Aplicações lineares

7

AULA

META

- Introduzir o conceito de aplicação linear.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- determinar se uma aplicação dada é linear;
- identificar o núcleo de uma aplicação linear;
- usar o Teorema da dimensão para determinar a dimensão da imagem de uma aplicação linear.

PRÉ-REQUISITOS

- Espaços vetoriais.
- Base e dimensão.

7.1 Introdução

Iniciamos nesta aula o estudo das aplicações lineares. São aplicações de um espaço vetorial para um espaço vetorial que "respeitam" a estrutura linear presente em cada um dos espaços. A classe das aplicações lineares parece ser bastante restrita, até porque a existência de uma estrutura linear não é uma propriedade universal dos conjuntos. No entanto, métodos poderosos da Geometria e da Análise Matemática são baseados na substituição de aplicações que não são lineares por aplicações lineares. As *diferenciais* que você conhece do Cálculo servem como um um exemplo de aplicações "linearizadas". Alem de valor teórico, as aplicações desse tipo podem ter também valor prático, sendo uma fonte de aproximações.

7.2 Aplicações

Como o próprio nome diz, as aplicações lineares são, antes de mais nada, aplicações. Relembramos nessa seção as definições bem como algumas proposições sobre as aplicações.

Dados dois conjuntos, X e Y não-vazios, uma **aplicação** f **de** X **em** Y é uma regra que a cada elemento de X associa um, e somente um, elemento de Y. Escrevemos

$$f : X \to Y.$$

Exemplo 7.56. Uma função f com valores reais definida em $\mathbb{R}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Exemplo 7.57. Uma aplicação de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ em $\mathbb{K}$ definimos pela regra

$$F(A) = \det A \quad \text{para toda matriz } A \text{ em } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Domínio e contradomínio

Dizemos que o conjunto X é o **domínio** de f enquanto o conjunto Y é chamado **contradomínio** de f.

7.2.1 Tipos de aplicações

Aplicação injetora

Definição 7.31. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é uma aplicação **injetora** se para todo par de elementos x e y de X tais que $x \neq y$ vale $f(x) \neq f(y)$. Alternativamente, f é uma aplicação injetora se, e somente se, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

Exemplo 7.58. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é uma aplicação injetora. Com efeito, se $x_1^3 = x_2^3$ então $x_1 = x_2$.

Aplicação sobrejetora

Definição 7.32. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma aplicação **sobrejetora** se para cada elemento y de Y existir um elemento x de X tal que $f(x) = y$.

Exemplo 7.59. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é uma aplicação sobrejetora. Com efeito, para todo y em $\mathbb{R}$ a equação $x^3 = y$ tem uma solução em $\mathbb{R}$.

Aplicações lineares

Aplicação identidade

Seja X um conjunto não-vazio. A aplicação identidade

$$\mathrm{id} : X \to X$$

é definida por $\mathrm{id}(x) = x$ para todo x em X. A aplicação identidade id é, obviamente, injetora e sobrejetora.

7.2.2 Composição

Sejam X, Y e Z conjuntos. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicações. A **aplicação composta** $g \circ f : X \to Z$ definimos pondo

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

para todo x em X.

A composição de aplicações é associativa.

Proposição 7.18. Sejam X, Y, Z e W conjuntos e sejam $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$ aplicações. Então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demonstração. Seja x um elemento de X. Obtemos

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h\left((g \circ f)(x)\right) = h\left(g\left(f(x)\right)\right) \\ &= (h \circ g)\left(f(x)\right) = ((h \circ g) \circ f)(x).\end{aligned}$$

□

7.2.3 Aplicações invertíveis

Definição 7.33. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é **invertível** quando existe uma aplicação $g : Y \to X$ tal que

(a) $g \circ f = \mathrm{id}$ (onde id é a aplicação identidade em X);

(b) $f \circ g = \mathrm{id}$ (onde id é a aplicação identidade em Y).

Uma aplicação g que satisfaz (a) e (b) é chamada de **aplicação inversa** de f.

