AULA 5

# Determinantes

**META:**

- Introduzir o conceito de determinante de uma matriz quadrada.

**OBJETIVOS**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar a regra de Cramer na resolução de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas;
- calcular o produto de duas permutações, a inversa de uma permutação, o sinal de uma permutação;
- calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ usando a definição;
- usar as propriedades elementares dos determinantes no cálculo de determinantes.

**PRÉ-REQUISITOS**

- Sistemas de equações lineares.

## 5.1 Introdução

O determinante de uma matriz quadrada $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ é um escalar (isto é, um elemento de $\mathbb{K}$) associado à matriz. Dada a regra do cálculo do determinante, temos definida uma função com valores em $\mathbb{K}$ no espaço $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. São as propriedades desta função que fazem do determinante uma ferramenta eficiente em várias áreas da Álgebra e da Geometria.

É bastante fácil definir o determinante de uma matriz $2 \times 2$. Na generalização para matrizes $n \times n$ precisaremes de algumas propriedades das permutações de $n$ objetos. Algumas das demosnstrações das propriedades aresentados nesta aula são tecnicamente complicadas. No entando, do ponto de vista dos nossos objetivos nessas aulas, a teoria de permutações é algo periférico. Um conhecimento das demosntrações é desejável, mas, pelo menos no início, para acompanhar o desenvolvimento da teoria dos determinantes é suficiente ter conhecimento sobre alguns resultados da teoria das permutações. Estes resultados são usados, em particular, na demonstração das propriedades elementares dos determinantes no final da aula.

## 5.2 Determinantes de matrizes $2 \times 2$

### 5.2.1 Definição e exemplos

Consideremos um sistema linear de duas equações com duas incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x & +a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x & +a_{22}y & = b_2 \end{cases} . \tag{5.75}$$

As soluções do sistema (5.75) (se existirem) podemos encontrar, por exemplo, pelo método de Gauss. Mas podemos usar um outro método também. Multiplicando a primeira equação do sistema (5.75) por $a_{22}$ e a segunda por $a_{12}$, obtemos

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x & +a_{12}a_{22}y & = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x & +a_{12}a_{22}y & = b_2a_{12} \end{cases}. \tag{5.76}$$

Subtraindo a segunda equação do sistema (5.76) da primeira conseguimos eliminar a variável $y$:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \tag{5.77}$$

e, se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, obtemos

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{5.78}$$

Um cálculo análogo mostra que

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \tag{5.79}$$

Logo, se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{5.80}$$

Então, se

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0, \tag{5.81}$$

a única solução do sistema (5.76) é dada pelas equações (5.79) e (5.80). Uma verificaçaõ direta pelo método de Gauss mostra que, se a condição (5.81) for satisfeita, esta é a única solução do sistema (5.75) também. Concluimos que, se a condição (5.81) é satisfeita, então

(i) existe uma solução do sistema (5.75);

(ii) esta solução é única;

(iii) a solução é dada pelas equações (5.78) e (5.80).

O denominador em cada um dos segundos membros das equações (5.78) e (5.80) é um escalar determinado pelas entradas da matriz do sistema.

**Definição 5.25.** O **determinante** de uma matriz $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é um escalar denotado por $\det A$ e dado por

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{5.82}$$

O determinante frequentemente é denotado também pela tabela das entradas da matriz, delimitada por barras,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

### 5.2.2 A regra de Cramer

As equações (5.78) e (5.80) podemos escrever na forma

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{12} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, \qquad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Essas fórmulas exprimem **a regra de Cramer** para um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.

