6

AULA

Propriedades e aplicações dos determinantes

METAS

- Introduzir as expansões do determinante segundo uma linha ou uma coluna da matriz.
- Interpretar o determinante como valor de uma função das colunas da matriz.
- Apresentar aplicações do determinante.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- calcular determinantes usando as expansões segundo uma linha (ou coluna) da matriz;
- determinar se uma dada matriz quadrada tem inversa e calcular a inversa quando ela existe;
- usar a regra de Cramer na resolução de sistemas lineares de n equações com n incógnitas.

PRÉ-REQUISITOS

- Sistemas de equações lineares.
- Espaços vetoriais.
- Determinantes.

6.1 Introdução

Nesta aula concluiremos o estudo dos determinantes iniciado na aula passada. Primeiro, usando o determinante vamos definir uma função de n variáveis vetoriais. Usanremos as propriedades dessa função para provar um resultado importante sobre o determinante do produto de duas matrizes quadradas, como, também, a regra de Cramer para sistemas lineares de n equações com n incógnitas.

O segundo tema da aula são as expansões do determinante segundo uma linha ou uma coluna da matriz. Sendo casos particulares de expansões mais gerais descobertas por Laplace, elas são ferramentas teóricas eficientes. Também são úteis quando é necessário calcular o valor de um determinante.

6.2 O determinante como uma função das colunas da matriz

Pondo em correspondência a cada matriz $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ o determinante da matriz, definimos uma aplicação (uma função) do espaço vetorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no corpo dos escalares. Podemos usar o determinante para definir outras aplicações. Em particular, podemos definir uma função com valores em $\mathbb{K}$ de n variáveis vetorias.

Seja $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ uma sequência finita (com n elementos) de vetores em $\mathbb{K}^n$. Indicaremos por v_{ij} a i-ésima coordenada (na base canônica) do vetor $\mathbf{v}_j$, isto é,

$$\mathbf{v}_j = (v_{1j}, v_{2j}, \ldots, v_{nj}), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Seja D uma função de n vetores definida por

$$D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6.102}$$

Lendo esta equação no sentido contrário,

$$\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix} = D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \tag{6.103}$$

obtemos que o determinante de uma matriz $n \times n$ é igual ao valor da função D sobre "as colunas da matriz". Com efeito, as coordenadas do vetor $\mathbf{v}_j$ na eq. (6.103) são iguais as entradas correspondentes na j-ésima coluna da matriz.

Propriedades da função D

Proposição 6.16. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ e $\mathbf{u}$ vetores em $\mathbb{K}^n$ e α um elemento de $\mathbb{K}$. Então, para todo $k = 1, \ldots, n$,

(i) $D(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k + \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots \mathbf{v}_n)$

$= D(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots \mathbf{v}_n)$

$+ D(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots \mathbf{v}_n)$;

(ii) $D(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{k-1}, \alpha\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots \mathbf{v}_n)$

$= \alpha D(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots \mathbf{v}_n)$.

ATIV. 6.28. Use a definição da função D e os Corolários 5.8 e 5.7 para provar a Proposição 6.16.

Proposição 6.17. Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{K}^n$ e σ uma permutação em S_n. Então,

$$D(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n). \qquad (6.104)$$

Demonstração. Consideremos primeiro o caso particular quando σ é uma transposição, admitindo, sem perda de generalidade, que são trocadas as posições dos números i e j, sendo $i < j$. Pondo $\mathbf{v}_r = (v_{1r}, v_{2r}, \dots, v_{nr})$ $(r = 1, \dots, n)$ e usando o Corolário 5.8, obtemos

$$\begin{aligned}
&D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots \mathbf{v}_n) \\
&\quad = \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1i} & \dots & v_{1j} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2i} & \dots & v_{2j} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & \dots & v_{ni} & \dots & v_{nj} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad = - \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1j} & \dots & v_{1i} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2j} & \dots & v_{2i} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & \dots & v_{nj} & \dots & v_{ni} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad = -D(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_j \dots, \mathbf{v}_i \dots \mathbf{v}_n)
\end{aligned}$$