Suponhamos que $g : Y \to X$ é uma aplicação inversa de $f : X \to Y$. Então f é uma inversa de g como implica a Definição 7.33. Quantas inversas uma aplicação pode ter? O próximo teorema afirma que a inversa de uma aplicação, quanto ela existe, é única.

Proposição 7.19. Seja $F : X \to Y$ invertível. Então a inversa $f^{-1} : Y \to X$ é única.

Demonstração. Sejam g_1 e g_2 aplicações inversas de f. Mostraremos que $g_1 = g_2$. Com efeito,

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id} = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id} \circ g_2 = g_2.$$

□

A única inversa de uma aplicação f, quando ela existe, é denotada por f^{-1}.

Corolário 7.10. Se $f : X \to Y$ for invertível, então f^{-1} é invertível e $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Demonstração. Sendo f^{-1} a inversa de f, vale

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}\,.$$

Usando a a Definição 7.33 concluimos que f é a inversa de f^{-1}. □

Não é difícil mostrar a seguinte propriedade importante das aplicações inversívesis.

Proposição 7.20. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação invertível. Então f é injetora e sobrejetora.

Demonstração. Suponhamos que x_1 e x_2 são dois elementos de X tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então

$$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)),$$

donde $x_1 = x_2$. Concluimos que f é injetora.
Mostraremos agora que f é sobrejetora. Com efeito, o domínio de f^{-1} é, por hipótese, o conjunto Y. Portanto, a cada y em Y associamos o elemento $x = f^{-1}(y)$ do conjunto X. Então

$$f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Concluimos que cada elemento de Y e a imagem de um elemento de X. Portanto, f é sobrejetora. □

A afirmação recíproca, dada no teorema a seguir, também é verdadeira.

Proposição 7.21. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação injetora e sobrejetora. Então, f é invertível.

Demonstração. Seja y um elemento de Y. Sendo f sobrejetora, existe um x em X tal que $f(x) = y$. Sendo f injetora, este elemento é único. Definimos $g : Y \to X$ por $g(y) = x$. Então $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ para todo x em X. Também $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ para todo y em Y. □

Proposição 7.22. (a) Seja $f : X \to Y$ invertível. Então f^{-1} é invertível e $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
(b) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicações invertíveis. Então $f \circ g$ é invertível e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Demonstração. (a) Pela definição da aplicação inversa, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$. Então, pela mesma definição, f é a inversa de f^{-1}.
(b) Com efeito,

$$(f \circ g) \circ \big(g^{-1} \circ f^{-1}\big) = f \circ \big(g \circ g^{-1}\big) \circ f^{-1} = f \circ \mathrm{id} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{id},$$
$$\big(g^{-1} \circ f^{-1}\big) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ \big(f^{-1} \circ f\big) \circ g = g^{-1} \circ \mathrm{id} \circ g = g^{-1} \circ g = \mathrm{id}\,.$$

Aplicando a Definição 7.33, obtemos $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. □

7.3 Aplicações lineares

Um espaço vetorial é um conjunto de objetos (denominados "vetores") munido de uma estrutura linear. Entre as aplicaçoes de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ em um espaço vetorial $\mathcal{W}$, são de interesse natural aquelas que "respeitam" a estrutura linear presente em cada um dos espaços.

Definição 7.34. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma **aplicação linear** se

(i) $\mathrm{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{T}(\mathbf{u}) + \mathrm{T}(\mathbf{v})$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$;

(ii) $\mathrm{T}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ e α em $\mathbb{K}$.

Exemplo 7.60. A projeção $\mathrm{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathrm{P}(x, y, z) = (x, y)$ é uma aplicação linear. Com efeito, quaisquer que sejam (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) em $\mathbb{R}^3$, vale

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) &= \mathrm{P}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\\ &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \mathrm{P}(x_1, y_1, z_1) + \mathrm{P}(x_2, y_2, z_2).\end{aligned}$$

Outrossim, para todo (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ e α em $\mathbb{R}$ obtemos

$$\mathrm{P}\left(\alpha(x, y, z)\right) = \mathrm{P}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)) = (\alpha x, \alpha y) = \alpha(x, y) = \alpha \mathrm{P}(x, y, z).$$

ATIV. 7.31. Mostre que a projeção P, definida no Exemplo 7.60 é uma aplicação linear.

