p^{(0)}(t) = p(t)$). Logo, $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Concluimos que B é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Exemplo 4.38. Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de *todos* os polinômios de uma variável real com coeficientes reais. O subconjunto B de *todos* os monômios,

$$B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\},$$

é uma base de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Esta base contem uma infinidade de vetores. Não existe uma *base finita* em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

É possivel mostrar a seguinte proposição.

Proposição 4.11. Todo espaço vetorial tem uma base.

No entanto, nessas aulas vamos nos limitar aos espaços vetoriais gerados por conjuntos finitos de vetores.

4.3 Espaços gerados por subconjuntos finitos

O conceito de um subconjunto S de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ que gera $\mathcal{V}$ foi introduzido na Definição 3.14. Consideremos agora o caso particular quando um espaço vetorial é gerado por um subconjunto finito. Vamos mostrar, que nesse caso sempre existe uma base finita do espaço vetorial. Mas antes disso, supondo que temos *dada* uma base finita, vamos estabelecer uma propriedade umportante da base.

4.3.1 Base finita. Unicidade da representação

Teorema 4.8. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e seja $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$. Então cada vetor $\mathbf{x}$ de $\mathcal{V}$ possui uma, e somente uma, representação de x por uma combinação linear de vetores da base,

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n. \tag{4.62}$$

Demonstração. Seja $\mathbf{x}$ um elemento de $\mathcal{V}$. Sendo B uma base de $\mathcal{V}$, existe uma representação (4.62) para $\mathbf{x}$. Seja

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n \tag{4.63}$$

uma outra representaçao para $\mathbf{x}$. Subtraindo a eq. (4.63) da eq. (4.62) obtemos

$$0_{\mathcal{V}} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n.$$

Mas a base é um conjunto de vetores linearmente independente, logo

$$\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0.$$

Então $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ e a representação (4.63) coincide com a representação (4.62). Concluimos que a representação (4.62) para $\mathbf{x}$ é única. $\square$

4.3.2 Subconjunto linearmente independente maximal

Definição 4.20. Seja S um subconjunto finito e não-vazio de um espaço vetorial $\mathcal{V}$,

$$S = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n\}.$$

Dizemos que um subconjunto S_0 de S é um **subconjunto linearmente independente maximal**, se

(i) S_0 é linearmente independente,

(ii) para todo $\mathbf{v}_j$ de S que não pertence ao conjunto S_0 a união $S_0 \cup \{\mathbf{v}_j\}$ é linearmente dependente.

Exemplo 4.39. Consideremos o subconjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0), \qquad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \qquad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1).$$

O conjunto $S_1 = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é um subconjunto linearmente independente maximal de S. Com efeito, S_1 é linearmente independente (verifique!), enquanto $S_1 \cup \{\mathbf{u}_3\}$ é linearmente dependente. No entanto, S_1 não é o único subconjunto linearmente independente maximal de S. Cada um dos conjuntos $S_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ e $S_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é um subconjunto linearmente independente maximal de S.

Proposição 4.12. Suponhamos que um subconjunto finito e linearmente dependente S de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ contem um vetor não-nulo. Denotaremos este vetor por $\mathbf{v}_1$. Então, existe um subconjunto linearmente independente maximal S_0 de S, contendo o vetor $\mathbf{v}_1$.

Demonstração. Sendo $\mathbf{v}_1$ não nulo, o conjunto $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Existem duas possibilidades:

(a) existe um $\mathbf{v}_2$ em S tal que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente independente;

(b) não existe um vetor $\mathbf{v}_2$ em S tal que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente independente.

Se (b) for válida, então $\{\mathbf{v}_1\}$ é um subconjunto linearmente independente maximal de S contendo $\mathbf{v}_1$. Mas se vale (a) existem duas possibilidades:

(a1) existe um $\mathbf{v}_3 \in S$ tal que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente;

(a2) não existe um vetor $\mathbf{v}_3 \in S$ tal que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

Como o conjunto S é finito por hipótese, repetindo esse raciocinio tantas vezes quanto for necessário, chegaremos a um subconjunto de S linearmente independente maximal. $\square$

Proposição 4.13. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $S_0 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ um subconjunto linearmente independente maximal de um subconjunto finito S de $\mathcal{V}$. Então todo vetor de S admite uma representação por uma combinação linear de vetores de S_0.