Sendo σ uma transposição, vale $\epsilon(\sigma) = -1$. Concluimos que eq. (6.104) é válida. No caso geral, quando σ não é necessariamente uma transposição, ela é, como diz o Teorema 5.15, uma composição de transposições $\sigma_1, \dots \sigma_m$,

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m.$$

Cada transposição faz uma troca de duas colunas da matriz, portanto,

$$D(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = (-1)^m D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n). \qquad (6.105)$$

Por outro lado, usando o Corolário 5.5, obtemos

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma_1) \cdot \cdots \cdot \epsilon(\sigma_m) = (-1)^m. \tag{6.106}$$

Substituindo (6.106) na eq. (6.105) obtemos a equação (6.104). $\square$

6.3 Determinante do produto de duas matrizes

Usaremos as propriedades já estabelecidas da função D para provar um resultado importante.

Teorema 6.22. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Então

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Demonstração. Indiquemos por c_{ij} a entrada de posição ij da matriz $C = AB$. O determinante da matriz C é dado por

$$\det C = D(\mathbf{c}_1, \dots \mathbf{c}_n), \tag{6.107}$$

onde

$$\mathbf{c}_j = (c_{1j}, \dots, c_{nj}) \qquad j = 1, \dots, n. \tag{6.108}$$

Pela regra de multiplicação de matrizes,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{6.109}$$

Pondo $\mathbf{a}_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})$ $(k = 1, \dots, n)$ e usando as equações (6.106) e (6.109), obtemos

$$\mathbf{c}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \mathbf{a}_k, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Substituindo esta equação na eq. (6.107) e usando a Proposição 6.16, obtemos

$$\det C = D\left(\sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1}\mathbf{a}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} b_{k_2 2}\mathbf{a}_{k}, \dots, \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_n n}\mathbf{a}_{k_n}\right)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} b_{k_1 1}b_{k_2 2}\dots b_{k_n n} D\left(\mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{a}_{k_2}, \dots, \mathbf{a}_{k_n}\right). \quad (6.110)$$

Usando a Proposição 6.17 concluimos que na soma (6.110) são diferentes de zero apenas os termos nos quais todos os números k_i são distintos. Logo, são diferentes de zero apenas os termos nos quais a seqüência finita $k_1, \dots, k_n$ é obtida da seqüência $1, \dots, n$ por uma permutação. Por outro lado, cada permutação aparece uma, e somente uma, vez. Portanto, $\det C$ é dado por

$$\det C$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\dots b_{\sigma(n)n} D\left(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}\right). \quad (6.111)$$

Aplicando a Proposição 6.17, obtemos

$$\det C = D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\right) \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\dots b_{\sigma(n)n}. \quad (6.112)$$

Substituindo

$$D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\right) = \det A$$

e

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\dots b_{\sigma(n)n} = \det B^t = \det B,$$

na eq. (6.112), obtemos $\det C = (\det A)\cdot(\det B)$. □

6.4 A regra de Cramer

Critérios de existência e unicidade de soluções de sistemas lineares admitem uma formulação em termos de determinantes. Consideremos um caso particular, mas importante, quando o número de equações no sistema e o número das incógnitas são iguais.

Teorema 6.23. Seja

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{6.113}$$

um sistema linear tal que o determinante $\det A$ do matriz do sistema $A = (a_{ij})$ é diferente de zero. Então

(a) o sistema (6.113) tem uma solução;

(b) esta solução é única;

(c) a solução é dada por

$$x_j = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{6.114}$$

Demonstração. Mostraremos primeiro a unicidade da solução. Suponhamos que $x_1, \dots, x_n$ é uma solução do sistema (6.113). Consideremos o seguinte determinante nulo (por ter a primeira coluna nula):