Exemplo 7.61. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$. Consideremos a aplicação

$$\mathrm{F} : \mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$$

que associa a cada vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ o vetor em $\mathbb{K}^n$ das coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de v na base B:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \quad \mapsto \quad F(\mathbf{v}) = (x_1, \ldots x_n).$$

A aplicação F é uma aplicação linear.

ATIV. 7.32. Mostre que a aplicação F definida no Exemplo 7.61 é uma aplicação linear.

Exemplo 7.62. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. A aplicação identidade id no espaço $\mathcal{V}$ denotaremos por $\mathrm{I}_{\mathcal{V}}$. Esta aplicação é uma aplicação linear.

ATIV. 7.33. Mostre que a aplicação identifdade em um espaço vetorial é uma aplicação linear.

Exemplo 7.63. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. A **aplicação zero** que associa a todo vetor em $\mathcal{V}$ o vetor nulo em $\mathcal{W}$ é uma aplicação linear.

ATIV. 7.34. Mostre que a aplicação zero, definida no Exemplo 7.63, é uma aplicação linear.

Exemplo 7.64. Seja $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a k. Dado um n natural, a aplicação

$$\mathrm{D} : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}),$$

que associa a cada polinômio p em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a derivada p' de p, é uma aplicação linear.

ATIV. 7.35. Mostre que a aplicação D, definida no Exemplo 7.64, é uma aplicação linear.

Exemplo 7.65. Seja $\mathcal{V}$ o espaço vetorial das funções com valores reais integráveis no intervalo $[0, 1]$. A aplicação

$$\mathrm{J} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\mathrm{J}(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

para toda função f em $\mathcal{V}$ é uma aplicação linear.

ATIV. 7.36. Mostre que a aplicação J, definida no Exemplo 7.61, é uma aplicação linear.

7.4 Núcleo e imagem de uma aplicação linear

7.4.1 Definição e propriedades

Definição 7.35. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ uma aplicação linear.

(a) O conjunto de todos os vetores v em $\mathcal{V}$ tais que $\mathrm{T}(\mathbf{v}) = 0_{\mathcal{W}}$ é chamado de **núcleo** de T. O núcleo de T vai ser indicado por $N(\mathrm{T})$.

(b) O conjunto de todos os vetores $\mathbf{w}$ em $\mathcal{W}$ para os quais existe algum $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ tal que $\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ é chamado de **imagem** de T. A imagem de T vai ser indicada por $R(\mathrm{T})$.

Teorema 7.30. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então,

(i) $N(\mathrm{T})$ é um subespaço de $\mathcal{V}$;

(ii) $R(\mathrm{T})$ é um subespaço de $\mathcal{W}$.

Demonstração. (i) Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $N(\mathrm{T})$, isto é, $\mathrm{T}(\mathbf{u}) = \mathrm{T}(\mathbf{v}) = 0_{\mathcal{W}}$. Sendo T uma aplicação linear, vale

$$\mathrm{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathrm{T}(\mathbf{u}) + \mathrm{T}(\mathbf{v}) = 0_{\mathcal{W}} + 0_{\mathcal{W}} = 0_{\mathcal{W}}.$$

Se $\mathbf{v}$ for um vetor de $N(\mathrm{T})$ e α um escalar, obtemos

$$\mathrm{T}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \alpha 0_{\mathcal{W}} = 0_{\mathcal{W}}.$$

Logo, $N(\mathrm{T})$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.
(ii) Sejam $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ em $R(\mathrm{T})$. Logo, existem $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em $\mathcal{V}$ tais que $\mathrm{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathrm{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Sendo T uma aplicação linear, vale