Demonstração. Para os vetores de S_0 não há o que mostrar. Seja $\mathbf{u}$ em S, mas não em S_0. Sendo S_0 um subconjunto linearmente independente maximal de S, o conjunto $S_0 \cup \{\mathbf{u}\}$ é linearmente dependente. Existe, portanto, uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ com coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$ não todos nulos que representa o vetor nulo,

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r + \beta\mathbf{u} = 0_{\mathcal{V}}. \tag{4.64}$$

O coeficiente β na combinçaão linear co certeza não é nulo, pois, se fosse, teriamos

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{v}_r = 0_{\mathcal{V}},$$

onde pelo menos um dos coeficientes não é nulo. Mas isso é impossível por ser o conjunto S_0 linearmente independente. Sendo $\beta \neq 0$, podemos resolver a eq. (4.64) em relação a $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\beta}\mathbf{v}_r.$$

□

4.3.3 Espaços gerados por subconjuntos finitos

Todo espaço gerado por um subconjunto finito possui uma base finita. Esse e o fato principal estabelecido no teorema a seguir.

Teorema 4.9. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial gerado por um subconjunto finito não-vazio S de $\mathcal{V}$. Então

(i) um subconjunto B de S é uma base de $\mathcal{V}$;

(ii) $\mathcal{V}$ tem uma base finita.

Demonstração. (i) Se $S = \{0_{\mathcal{V}}\}$, então $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Como $0_{\mathcal{V}}$ não pode ser elemento de base alguma (porque $\{0_{\mathcal{V}}\}$ é linearmente dependente), o conjunto vazio é uma base de $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Suponhamos agora que S contem pelo menos um vetor não-nulo. Existem duas possibilidades:

(a) S é linearmente independente;

(b) S é linearmente dependente.

Como S gera $\mathcal{V}$ por hipótese, se S for lineramente independente, S será uma base de $\mathcal{V}$. Se S é linearmente dependente, concluimos, usando a Proposição 4.12, que existe um subconjunto linearmente independente mamximal S_0 de S. Pela Proposição 4.13 todo vetor de S admite representação por uma combinação linear de vetores de S_0. Como S gera $\mathcal{V}$ por hipótese, cada vetor de $\mathcal{V}$ é representado por uma combinação linear de vetores de S_0. Além disso, S_0 é linearmente independente. Então, S_0 é uma base de $\mathcal{V}$.
(ii) Sendo um subconjunto do conjunto finito S a base S_0 é finita.

$\square$

4.3.4 Obtenção de uma base

Dado um conjunto finito que gera um espaço vetorial V, podemos obter uma base de V pelo método usado na demonstração do Teorema 4.9.

Exemplo 4.40. Os vetores de $\mathbb{K}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, -1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, -1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1, -1, -1, -1),$$
$$\mathbf{v}_4 = (-1, 1, 1, -1), \qquad \mathbf{v}_5 = (-1, 1, -1, 1), \qquad \mathbf{v}_6 = (-1, -1, 1, 1)$$

geram um subespaço $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^4$. Sendo $\mathbf{v}_1$ não nulo, o conjunto $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Verifica-se que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ também são linearmente independendentes. Mas a união de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ com qualquer um dos conjuntos $\{\mathbf{v}_4\}$, $\{\mathbf{v}_5\}$, $\{\mathbf{v}_6\}$ é um conjunto linearmente dependente. Logo, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um subconjunto linearmente independente maximal do conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$.

Usando o Teorema 4.9 concluimos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\mathcal{V}$.

4.3.5 O teorema da substituição

Talvez o resultado mais importante nessa aula é dado no seginte teorema.