### 5.2.3 Determinantes e permutações

Uma descrição do determinante (5.82) pode ser dada em termos de funções que “permutam” os números 1 e 2.
Seja $\sigma_1$ uma função definida no conjunto $\{1, 2\}$ pelas equações

$$\sigma_1 = 2, \qquad \sigma(2) = 1.$$

A função $\sigma_1$ é uma *permutação* dos números 1 e 2 ou, seja, ela faz apénas uma troca de ordem dos números 1 e 2, tranformando a seqüência

$$1, 2 \tag{5.83}$$

para a seqüência

$$2, 1. \tag{5.84}$$

Obviamente, as seqüências (5.83) e (5.84) representam todas as maneiras de enumerar dois objetos (na seqüência (5.83) o número 1 esá no primeiro lugar e 2 no segundo, enquanto na seqüência (5.83) o número 1 esá no primeiro lugar e 2 no segundo). À seqüência (5.84) temos associado a permutação $\sigma_1$, enquanto à seqüência (5.83) associamos a permutação $e$ definida por

$$e(1) = 1, \qquad e(2) = 2.$$

Denotaremos por $S_2$ o conjunto das permutações de 1 e 2,

$$S_2 = \{e, \sigma_1\}.$$

Além disso, vamos atribuir a cada permutação $\sigma$ de $S_2$ um *sinal*, pondo

$$\epsilon(e) = 1, \qquad \epsilon(\sigma_1) = -1.$$

A eq. (5.81) pode ser escrita na forma

$$\det A = \epsilon(e) a_{1\,e(1)} a_{2\,e(2)} + \epsilon(\sigma_1) a_{1\,\sigma_1(1)} a_{2\,\sigma_1(2)}.$$

Então, o determinante de uma matriz $2 \times 2$ é uma "soma sobre todas as permutações de dois números":

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \epsilon(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)}.$$

Para definir o determinante de uma matriz $n \times n$ usaremos permutações de $n$ números.

## 5.3 Permutações de $n$ objetos

### 5.3.1 Definição

Consideremos as permutações de $n$ objetos. Sem perda de generalidade admitimos que esses objetos são os $n$ primeiros números inteiros.

**Definição 5.26.** Uma **permutação** do conjunto $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma aplicação

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

tal que $i \neq j$ implica $\sigma(i) \neq \sigma(j)$.

Seja $\sigma$ uma permutação de $n$ elementos. Verifica-se que

(i) todo número $j$ de $J_n$ é a imagem $\sigma(i)$ de algum número $i \in J_n$;

(ii) todo número $j$ de $J_n$ é a imagem $\sigma(i)$ de no máximo um número $i \in J_n$.

**Notação**

Denotaremos por $S_n$ o conjunto de todas as permutações de $n$ objetos. Uma permutação $\sigma \in S_n$ denotaremos por uma tabela de duas linhas. Escrevemos na primeira linha os números do conjunto $J_n$ (em ordem arbirária). Abaixo de cada um desses números escrevemos a imagem dele sob $\sigma$, por exemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Esta notação é bastante parecida com a notação usada para as matrizes $2 \times n$ e precisa tomar cuidado para não confundir os dois tipos de objetos!

**Exemplo 5.45.** Seja

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.85}$$

Então $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$. A ordem dos números na primeira linha de (5.85) é arbitrária: podemos escrever, por exemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 5.3.2 Propriedades

**Composição de permutações**

Toda permutação de $n$ elementos é uma aplicação de $J_n$ sobre $J_n$. Então, dadas duas permutações de $n$ elementos $\sigma$ e $\tau$, existem as aplicações compostas $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$. Verifica-se que

(i) a composição de duas permutações é uma permutação,

(ii) a composição de permutações não e comutativa: geralmente $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

**Exemplo 5.46.** Sejam

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau(1) &= \sigma(2) = 2 \\ \sigma \circ \tau(2) &= \sigma(3) = 4 \\ \sigma \circ \tau(3) &= \sigma(4) = 1 \\ \sigma \circ \tau(4) &= \sigma(1) = 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo análogo mostra que

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

logo, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

**Permutação identidade**

A permutação identidade (de $n$ objetos) é dada por

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n) \end{pmatrix} \tag{5.86}$$

Qualquer que seja $\sigma \in S_n$ vale

$$e \circ \sigma = \sigma \circ e = \sigma. \tag{5.87}$$

A permutação $e$ definida pela eq. (5.86) é a única permutação em $S_n$ que satisfaz (5.87).