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n - b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicando os Corolários 5.7 e 5.8, podemos representar este determinante por uma soma,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x_2 + \dots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x_n - \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Os determinantes que multiplicam $x_2, \dots, x_n$ saõ todos nulos (porque cada um deles tem duas linhas iguais). Então,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.115}$$

O determinante multiplicando x_1 nesta equação é o determinante da matriz do sistema e não se anula por hipótese. Dividindo a eq. (6.115) por $\det A$ obtemos

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A},$$

isto é, a primeira das equações (6.114). As outras equações (6.114) podemos obter de modo análogo, partindo cada vez de uma das identidades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n - b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$j = 2, \dots, n.$$

Se existir uma solução $x_1, \dots, x_n$, ela é dada pelas equações (6.114), então, ela é única.

Mostraremos agora que (6.114) é uma solução. Denotaremos por d_j o determinante no numerador do segundo membro da eq. (6.114), isto é, o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem todas as colunas, menos a j-ésima, iguais às colunas correspondentes da matriz do sistema A, portanto os coeficientes na expansão de d_j segundo a j-ésima coluna são os cofatores A_{kj} $(k = 1, \dots, n)$ da matriz A,

$$d_j = b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}. \tag{6.116}$$

Substitundo as incógnitas no primeiro membro da i-ésima equação do sistema (6.113) pelas expressões (6.114) e, em seguida, substituindo d_j pela expansão (6.116), obtemos

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{\det A} \\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right) \\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_{ij} A_{kj}. \end{aligned}$$

Sendo a adição de escalares associativa, podemos trocar a ordem das somas obtendo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \equiv \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_{ij} A_{kj} \tag{6.117}$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_k a_{ij} A_{kj} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\left(b_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}\right). \tag{6.118}$$

Aplicando os Teoremas 6.26 e 6.27, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{se} \quad i = k, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Então, na soma em k na eq. (6.117) apenas um termo (aquele com $k = i$) é diferente de zero. Obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \frac{b_i \det A}{\det A} = b_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

isto é, o conjunto de escalares $x_1, \ldots, x_n$ definidos pela eq. (6.114) é uma solução para o sistema (6.113). □

6.5 Expansões de determinantes

6.5.1 Expansão do determinante segundo uma linha da matriz

Calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela Definição 5.29 não é a melhor estratégia, principalmente quando n é um número grande. Com efeito, o número de termos na soma (5.96) é igual a $n!$ e cresce rapidamente com o crescimento de n. No cálculo de determinantes são usadas as propriedades estabelecidas nos Teoremas 5.16-5.21, como também teoremas sobre as expansões de determinantes que apresentaremos nesta seção.

Sejam k um inteiro do conjunto J_n e $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. No segundo membro da equação que define o determinante de A,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}, \tag{6.119}$$

cada termo contem uma, e somente uma, entrada $a_{k\sigma(k)}$ da k-ésima linha. Podemos agrupar os termos contendo a_{k1}, os que contem a_{k2}, etc., obtendo

$$\det A = a_{k1} A_{k1} + \dots a_{kn} A_{kn}, \tag{6.120}$$

onde $A_{k1}, \dots, A_{kn}$ são coeficientes. Para calcular o determinante de A usando a expansão (6.120) precisamos de expressões explícitas para os coeficientes. No entanto, um resultado importante podemos obter sem tais expressões. O teorema a seguir conseguimos mostrar na base de uma observação simples: os coeficientes A_{kj} $(j = 1, \dots, n)$ não dependem das entradas da k-ésima linha da matriz A.