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \mathrm{T}(\mathbf{v}_2) = \mathrm{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

portanto, pela Definição 7.35, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ está em $R(\mathrm{T})$. Seja $\mathbf{w}$ um vetor qualquer de $R(\mathrm{T})$. Então, existe um $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ tal que $\mathbf{w} = \mathrm{T}(\mathbf{v})$. Se α for um escalar, obtemos

$$\alpha\mathbf{w} = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathrm{T}(\alpha\mathbf{v}),$$

portanto, $\alpha\mathbf{w}$ está em $R(\mathrm{T})$. Concluimos que $R(\mathrm{T})$ é um subespaço de $\mathcal{W}$. $\square$

Teorema 7.31. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Se $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ for uma aplicação linear, então $R(\mathrm{T})$ é gerado pelo conjunto de vetores $\{\mathrm{T}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{v}_n)\}$.

Demonstração. Denotaremos por $\mathcal{U}$ o subespaço de $\mathcal{W}$ gerado pelo conjunto de vetores $\{\mathrm{T}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{v}_n)\}$. Devemos mostrar que $R(\mathrm{T}) = \mathcal{U}$.

Seja $\mathbf{w}$ em $R(\mathrm{T})$. Então, existe um vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ tal que $\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Sendo B uma base de $\mathcal{V}$, existem escalares, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Como T é uma aplicação linear, obtemos

$$\mathbf{w} = \mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathrm{T}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n \mathrm{T}(\mathbf{v}_n)$$

e concluimos que $\mathbf{w}$ está em $\mathcal{U}$. Então, $R(\mathrm{T})$ é um subconjunto de $\mathcal{U}$.

Suponhamos agora que $\mathbf{u}$ é um vetor do subespaço $\mathcal{U}$ de $\mathcal{W}$. Como $\mathcal{U}$ é gerado pelo conjunto $\{\mathrm{T}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{v}_n))\}$, existem escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, tais que

$$\mathbf{u} = \beta_1 \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \beta_n \mathrm{T}(\mathbf{v}_n).$$

Sendo T uma aplicação linear, vale

$$\mathbf{u} = \mathrm{T}(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n).$$

Então, $\mathbf{u}$ está em $R(\mathrm{T})$. Concluimos que $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $R(\mathrm{T})$. Sendo também $R(T)$ um subconjunto de $\mathcal{U}$, obtemos $R(\mathrm{T}) = \mathcal{U}$. □

7.4.2 O teorema da dimensão

Teorema 7.32. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais, sendo $\mathcal{V}$ de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma aplicação linear. Então

$$\dim N(\mathrm{T}) + \dim R(\mathrm{T}) = \dim \mathcal{V}. \tag{7.142}$$

Demonstração. Sendo $N(\mathrm{T})$ um subespaço de $\mathcal{V}$, pelo Teorema 4.11 $N(\mathrm{T})$ e de dimensão finita e $\dim N(\mathrm{T}) \leq n$. Se $\dim N(\mathrm{T}) = n$, então, usando o mesmo teorema concluimos que $N(\mathrm{T}) = \mathcal{V}$, isto é, $\mathrm{T}(\mathbf{v}) = 0_{\mathcal{W}}$ para todo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$. Logo, $R(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{W}}\}$, o que implica $\dim R(\mathrm{T}) = 0$. Portanto, a eq. (7.142) é válida. Suponhamos agora que $\dim N(\mathrm{T}) = k < n$. Existe uma base de $N(\mathrm{T})$ contendo exatamente k vetores, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Pelo Teorema 4.10, existe um conjunto, contendo exatamente $n-k$ vetores de $\mathcal{V}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}$, tal que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Mostraremos que o conjunto de vetores $\{\mathrm{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{u}_{n-k})\}$ é uma base de $R(\mathrm{T})$. O Teorema 7.35 diz que $R(\mathrm{T})$ é gerado pelo conjunto

$$\{\mathrm{T}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{v}_k), \mathrm{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{u}_{n-k})\}.$$