### Permutação inversa

Seja $\sigma$ em $S_n$. A permutação inversa de $\sigma$ é denotada por $\sigma^{-1}$ e satisfaz

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = e. \tag{5.88}$$

Verifica-se que a permutação

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

é a única permutação que satisfaz a eq. (5.88).

**Exemplo 5.47.** A inversa da permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

é a permutação

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

### O número de todas as permutações de $n$ objetos

**Proposição 5.14.** O número das permutações de $n$ elementos é igual a $n!$.

*Demonstração.* A prova é feita por indução. Para $n = 2$ o número de permutações é igual a $2 = 2!$. Admitimos que a proposição é verdadeira para $n = k$. Consideremos as permutações de $k + 1$ elementos. Estes últimos podemos dividir em dois conjuntos disjuntos:

- o conjunto $A$ de todas as permutações $\sigma$ de $k + 1$ elementos tais que $\sigma(k + 1) = k + 1$;

- o conjunto $B$ de todas as permutações $\sigma$ de $k+1$ elementos tais que $\sigma(k+1) \neq k+1$.

O conjunto $A$ contem exatamente $k!$ permutações (por se tratar de permutações que afetam apenas os $k$ primeiros elementos). O conjunto $B$ podemos dividir em conjuntos disjuntos. Seja $B_j$ o conjunto das permutaçoes $\sigma$ tais que $\sigma(j) = k+1$. Então $B = B_1 \cup \ldots B_k$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Cada um dos conjuntos $B_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ contem $k!$ elementos. Com efeito, toda permutação $\tau$ do conjunto $B_j$ e representada (de modo único) na forma

$$\tau = \sigma \circ \tau_j, \tag{5.89}$$

onde $\sigma$ é uma permutação do conjunto $A$ e $\tau_j$ é a seguinte permutação do conjunto $B_j$:

$$\tau_j = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & k & k+1 \\ 1 & \ldots & j-1 & k+1 & j+1 & \ldots & k & j \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, toda permutaçaõ $\tau$ que pode ser representada na forma (5.89) é de $B_j$. Logo o número de permutaçoes em $B_j$ é igual ao número de permutações contidas em $A$. Então, o número de permutações de $k+1$ objetos é igual a $k!+k\cdot(k!) = (k+1)!$. $\square$

### 5.3.3 Sinal

#### Inversões

Seja $P$ o conjunto de todos os pares $(ij)$ de números inteiros satisfazendo $1 \leq i < j \leq n$. Dizemos que na permutação $\sigma \in S_n$ o par $(ij) \in P$ está em **inversão** se $\sigma(i) > \sigma(j)$. Denotaremos por $P_\sigma^-$ o **número de inversões** na permutação $\sigma$, isto é, o número das pares de $P$ que na permutação $\sigma$ estão em inversão. O conjunõ de pares de $P$ que não estão em inversão na permutação $\sigma$ denotaremos por $P_\sigma^+$. Os conjuntos $P_\sigma^-$ e $P_\sigma^+$ são disjuntos e $P_\sigma^+ \cup P_\sigma^- = P$.

**Exemplo 5.48.** Na permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

os sequintes pares estão em inversão: (12), (24), (34). Logo, o número de inversões de $\sigma$ é igual a 3.

### Sinal de uma permutação

**Definição 5.27.** Definimos o **sinal** $\epsilon(\sigma)$ de uma permutação $\sigma$ do conjunto $S_n$ por

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^m,$$

onde $m$ é o número de inversões na permutação $\sigma$.