Teorema 4.10. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial, B uma base de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n elementos e S um subconjunto linearmente independente de $\mathcal{V}$ contendo exatamente m elementos,

$$S = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\},$$

onde $m \leq n$. Então existe um subconjunto S_1 de B, contendo exatamente $n - m$ elementos, tal que $S \cup S_1$ gera $\mathcal{V}$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução em m. Se $m = 0$ então S é o conjunto vazio e $S_1 = B$. Suponhmamos que o teorema é válido para um $m < n$. Devemos mostrar que o teorema é válido para $m+1$. Sendo o teorema válido para m, existem $n-m$ vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}$ tais que $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\} \cup \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}\}$ gera $\mathcal{V}$. Existem então escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ e $\beta_1, \ldots \beta_{n-m}$ tais que

$$\mathbf{w}_{m+1} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{w}_m + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{n-m} \mathbf{v}_{n-m}. \quad (4.65)$$

Pelo menos um dos escalares $\beta_1, \ldots, \beta_{n-m}$ não é nulo. Com efeito, se todos os β_j $(j = 1, \ldots n - m)$ fossem nulos, o vetor $\mathbf{w}_{m+1}$ seria expresso por uma combinação linear dos vetores $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Mas isso é impossível, pois o conjunto $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m+1}\}$ é linearmente independente por hipótese. Após uma reenumeração, se necessário, podemos supor que $\beta_1 \neq 0$. Podemos, então resolver a eq. (4.65) em relação a $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\beta_1}\mathbf{w}_{m+1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathbf{w}_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_1}\mathbf{w}_m - \frac{\beta_2}{\beta_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\beta_{n-m}}{\beta_1}\mathbf{v}_{n-m}.$$

Seja $\mathbf{u}$ um vetor qualquer de $\mathcal{V}$. Como $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\} \cup \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}\}$ gera $\mathcal{V}$, existem escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ e $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tais que

$$\mathbf{u} = \gamma_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_m\mathbf{w}_m + \delta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \delta_{n-m}\mathbf{v}_{n-m}. \tag{4.66}$$

Substituindo a expressão (4.65) para $\mathbf{v}_1$ na eq. (4.66) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} =& \gamma_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \gamma_m\mathbf{w}_m \\
& + \delta_1\big(\frac{1}{\beta_1}\mathbf{w}_{m+1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathbf{w}_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_1}\mathbf{w}_m \\
& - \frac{\beta_2}{\beta_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\beta_{n-m}}{\beta_1}\mathbf{v}_{n-m}\big) \\
& + \delta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \delta_{n-m}\mathbf{v}_{n-m} \\
=& \left(\gamma_1 - \frac{\alpha_1\delta_1}{\beta_1}\right)\mathbf{w}_1 + \cdots + \left(\gamma_m - \frac{\alpha_m\delta_1}{\beta_1}\right)\mathbf{w}_m + \frac{\delta_1}{\beta_1}\mathbf{w}_{m+1} \\
& + \delta_2\mathbf{v}_2 \cdots + \delta_{n-m}\mathbf{v}_{n-m}.
\end{aligned}$$

Então $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m+1}\} \cup \{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}\}$ gera $\mathcal{V}$. □

Corolário 4.1. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e B uma base de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n vetores. Então todo subconjunto linearmente independente de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n vetores é uma base de $\mathcal{V}$.

Demonstração. Seja S um subconjunto linearmente independente de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n elementos. Usando o Teorema 4.10 para $m = n$ (logo, $n - m = 0$) concluimos que S gera $\mathcal{V}$. Por outro lado, S é linearmente independente por hipótese. Então, S é uma base de $\mathcal{V}$. □

Corolário 4.2. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e B uma base de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n vetores. Então

(a) todo conjunto de vetores de $\mathcal{V}$ com mais de n elementos é linearmente dependente;

(b) todo subconjunto linearmente independente de $\mathcal{V}$ tem no máximo n elementos.

Demonstração. Obviamente, é suficiente provar o item (a), porque (a) implica (b). Admitimos que existe um subconjunto S de $\mathcal{V}$

(i) contendo exatamente m elementos, onde $m > n$;

(ii) linearmente indenpendente.