No entanto, $\mathrm{T}(\mathbf{v}_1) = \cdots = \mathrm{T}(\mathbf{v}_k) = 0_{\mathcal{W}}$, porque $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são vetores de $N(\mathrm{T})$. Então $R(\mathrm{T})$ é gerado pelo conjunto

$$\{\mathrm{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{u}_{n-k})\}.$$

Mostraremos que este conjunto é linearmente independente. Sejam $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-k}$ escalares, tais que

$$\alpha_1 \mathrm{T}(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_{n-k} \mathrm{T}(\mathbf{u}_{n-k}) = 0. \tag{7.143}$$

Sendo T uma aplicação linear, a eq. (7.143) implica

$$\mathrm{T}(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-k} \mathbf{u}_{n-k}) = 0.$$

Então, $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_{n-k}$ está em $N(\mathrm{T})$ e existem k escalares $\beta_1, \ldots, \beta_k$, tais que

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_{n-k} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k,$$

ou, ainda,

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{u}_{n-k} - \beta_1\mathbf{v}_1 - \cdots - \beta_k\mathbf{v}_k = 0.$$

No entanto, como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ é uma base de $\mathcal{V}$, este conjunto é linearmente independente. Logo, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-k} = 0$. Concluimos que toda combinação linear dos vetores $\mathrm{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{u}_{n-k})$ que representa o vetor $0_{\mathcal{W}}$ tem todos os coefientes nulos. Logo, o conjunto $\mathrm{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathrm{T}(\mathbf{u}_{n-k})$ é linearmente independente. □

Teorema 7.33. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então T é uma aplicação injetora se, e somente se, $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\}$.

Demonstração. (i) Seja $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Devemos mostrar que T é uma aplicação injetora. Suponhamos que $\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \mathrm{T}(\mathbf{y})$. Então

$$\mathrm{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathrm{T}(\mathbf{x}) - \mathrm{T}(\mathbf{y}) = 0_{\mathcal{W}}.$$

Usando a Definição 7.34 concluimos que o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ está em $N(\mathrm{T})$. Mas $N(\mathrm{T})$ contém um único vetor, $0_{\mathcal{V}}$. Então $x - y = 0_{\mathcal{V}}$, o que implica $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(ii) Seja T uma aplicação injetora. Devemos mostrar que $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Seja $\mathbf{x}$ em $N(\mathrm{T})$, isto é, $\mathrm{T}(\mathbf{x}) = 0_{\mathcal{W}}$. Sendo $\mathrm{T}(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$ e T injetora, obtemos $\mathbf{x} = 0_{\mathcal{V}}$. □

Teorema 7.34. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita e suponhamos que $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$. Então, uma aplicação linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é injetora se, e somente se, ela é sobrejetora.

Demonstração. Pelo Teorema 7.32

$$\dim N(\mathrm{T}) + \dim R(\mathrm{T}) = \dim \mathcal{V} = n. \tag{7.144}$$

Usando eq. (7.144) e aplicando os Teoremas 7.33 e 4.11, obtemos ("$\Leftrightarrow$" substitui as palavras "se, e somente se"): T é injetora $\Leftrightarrow$ $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\} \Leftrightarrow \dim N(\mathrm{T}) = 0 \Leftrightarrow \dim R(\mathrm{T}) = n \Leftrightarrow R(\mathrm{T}) = \mathcal{W} \Leftrightarrow$ T é sobrejetora. □

Teorema 7.35. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\mathcal{V}$ é de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Então, dado um subconjunto de $\mathcal{W}$ contendo exatamente n elementos, $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, existe uma, e somente uma, aplicação linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, tal que $\mathrm{T}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Seja $\mathbf{x}$ um vetor de $\mathcal{V}$. Sendo B uma base de $\mathcal{V}$, existem n escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tais que

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Definimos $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ pela equação

$$\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{w}_n.$$

A aplicação T é linear. Com efeito, sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em $\mathcal{V}$. Sendo B uma base de $\mathcal{V}$, existem combinações lineares dos vetores de B que representam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \qquad \mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n.$$