### Um método de cálculo do sinal

Consideremos o produto

$$\begin{aligned}\Delta_\sigma = \prod_{(ij)\in P} [\sigma(i) - \sigma(j)] &= [\sigma(1) - \sigma(2)] \dots [\sigma(1) - \sigma(n)] \\ &\times [\sigma(2) - \sigma(3)] \dots [\sigma(2) - \sigma(n)] \dots [\sigma(n-1) - \sigma(n)]\,.\end{aligned} \tag{5.90}$$

Ele não se anula, porque, pela Definição (5.26), $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ se $i \neq j$ e, por outro lado, para todo $(ij) \in P$ vale $i < j$. Podemos fazer um agrupamento,

$$\Delta_\sigma = \prod_{(ij)\in P} [\sigma(i) - \sigma(j)] = \prod_{(ij)\in P_\sigma^+} [\sigma(i) - \sigma(j)] \prod_{(kl)\in P_\sigma^-} [\sigma(k) - \sigma(l)]$$

e depois escrever o produto na forma

$$\begin{aligned}\Delta_\sigma &= \prod_{(ij)\in P} [\sigma(i) - \sigma(j)] \\ &= \prod_{(ij)\in P_\sigma^+} [\sigma(i) - \sigma(j)] \, (-1)^m \prod_{(kl)\in P_\sigma^-} [\sigma(l) - \sigma(k)] \, , \qquad (5.91)\end{aligned}$$

onde $m$ é o número de pares no subconjunto $P_\sigma^-$, isto é, o número de inversões de $\sigma$. O produto

$$\prod_{(ij)\in P} [\sigma(i) - \sigma(j)] = \prod_{(ij)\in P_\sigma^+} [\sigma(i) - \sigma(j)] \prod_{(kl)\in P_\sigma^-} [\sigma(l) - \sigma(k)] \qquad (5.92)$$

contem os mesmos fatores como

$$\Delta_e = \prod_{(ij)\in P} (i - j). \qquad (5.93)$$

Com efeito, dado $(ij) \in P$, existem dois inteiros distintos $r, s \in J_n$ tais que

$$\sigma(r) = i, \qquad \sigma(s) = j.$$

Como $i < j$ (porque $(ij) \in P$), se $r < s$ então $(rs) \in P_\sigma^+$ e o fator $i - j = \sigma(r) - \sigma(s)$ está contido no produto

$$\prod_{(ij)\in P_\sigma^+} [\sigma(i) - \sigma(j)] \, .$$

Se $r > s$ então $(rs) \in P_\sigma^-$ e o fator $i - j = \sigma(r) - \sigma(s)$ está contido no produto

$$\prod_{(kl)\in P_\sigma^-} [\sigma(l) - \sigma(k)] \, .$$

Nos ambos os casos o fator $(i - j)$ encontramos no produto (5.92) e o encontramos uma única vez. Sendo $P_\sigma^+ \cup P_\sigma^- = P$, os produtos (5.92) e (5.93) contem o mesmo número de fatores. Então, estes produtos são iguais e, usando a eq. (5.91) e a definição do sinal da permutação, obtemos

$$\Delta_\sigma = \epsilon(\sigma)\Delta_e. \tag{5.94}$$

Calculando $\Delta_e$ e $\Delta_\sigma$ podemos determinar $\epsilon(\sigma)$ dessa equação.

**Exemplo 5.49.** Determinaremos o sinal da permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontramos

$$\Delta_e = (1-2)(1-3)(1-4)(2-3)(2-4)(3-4) = 12,$$
$$\Delta_\sigma = (3-1)(3-4)(3-2)(1-4)(1-2)(4-2) = -12$$

Então, $\epsilon(\sigma) = -1$.