Propriedades e aplicações dos determinantes

Teorema 6.24. Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$, k um inteiro do conjunto J_n e $A_{k1}, \ldots, A_{kn}$ os coeficientes na representação (6.120). Se m for um inteiro do conjunto J_n e $m \neq k$, então

$$a_{m1}A_{k1} + \ldots a_{mn}A_{kn} = 0. \qquad (6.121)$$

Demonstração. Os coeficientes A_{kj} $(j = 1, \ldots n)$ não dependem das entradas da k-ésima linha da matriz A. Com efeito, cada termo da soma (6.119) contem uma, e somente uma, entrada da k-ésima linha de A. Mas as entradas da k-ésima linha da matriz A estão em evidência na expansão (6.120) do determinante. Portanto, os coeficientes $A_{k1}, \ldots, A_{kn}$ não dependem das entradas da k-ésima linha da matriz. Consideremos a matriz B obtida por uma substituição da k-ésima linha da matriz A pela m-ésima linha da mesma matriz. Ressaltamos que não se trata de uma *troca* de linhas, mas sim, de uma substituição. As entradas da matriz B são dadas por

$$[B]_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad i \neq k \\ a_{mj} & \text{se} \quad i = k \end{cases}$$

Como $k \neq m$, a matriz B tem duas linhas iguais,

$$[B]_{kj} = [B]_{mj} = a_{mj}, \qquad (6.122)$$

pelo Teorema 5.19

$$\det B = 0. \qquad (6.123)$$

Por outro lado, $\det B$ possui uma expansão segundo a k-ésima linha da matriz B com os mésmos coeficientes da expansão (6.120) da matriz A. Com efeito, estes coeficientes não dependem das entradas da k-ésima linha e todas as linhas da matriz B, menos a k-ésima, coincidem com as linhas correspondentes da matriz A. Portanto

$$\det B = [B]_{kl}A_{k1} + \cdots + [B]_{kn}A_{kn}. \qquad (6.124)$$

Substituindo as equações (6.122) e (6.123) na eq. (6.124) obtemos (6.121). $\square$

Agora vamos deduzir expressões explícitas para os coeficientes A_{ij}. Essas expressões são dadas em termos de determinantes de submatrizes de A. Uma **submatriz** de A é obtida atravez de eliminação (exclusão) de algumas linhas e algumas colunas da matriz A. Consideremos o caso particular quando são eliminadas exatamente uma linha e uma coluna da matriz.

Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e i, j inteiros do conjunto J_n. Eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna obtemos uma matriz $(n-1) \times (n-1)$,

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema 6.25. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Então os coeficientes na expansão do $\det A$ segundo a i-ésima linha da matriz A são dados por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}, \qquad (6.125)$$

onde M_{ij} é a submatriz da matriz A obtida por eliminação da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Demonstração. (a) Mostraremos primeiro que o coeficiente A_{11} na expansão (6.120) é igual a $\det M_{11}$. Os termos contendo a_{11} na soma (6.119) são aqueles nos quais a permutação σ satisfaz $\sigma(1) = 1$, isto é, σ tem a forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{6.126}$$

Denotaremos por S' o conjunto de todas as permutações em S_n da forma (6.126). Então

$$\det A = a_{11} \sum_{\sigma \in S'} \epsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \tag{6.127}$$

$$+ \,(\text{termos que não dependem de } a_{11}). \tag{6.128}$$

As permutações do conjunto S' permutam apenas $n-1$ (e não n) números porque mantem fixo o número 1. À cada permutação $\sigma \in S'$ (que e, formalmente, uma permutação de n números) podemos associar uma permutação dos $n-1$ números $2, 3, \dots n$,

$$\tau = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

O número de inversões na permutação τ é igual ao número de inversões na permutação σ. Logo, os sinais dessas permutações são iguais e podemos escrever a eq. (6.127) na forma

$$\det A = a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \epsilon(\tau) a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} \tag{6.129}$$

$$+ \,(\text{termos que não dependem de } a_{11}). \tag{6.130}$$

Então,

$$A_{11} = \sum_{\tau \in S_{n-1}} \epsilon(\tau) a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = \det M_{11},$$

onde

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ou, seja, M_{11} é a submatriz de A obtida atraves de eliminação da primeira linha e da primeira coluna da matriz A.