Então,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n$$

e, pela definição de T,

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathbf{x}{+}\mathbf{y}) &= \alpha_1 + \beta_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{w}_n \\ &= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n + \beta_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n = \mathrm{T}(\mathbf{x}) + \mathrm{T}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Também, se α for um escalar, obtemos

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha\,(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha\alpha_n\mathbf{v}_n,$$

portanto

$$\mathrm{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\alpha_1\mathbf{w}_1{+}\cdots{+}\alpha\alpha_n\mathbf{w}_n = \alpha\,(\alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{x}).$$

A aplicação T é única. Com efeito, seja S uma aplicação linear que satisfaz

$$\mathrm{S}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \qquad i = 1, \ldots n.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\mathbf{x}) &= \mathrm{S}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1\mathrm{S}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n\mathrm{S}(\mathbf{v}_n) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n = \mathrm{T}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Portanto, S = T. □

O Teorema 7.35 sugere o seguinte critério de igualdade para aplicações lineares.

Corolário 7.11. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\mathcal{V}$ é de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$, e que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathcal{W}$. Se $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ e $\mathrm{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ forem duas aplicações lineares, tais que $\mathrm{T}(\mathbf{v}_i) = \mathrm{S}(\mathbf{v}_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então T = S.

ATIV. 7.37. Mostre o Corolário7.11.

Exemplo 7.66. Verifica-se que o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ onde

$$\mathbf{v}_1 = (1,1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,-1)$$

é uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja uma aplicação linear $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathrm{S}(1,1) = (1,1), \qquad \mathrm{S}(1,-1) = (-1,1) \tag{7.145}$$

(sabemos do Teorema 7.35 que as equações (7.145) definem uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$). Seja $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma segunda aplicação linear definida por

$$\mathrm{T}(x,y) = (y,x) \qquad \text{para todo } (x,y) \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Usaremos o Corolário 7.11 para provar que $\mathrm{S} = \mathrm{T}$. Com efeito,

$$\mathrm{T}(1,1) = (1,1) = \mathrm{S}(1,1), \qquad \mathrm{T}(1,-1) = (-1,1) = \mathrm{S}(1,-1).$$

Concluimos que $\mathrm{S} = \mathrm{T}$.

7.5 Conclusão

- Características importantes de uma aplicação linear são o núcleo e a imagem da aplicação.
- Dada uma base no domínio da aplicação linear, a imagem da aplicação é gerada pelo conjunto das imagens dos vetores da base.
- A dimensão da imagem é completamente determinada pelas dimensões do domínio e do núcleo da aplicação linear.

7.6 Resumo

Relembramos os principais resultados relativos às aplicações e introduzimos a terminologia. Apreseentamos a definição de *aplicação linear* e alguns exemplos de aplicações lineares. Definimos os conceitos de *núcleo* e *imagem* de uma aplicação linear. Mostramos que, dada uma base no domínio da aplicação linear, a imagem da aplicação é gerada pelo conjunto das imagens dos vetores da base. mostramos também um teorema que relaciona as dimensões do dominio, do núcleo e da imagem da aplicação linear.

7.7 Atividades

ATIV. 7.38. Ache o núcleo da projeção P do Exemplo 7.60. (Para identificar um subespaço de um espaço vetorial basta apresentar um conjunto de vetores que gera o subespaço.)

ATIV. 7.39. Ache o núcleo da projeção P do Exemplo 7.60. (Para identificar um subespaço de um espaço vetorial basta apresentar um conjunto de vetores que gera o subespaço.)

ATIV. 7.40. Ache o núcleo da aplicação F do Exemplo 7.61.

ATIV. 7.41. Ache o núcleo da aplicação D do Exemplo 7.64. Ache a dimensão da imagem de D.

7.8 Glossário

aplicação injetora Definição 7.31.

aplicação invertível Definição 7.33.

aplicação sobrejetora Definição 7.32.

imagem de uma aplicação linear Definição 7.35.

núcleo de uma aplicação linear Definição 7.35.

7.9 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer as operações com aplicações lineares.

7.10 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.