**Teorema 5.14.** Sejam $\sigma$ e $\tau$ permutações de $n$ objetos. Então

$$\epsilon(\sigma \circ \tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau).$$

*Demonstração.* Sejam $\sigma, \tau \in S_n$. Da eq. (5.94) obtemos

$$\Delta_{\sigma\circ\tau} = \epsilon(\sigma \circ \tau)\Delta_e.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\sigma\circ\tau} = & \prod_{(ij)\in P} [\sigma\circ\tau(i) - \sigma\circ\tau(j)] \\
= & \prod_{(kl)\in P_\tau^+} [\sigma\circ\tau(k) - \sigma\circ\tau(l)] \prod_{(rs)\in P_\tau^-} [\sigma\circ\tau(r) - \sigma\circ\tau(s)] \\
= & \prod_{(kl)\in P_\tau^+} [\sigma\circ\tau(k) - \sigma\circ\tau(l)]\, \epsilon(\tau) \prod_{(rs)\in P_\tau^-} [\sigma\circ\tau(s) - \sigma\circ\tau(r)] \\
= & \epsilon(\tau) \prod_{(ij)\in P} [\sigma(i) - \sigma(j)] \\
= & \epsilon(\tau) \left\{ \prod_{(kl)\in P_\sigma^+} [\sigma(k) - \sigma(l)] \prod_{(rs)\in P_\sigma^-} [\sigma(r) - \sigma(s)] \right\} \\
= & \epsilon(\tau) \left\{ \prod_{(kl)\in P_\sigma^+} [\sigma(k) - \sigma(l)]\, \epsilon\sigma \prod_{(rs)\in P_\sigma^-} [\sigma(s) - \sigma(r)] \right\} \\
= & \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\Delta_e.
\end{aligned}
$$

Logo, $\epsilon(\sigma\circ\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$. □

**Corolário 5.4.** Seja $\sigma$ uma permutação. Então

$$\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma). \tag{5.95}$$

*Demonstração.*

$$\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma\circ\sigma^{-1}) = \epsilon(e) = 1 \Rightarrow \epsilon(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\epsilon(\sigma)}.$$

Sendo $\epsilon(\sigma) = \pm 1$, concluimos que vale (5.95). □

O resultado obtido no Teorema 5.14 podemos generalizar para qualquer composição finita de permutações.

**Corolário 5.5.** Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ permutações em $S_n$. Então

$$\epsilon(\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_m) = \epsilon(\sigma_1)\dots\epsilon(\sigma_m).$$

**ATIV. 5.22.** Prove (por indução) o Corolário 5.5.

### 5.3.4 Transposições

**Definição 5.28.** Uma transposição é uma permutação que troca as posições apenas apenas de dois numeros mantendo as posições dos demais.

**Exemplo 5.50.** A permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

é uma transposição.

**ATIV. 5.23.** Para toda transposição $\tau$ vale $\tau^{-1} = \tau$.

**ATIV. 5.24.** Para toda transposição $\tau$ vale $\epsilon(\tau) = -1$.

**Teorema 5.15.** Toda permutaçaõ é uma composição de transposições.

*Demonstração.* A prova é feita por indução. Para $n = 2$ o teorema é obviamente válido. Suponhamos que o teorema é válido para $n = k$ e seja $\sigma \in S_{k+1}$. Existem duas possibilidades:

(a) $\sigma(k+1) = k+1$;

(b) $\sigma(k+1) \neq k+1$.

Se vale (a), então $\sigma$ é uma permutação de $k$ números apenas (porque $k+1$ é fixo). Sendo o teorema válido para permutações de $k$ números, $\sigma$ é uma composição de transposições. Se vale (b), seja $\tau$ a transposição que troca $k+1$ por $\sigma(k+1)$ mantendo as posições dos outros números de $J_{k+1}$:

$$\tau(j) = \begin{cases} \sigma(k+1) & \text{se} \quad j = k+1, \\ k+1 & \text{se} \quad j = \sigma(k+1), \\ j & \text{se} \quad j \neq k+1 \text{ e } j \neq \sigma(k+1). \end{cases}$$