(b) Para determinar o coeficiente A_{ij} quando $(ij) \neq (11)$ usaremos as propriedades do determinante estabelecidas no Teorema 5.18 e no Corolário 5.6. Se $i > 1$, faremos $i-1$ trocas de linhas da matriz, até colocar a i-ésima linha em primeiro lugar. Como cada troca de linhas altera o sinal do determinante, obtemos

$$\det A = (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,i} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,i} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se $j > 1$, faremos $j - 1$ trocas de colunas, até colocar a entrada a_{ij} no canto superior esquerdo. Do Corolário 5.6 obtemos

$$\det A = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \det B, \tag{6.131}$$

onde B é a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

O coeficiente de a_{ij} na expansão do $\det B$ segundo a primeira linha da matriz B é dado pelo determinante da submatriz, obtida da matriz B atraves da exclusão da primeira linha e da primeira coluna (conforme o resultado obtido na primeira parte da demosntração). Mas essa submatriz é igual à submatriz M_{ij} obtida da matriz A atraves da exclusão da i-ésima linha e da j-ésima coluna. Logo,

$$\det B = a_{ij} \det M_{ij} + (\text{termos que não dependem de } a_{ij}). \quad (6.132)$$

Substituindo a eq. (6.132) na eq. 6.131), obtemos

$$\det A = a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij} + (\text{termos que não dependem de } a_{ij}).$$

Dessa equação e da eq. (6.120) concluimos que $A_{ij} = (-1)^{ij} \det M_{ij}$ para todos $i, j \in J_n$. $\square$

Exemplo 6.53. Usaremos a expansão segundo a primeira linha da matriz para calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Das equações (6.120) e (6.125) obtemos

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =& 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ =& 2(3\cdot 3 - 2\cdot 4) - (5\cdot 3 - 2\cdot 1) + 3(5\cdot 4 - 2\cdot 1) = 40.\end{aligned}$$

6.5.2 Expansão do determinante segundo uma coluna da matriz

Teorema 6.26. Sejam $A = (a_{kl})$ uma matriz $n \times n$ e $j \in J_n$. Então

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \tag{6.133}$$

onde os coeficientes A_{ij} $(i = 1, \ldots n)$ são dados pela eq. (6.125).

Demonstração. Do Teorema 5.16, $\det A = \det A^t$. Denotaremos por $\bar{A}_{kj}$ $(j = 1, \ldots, n)$ os coeficientes na expansão do $\det A^t$ segundo a j-ésima linha da matriz A^t,

$$\det A^t = [A^t]_{j1}\bar{A}_{j1} + \cdots + [A^t]_{kn}\bar{A}_{kn}. \tag{6.134}$$

Pelo Teorema 6.25 esses coeficientes são dados por

$$\bar{A}_{ji} = (-1)^{j+i}\det \bar{M}_{ji}, \tag{6.135}$$

onde $\bar{M}_{ji}$ é a submatriz de A^t obtida por eliminação da j-ésima linha e da i-ésima coluna da matriz A^t. Mas $\bar{M}_{ji}$ é a matriz transposta de M_{ij}, logo, pelo Teorema 5.16,

$$\bar{A}_{ji} = (-1)^{i+j}\det M_{ij} = A_{ij}. \tag{6.136}$$

Substituindo na eq. (6.134)

$$[A^t]_{ji} = [A]_{ij} = a_{ij}$$

e fazendo uso da eq. (6.136) obtemos (6.133). $\square$

Exemplo 6.54. O determinante do Exemplo 6.53 calcularemos uasando a expansão segundo a terceira coluna da matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 17 - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 40.$$

Teorema 6.27. Sejam $A = (a_{kl})$ uma matriz $n \times n$, M_{kl} a submatriz de A obtida por eliminação da k-ésima linha e da l-ésima coluna de A, $A_{kl} = (-1)^{k+l} \det M_{kl}$ e i, j dois números distintos do conjunto J_n. Então,

$$a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0.$$

A demonstração pode ser feita pelo método usado na demonstração do Teorema 6.24.

ATIV. 6.29. Prove o Teorema 6.27.