Seja S_1 um subconjunto de S contendo exatamente n elementos,

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

Sendo S_1 um subconjunto de S, ele é linearmente independente. Pelo Corolário (4.1) S_1 é uma base de $\mathcal{V}$. Seja $\mathbf{u}$ um vetor de S que não pertence a S_1. Sendo S_1 uma base de $\mathcal{V}$, existem n escalares, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tais que

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n. \tag{4.67}$$

Então $S_1 \cup \{\mathbf{u}\}$ é linearmente dependente porque

$$\mathbf{u} - \alpha_1\mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_n\mathbf{v}_n = 0, \tag{4.68}$$

e pelo menos um coeficiente (o coeficiente de $\mathbf{u}$) na combinação linear (4.68) é diferente de zero. Como $S_1 \cup \{\mathbf{u}\}$ é um subconjunto de S, concluimos que S é linearmente dependente! Chegamos a uma *contradição.* Concluimos que a admissão de que S é linearmente independente é incompatível com a hipótese do teorema. Logo, S é linearmente dependente. $\square$

Corolário 4.3. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e B uma base de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n elementos. Então toda base de $\mathcal{V}$ contem exatamente n elementos.

Demonstração. Suponhamos que S é uma base de V com m elementos. Sendo B uma base e S linearmente independente, vale $m \leq n$. Por outro lado, S é uma base e B é linearmente independente, portanto, $n \leq m$. Concluimos que $m = n$. $\square$

4.4 Dimensão

4.4.1 Definição e exemplos

Definição 4.21. Dizemos que um espaço vetorial $\mathcal{V}$ e de **dimensão finita** se existir uma base finita de $\mathcal{V}$. O número de elementos da base e chamado de **dimensão** de $\mathcal{V}$ e indicado por $\dim \mathcal{V}$. Se um espaço vetorial não é de dimensão finita, dizemos que ele é de **dimensão infinita**.

Exemplo 4.41. O espaço vetorial cujo único elemento é o vetor nulo é de dimensão zero.

Exemplo 4.42. Um corpo $\mathbb{K}$ é, de um modo natural, um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma base no espaço $\mathbb{K}$ contém um único elemento (este elemento pode ser qualquer elemento não-nulo de $\mathbb{K}$). Entaõ $\dim \mathbb{K} = 1$.

4.4.2 Subespaços

Teorema 4.11. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathcal{W}$ um subespaço de $\mathcal{V}$. Então, $\mathcal{W}$ é de dimensão finita e $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$. Alem disso, se $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$, então $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Demonstração. (i) Seja $\dim \mathcal{V} = n$. Se $\mathcal{W} = \{0\}$, então $\dim \mathcal{W} = 0 \leq n$. Caso contrário, $\mathcal{W}$ contém um elemento não nulo $\mathbf{v}_1$. O conjunto $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Se ele for um subconjunto linearmente independente maximal de $\mathcal{W}$, então $\{\mathbf{v}_1\}$ é uma base em $\mathcal{W}$ e $\dim \mathcal{W} = 1$. Se não, existe um vetor não-nulo $\mathbf{v}_2$ em $\mathcal{W}$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente independente. Este processo pode continuar até chegar a um subconjunto de $\mathcal{W}$ linearmente independente maximal $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, onde $k \leq n$. Com efeito, não existe por hipótese nenhum subconjunto de $\mathcal{V}$ linearmente independente e com mais de n elementos. Verifica-se (facilmente) que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é uma base em $\mathcal{W}$. Tendo uma base finita o espaço $\mathcal{W}$ é de dimensão finita. Alem disso, $\dim \mathcal{W} = k \leq n$.
(ii) Se $k = n$, então o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, que por construção, gera $\mathcal{W}$, gera também $\mathcal{V}$ por ser um conjunto linearmente independente contendo n vetores de $\mathcal{V}$. Portanto, $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. $\square$

4.5 Mudança da base

4.5.1 Base ordenada

Em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão finita $n \geq 1$ existe uma infinidade de bases. Se B e B' forem duas bases de $\mathcal{V}$, como é que as coordenadas na base B' de um dado vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ se exprimem em termos das coordenadas do mesmo vetor na base B?

Antes de mais nada, é necessário esclarecer o que será considerado uma mudança de base. De acordo com a Definição 4.19 uma *base* de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um conjunto de vetores que satisfaz duas condiçoes. Em várias situações ésta definição deixa de ser suficiente. Por esse motivo, introduzimos a noção de *base ordenada* em um espaço vetorial de dimensão finita.