Para a permutação $\rho = \tau \circ \sigma$ obtemos $\tau \circ \sigma(k+1) = \tau(\sigma(k+1)) = k+1$. Logo, para $\rho$ vale (a). Portanto, $\rho$ é uma composição de transposições. Mas $\sigma = \tau^{-1} \circ \rho = \tau \circ \rho$. Sendo $\tau$ uma transposição e $\rho$ uma composição de transposições, $\sigma$ também é uma composição de transposições. $\square$

## 5.4 Determinantes de matrizes $n \times n$

### 5.4.1 Definição e exemplos

**Definição 5.29.** O determinante de uma matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é um escalar denotado por $\det A$ e dado por

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{5.96}$$

A soma no segundo membro da eq. (5.96) é sobre todas as permutações de $n$ números. Como $S_n$ contem $n!$ permutações, a soma contem $n!$ termos.

Cada um dos termos contem uma (e somente uma) entrada de cada linha da matriz e uma (e somente uma) entrada de cada coluna de $A$.

Para um determinante de ordem 3 ($n = 3$) a soma contem seis termos.

**Exemplo 5.51.** O determinante de uma matriz $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{33} \end{pmatrix}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{5.97}$$

**ATIV. 5.25.** Use a fórmula (5.97) para calcular o determinante

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Resposta: 28.

Alem do símbolo $\det A$, o determinante é denotado também pela tabela das entradas da matriz $A$ delimitada por barras,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Exemplo 5.52.**

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 4{\cdot}2{\cdot}7 + 1{\cdot}(-1){\cdot}5 + 3{\cdot}0{\cdot}6 - 4{\cdot}(-1){\cdot}6 - 1{\cdot}0{\cdot}7 - 3{\cdot}2{\cdot}5 = 45.$$

## 5.5 Propriedades elementares dos determinantes

**Proposição 5.15.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e sejam $\sigma$ e $\rho$ duas permutações de $n$ números. Então

$$a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{\rho(1)\,\sigma\circ\rho(1)} \dots a_{\rho(n)\,\sigma\circ\rho(n)}. \tag{5.98}$$

*Demonstração.* Antes de mais nada, toda entrada da matriz $A$ está contida em cada um dos produtos no máximo uma vez. Com efeito, nenhum dos produtos contem duas entradas de uma linha da matriz.

Mostraremos que toda entrada $a_{\rho(k)\,\sigma\circ\rho(k)}$ $(k = 1, \dots n)$ do segundo produto está contida no primeiro produto também. Sendo $\rho$ uma permutação, $\rho(k) = i$ é um inteiro tal que $1 \leq i \leq n$, logo $a_{\rho(k)\,\sigma\circ\rho(k)} = a_{i\sigma(i)}$. Mas todas as entradas $a_{i\sigma(i)}$ estão contidas no primeiro produto.

De modo análogo, toda entrada contida no primeiro produto está contida no segundo. Com efeito, para qualquer entrada $a_{i\sigma(i)}$ do primeiro produto existe um $k$ $(1 \leq k \leq n)$ tal que $i = \rho(k)$, logo $a_{i\sigma(i)} = a_{\rho(k)\,\sigma\circ\rho(k)}$. Mas toda entrada $a_{\rho(k)\,\sigma\circ\rho(k)}$ está contida no segundo produto.

Concluimos que toda entrada do segundo produto está contida uma única vez no primeiro e *vice versa*. Como a multiplicação de escalares é comutativa, vale (5.98). □

Usaremos a Proposição 5.15 para provar algumas propriedades dos determinantes. Assumimos que $A$ é uma matriz $n \times n$.