6.6 Matriz inversa

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$? E, se uma tal matriz existe como podemos encontra-la?

Uma solução do problema pode ser dada em termos dos coeficientes A_{ij}.

Definição 6.30. Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, os coeficientes A_{ij} dados pela eq. (6.125) são chamados de **cofatores** da matriz A. A matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6.137}$$

é chamada de **matriz adjunta** ou **matriz dos cofatores** da matriz A.

Exemplo 6.55. Para os cofatores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

encontramos

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -13, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 17,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Então, a matriz adjunta de A é a matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -13 & 17 \\ 9 & 3 & -7 \\ -7 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Propriedades e aplicações dos determinantes

Teorema 6.28. Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ e $\tilde{A} = (A_{ij})$ a matriz dos cofatores de A. Então

$$A\tilde{A}^t = \tilde{A}^t A = (\det A)I_n.$$

Demonstração. Fazendo uso do Teorema 6.24 e do Teorema 6.25 encontramos que a entrada de posição (ij) do produto $A\tilde{A}^t$ é dada por

$$[A\tilde{A}^t]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[\tilde{A}^t]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{se} \quad i = j, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Logo, $A\tilde{A}^t = (\det A)I_n$. De modo análogo, do Teorema 6.26 e do Teorema 6.27 decorre que

$$[\tilde{A}^t A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\tilde{A}^t]_{ik}[A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{se} \quad i = j, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Então, $\tilde{A}^t A = (\det A)I_n$. □

Teorema 6.29. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $\det A \neq 0$. Seja $\tilde{A} = (A_{ij})$ a matriz adjunta de A. Então a matriz $B = (b_{ij})$ onde

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} \tag{6.138}$$

satisfaz

$$BA = AB = I_n. \tag{6.139}$$

Demonstração. Das equações (6.138) e (6.137) obtemos

$$B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^t. \tag{6.140}$$

Do Teorema 6.28 e da eq. (6.140) decorre (6.139). □

Encontramos uma matriz inversa, mas será que ela é a única matriz inversa da matriz A? A resposta é positiva e pode ser justificada na base dos métodos desenvolvidos na próxima sub-seção. Se $\det A = 0$, a única matriz inversa de A é denotada por A^{-1}.

E, se $\det A = 0$, será que uma matriz inversa de A pode existir? Uma resposta definitiva é baseada em um teorema importante que apresentaremos sem demonstração.

Corolário 6.9. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $\det A = 0$. Então, não existe matriz inversa de A.

Demonstração. Admitimos que B é uma matriz $n \times n$ que satisfaz

$$BA = I_n. \tag{6.141}$$

Então,

$$1 = \det I_n = \det(BA) = (\det B) \cdot (\det A) = (\det B) \cdot 0 = 0.$$

Mas isto é impossível. Logo, uma matriz B que satisfaz a eq. (6.141) não existe. □

6.7 Conclusão

Na teoria dos sistemas de equações lineares o determinante é uma ferramenta eficiente.

6.8 Resumo

Definimos uma função de n variáveis vetoriais. As propriedades da função são usadas na demonstração de um teorema que trata do determinante do produto de duas matrizes quadradas. Obtemos a regra de Cramer e mostramos a existência e a unicidade da solução de um sistema linear de n equações com n incógnitas. Obtemos as expansões do determinante segundo uma linha (ou uma coluna) da matriz. Usamos a expansão segundo uma coluna da matriz na resolução do problema da matriz inversa.

6.9 Atividade

ATIV. 6.30. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 2x & -3y & +3z & = 9 \\ 3x & -5y & +z & = -4 \\ 4x & -7y & +z & = 5 \end{cases},$$

(a) mostre que o determinante da matriz do sistema é diferente de zero;

(b) use as fórmulas de Cramer para encontrar a solução do sistema.

6.10 Glossário

cofatores Definição 6.30.

matriz adjunta de uma matriz quadrada A a matriz dos cofatores de A.

6.11 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer as aplicações lineares.

6.12 Referências

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.