Definição 4.22. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Uma **base ordenada** B de $\mathcal{V}$ é uma seqüência finita de n vetores

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n,$$

tal que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente.

Em outras palavras, uma base ordenada é uma base de $\mathcal{V}$, mas cada um dos vetores da base ordenada tem sua "posição" na base fixa: um é o "primeiro vetor da base", outro é o "segundo vetor da base", etc. Para uma base ordenada usaremos a mesma notação que usavamos para uma base, mas a ordem dos vetores agora se torna importante. Por exemplo, dado um sistema cartesiano de coordenadas no plano, temos associado a ele a base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ no espaço dos vetores no plano. Ésta base é diferente da base ordenada $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}\}$ do mesmo espaço vetorial.
Nessas aulas vamos tratar apenas espaços vetoriais de dimensão finita e, a partir de agora, vamos usar o termo "base" como um sinónimo do termo "base ordenada".

Exemplo 4.43. Uma base no espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ é formada pelos vetores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_1 = (0, 0, \ldots, 1).$$

A base ordenada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é chamada de **base canônica** de $\mathbb{K}^n$.

Definição 4.23. Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Seja $\mathbf{x}$ um vetor em $\mathcal{V}$. A seqüência finita $\{x_1, \dots, x_n\}$ dos coeficientes na representação

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$$

é chamada de seqüência das **coordenadas** de $\mathbf{x}$ na base B.

Exemplo 4.44. Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um vetor em $\mathbb{K}^2$. Da representação

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

obtemos que a seqüência das coordenadas de $\mathbf{x}$ na base canônica de $\mathbb{K}^2$ é $\{x_1, x_2\}$.

ATIV. 4.19. Ache as coordenadas do vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ na base ordenada $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, onde $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,-1)$.

4.5.2 Matriz da mudança de base

Definição 4.24. Seja $\mathcal{V}$ um espaço linear de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots \mathbf{v}'_n\}$ são duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$. Sendo B' uma base, os vetores de B são representados (de modo único) por combinações lineares dos vetores da base B',

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{v}_n,\\
\mathbf{v}'_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n2}\mathbf{v}_n,\\
&\dots\dots \\
\mathbf{v}'_n &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{v}_n.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

A matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas entradas a_{ij} são os coeficientes nas representações (4.69) será chamada **matriz da mudança de base de** B **para** B'.

As coordenadas dos vetores $\mathbf{v}'_1, \dots \mathbf{v}'_n$ na base canônica de $\mathbb{K}^n$ formam as colunas correspondentes da matriz de mudança de base A.

Teorema 4.12. Seja $\mathcal{V}$ um espaço linear de dimensão finita $n \geq 1$. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots \mathbf{v}'_n\}$ são duas bases de $\mathcal{V}$. Suponhamos que $A = (a_{ij})$ a matriz da mudança de base de B para B'. Seja $\mathbf{x}$ um vetor em $\mathcal{V}$. Suponhamos que $x_1, \dots, x_n$ e $x'_1, \dots, x'_1$ de $\mathbf{x}$ são as coordenadas de $\mathbf{x}$ nas bases B e B', correspondentemente. Então

$$x_i = a_{i1}x'_1 + \cdots + a_{in}x'_n, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.70}$$

As equações (4.70) são equivalentes à equação matricial

$$X = AX'$$

onde X e X' são matrizes-coluna (com n linhas) definidas por

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Substituindo na representação

$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{v}'_1 + \cdots + x'_n\mathbf{v}'_n \tag{4.71}$$

as representações (4.69), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x} =& x'_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + x'_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n) \\ & + \ldots \cdots + x'_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n) \\ =& (a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n)\mathbf{v}_1 + (a_{21}x'_1 + \cdots + a_{2n}x'_n)\mathbf{v}_2 \\ & + \cdots + (a_{n1}x'_1 + \cdots + a_{nn}x'_n)\mathbf{v}_n. \end{aligned} \tag{4.72}$$

O Teorema 4.8 garante que a representação do vetor $\mathbf{x}$ por uma combinação linear dos vetores da base B é única. Logo, das equações (4.71) e (4.72) obtemos (4.70). □

4.5.3 A mudança inversa

Sejam B e B' duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita $\mathcal{V}$. Se A e C são as matrizes de mudança de base de B para B' e de B' para B correspondentemente, como e que as entradas de uma dessas matrizes se exprimem em termos das entradas da outra? A resposta é dada no teorema a seguir.