**(a) Determinante da matriz transposta $A^t$**

**Teorema 5.16.** O determinante da matriz transposta de $A$ é igual ao determinante de $A$.

*Demonstração.* Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. As entradas da matriz transposta $A^t$ são dadas por $[A^t]_{ij} = a_{ji}$. Então

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)[A^t]_{1\sigma(1)}[A^t]_{2\sigma(2)} \dots [A^t]_{n\sigma(n)} \tag{5.99}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}. \tag{5.100}$$

Pela Proposição 5.15 vale

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} = \epsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

e, pondo $\sigma = \rho^{-1}$ na eq. (5.100), obtemos

$$\det A^t = \sum_{\rho^{-1} \in S_n} \epsilon(\rho^{-1}) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)}.$$

Mas "$\rho^{-1}$ percorre todas as permutações de $S_n$" é equivalente a "$\rho$ percorre todas as permutações de $S_n$". Alem disso, pelo Corolário 5.4,

$$\epsilon(\rho^{-1}) = \epsilon(\rho).$$

Logo,

$$\det A^t = \sum_{\rho \in S_n} \epsilon(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A.$$

□

**(b) Determinante de uma matriz com uma linha de zeros**

**Teorema 5.17.** Se todas as entradas de uma dada linha de uma matriz $A$ são iguais a zero, então $\det A = 0$.

*Demonstração.* Seja $i \in J_n$ fixo e suponhamos que $a_{ij} = 0$ para todo $j \in J_n$. Logo,

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{i-1\,\sigma(i-1)}\, 0\, a_{i+1\,\sigma(i+1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = 0.\end{aligned}$$

□

### (c) Determinante da matriz obtida da matriz $A$ por uma troca de duas linhas

**Teorema 5.18.** Suponhamos que a matriz $B$ é obtida por uma troca de duas linhas da matriz quadrada $A$. Então $\det B = -\det A$.

*Demonstração.* Sejam $k, l$ dois inteiros, $1 \leq k < l \leq n$. Suponhamos que a matriz $B$ é obtida pela troca da $k$-ésima e da $l$-ésima linha da matriz $A$:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ln} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.101}$$

Denotaremos por $b_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots n)$ as entradas da matriz $B$. Da eq. (5.101) obtemos

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad i \neq k,\, i \neq l \\ a_{lj} & \text{se} \quad i = k \\ a_{kj} & \text{se} \quad i = l \end{cases}$$

Então, $b_{ij} = a_{\tau(i)\,j}$ onde $\tau$ é a transposção

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ 1 & \dots & l & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Usando a Proposição 5.15 obtemos

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \dots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma\circ\tau(1)} \dots a_{n\sigma\circ\tau(n)}. \end{aligned}$$

Pondo $\sigma = \rho \circ \tau$ ($\Rightarrow \rho = \sigma \circ \tau$), obtemos

$$B = \sum_{\rho\circ\tau \in S_n} \epsilon(\rho \circ \tau) a_{1\rho(1)} \dots a_{n\rho(n)}.$$

Como "$\rho \circ \tau$ percorre todas as permutações de $S_n$" é equivalente a "$\rho$ percorre todas as peormutações de $S_n$" e, por outro lado, $\epsilon(\rho \circ \tau) = \epsilon(\rho)\epsilon(\tau) = -\epsilon(\rho)$, obtemos

$$B = -\sum_{\rho \in S_n} \epsilon(\rho) a_{1\rho(1)} \dots a_{n\rho(n)} = -\det A.$$

□

**(d) Determinante da matriz obtida da matriz $A$ por uma troca de duas colunas**

**Corolário 5.6.** Se uma matriz $A$ é obtida por uma troca de duas colunas de uma matriz quadrada $A$, então $\det B = -\det A$.

*Demonstração.* Se $B$ é obtida de $A$ por uma troca de colunas, então $B^t$ é obtida de $A^t$ por uma troca de linhas, portanto, fazendo uso dos Teoremas 5.16 e 5.18, obtemos

$$\det B = \det B^t = -\det A^t = -\det A.$$

□

### (e) Determinante de uma matriz com duas linhas iguais

**Teorema 5.19.** Se duas linhas de uma matriz quadrada $A$ são iguais, então $\det A = 0$.

*Demonstração.* Sejam $k, l \in J_n$ e $A$ uma matriz $n \times n$ tal que $a_{kj} = a_{lj}$ para $j = 1, \ldots n$. Como a $k$-ésima e a $l$-ésima linha da matriz são iguais, uma troca dessas resulta na mesma matriz. Mas, pelo teorema anterior uma troca de linhas altera o sinal do determinante. Logo,

$$\det A = -\det A,$$

donde $\det A = 0$. $\square$

### (f) Determinante da matriz obtida por multiplicação de uma das linhas de $A$ por um escalar

**Teorema 5.20.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e seja $B$ a matriz obtida por multiplicação de uma das linhas de $A$ por um escalar $\alpha$. Então $\det B = \alpha \det A$.

*Demonstração.*

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,n} \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \dots & \alpha a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1,\sigma(k-1)} \left[\alpha a_{k\sigma(k)}\right] a_{k+1,\sigma(k+1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \alpha \det A.$$

□

## (g) Determinante da matriz obtida por multiplicação de uma das colunas de $A$ por um escalar

**Corolário 5.7.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e seja $B$ a matriz obtida por multiplicação de uma das colunas de $A$ por um escalar $\alpha$. Então $\det B = \alpha \det A$.

*Demonstração.* Multiplicação por $\alpha$ de uma das colunas de $A$ é equivalente à multiplicação de uma da linhas de $A^t$ pelo mesmo escalar. fazendo uso dos Teoremas 5.16 e 5.20, obtemos

$$\det B = \det B^t = \alpha \det A^t = \alpha \det A.$$

□

**(h) Representando as entradas de uma das linhas da matriz $A$ por somas**

**Teorema 5.21.** Seja $k \in J_n$ e seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Suponhamos que $a_{kj} = b_j + c_j$. Então

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 + c_1 & \dots & b_n + c_n \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ c_1 & \dots & c_n \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1,\sigma(k-1)} \left[ b_{\sigma k} + c_{\sigma(k)} \right] \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1,\sigma(k-1)} b_{\sigma k} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1,\sigma(k-1)} c_{\sigma k} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ c_1 & \dots & c_n \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

**(i) Representando as entradas de uma das colunas da matriz $A$ por somas**

**Corolário 5.8.** Seja $k \in J_n$ e seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Suponhamos que $a_{ik} = b_i + c_i$. Então

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 + c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 + c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n + c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Demonstração.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1+c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2+c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n+c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

## 5.6 Conclusão

O determinante de uma matriz $n \times n$ é um escalar. Ele e dado por uma soma de $n!$ termos. Cada termo na soma é um produto de $n$ entradas da matriz, multiplicado pelo sinal de uma permutação. Cada termo contem exatamente uma entrada de cada linha e exatamente uma entrada de cada coluna da matriz.

## 5.7 Resumo

Obtemos a regra de Cramer para sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas. Vimos que a regra é aplicável se, e somente se, o determinante da matriz do sistema é diferente de zero. Com o intúito de generalizar o conceito do determinante para matrizes $n \times n$, definimos as permutações de $n$ objetos e provamos várias proposiçoes sobre as permutações. Apresentamos a definição do determinante de uma matriz $n \times n$. Provamos algumas propriedades elementares dos determinantes.

## 5.8 Atividades

**ATIV. 5.26.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $6 \times 6$. Determine o sinal com o qual entra no determinante o produto dado.

(a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ (b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

**ATIV. 5.27.** Calcule os determinantes.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 3 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}.$$

## 5.9 Glossário

**determinante de uma matriz** $n \times n$ Definição 5.29.

**permutação** Definição 5.26.

**sinal de uma permutação** Definição 5.27.

**transposição** Definição 5.28.

## 5.10 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer algumas propriedades e aplicações dos determinantes.

## 5.11 Referências

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.