Teorema 4.13. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ são duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e seja $A = (a_{ij})$ a matriz da mudança de base de B para B'. Então

(a) a matriz A é inversível;

(b) A^{-1} é a matriz de mudança de base de B' para B.

Demonstração. A matriz de mudança de base de B' para B existe, porque, sendo B uma base de $\mathcal{V}$, cada um dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$

é representado (de modo único) por uma combinação linear dos vetores da base B,

$$\mathbf{v}_j = c_{1j}\mathbf{v}'_1 + \cdots + c_{nj}\mathbf{v}'_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{v}'_i, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4.73}$$

Logo, $C = (c_{ij})$ é a matriz de mudança de base de B' para B. Sendo A a matriz de mudança de base de B para B', vale também

$$\mathbf{v}'_k = \sum_{m=1}^{n} a_{mk}\mathbf{v}_m, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{4.74}$$

Substituindo eq. (4.74) na eq. (4.73) e, depois, trocando a ordem das somas, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_j &= \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\left(\sum_{m=1}^{n} a_{mi}\mathbf{v}_m\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} c_{ij}a_{mi}\mathbf{v}_m \\ &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{mi}c_{ij}\mathbf{v}_m = \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi}c_{ij}\right)\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.8 concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{mi}c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad m = j, \\ 0 & \text{se} \quad m \neq j, \end{cases}$$

logo, $AC = I_n$. De modo análogo, substitundo eq. (4.73) na eq. (4.74) obtemos $CA = I_n$. Concluimos que A é inversível e $A^{-1} = C$. $\square$

4.6 Conclusão

Dada uma *base* de um espaço vetorial, todo vetor do espaço é representado (de modo único) por uma combinação linear de vetores da base. Quando um espaço vetorial é gerado por um conjunto finito de vetores, todas as bases deste espaço são finitas e contêm o mesmo número de elementos. Este número é a dimesão do espaço vetorial.

4.7 Glossário

base Definição 4.19.

base canônica de $\mathbb{K}^n$ Exemplo 4.44.

base ordenada Definição 4.22.

coordenadas Definição 4.23.

dimensão Definição 4.21.

matriz de mudança da base Definição 4.24.

subconjunto linearmente independente maximal Definição 4.20.

4.8 Resumo

Definimos o conceito de base em um espaço vetorial. A propriedade mais importante da base é que para todo elemento do espaço vetorial existe uma, e somente uma, representação por uma combinação linear de vetores da base. Vimos que todo espaço gerado por um conjunto finito possui uma base finita. Usando o Teorema da substituição obtemos resultados importantes sobre os espaços gerados por conjuntos finitos. Definimos dimensão para espaços gerados por conjuntos finitos e estabelçecemos as propriedades elementares da dimensão. Definimos o conceito de base odenada em um espaço vetorial. Tratamos a mudança de base em um espaço vetorial de dimensão finita.

4.9 Atividades

ATIV. 4.20. Ache a dimensão do subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{q_1, q_2, q_3\}$ definidos por

$$q_1(t) = t^2 - 1, \qquad q_2(t) = t^2 + t, \qquad q_3(t) = 2t + 1.$$

Ache uma base de $\mathcal{W}$.

ATIV. 4.21. O polinômio p definido por

$$p(t) = t^2 + t + 1$$

é um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Ache as coordenadas do polinômio p na base ordenada

$$B = \{f_1, f_2, f_3\}$$

de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sendo f_1, f_2, f_3 definidos por

$$f_1(t) = 2t + 1, \qquad f_2(t) = 2t - 1, \qquad f_3(t) = t^2 + 1.$$

4.10 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer os determinantes.

4.11 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.