Operações com aplicações lineares

8

AULA

META

- Introduzir as operações com aplicações lineares.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar as propriedades das operações com aplicações lineares;
- usar as oerações com operadores lineares.

PRÉ-REQUISITOS

- Espaços vetoriais.
- Base e dimensão.
- Aplicações lineares.

8.1 Introdução

Nesta aula vamos continuar com o estudo das aplicações lineares de um espaço vetorial para um segundo espaço vetorial, mas de um ponto de vista diferente: vindo essas aplicações como elementos de um conjunto. Mostraremos que este conjunto é, de um modo natural, um espaço vetorial. Com essa finalidade, vamos definir operações de adição de aplicações lineares e de multiplicação de uma aplicação linear por um escalar. Depois mostraremos que estas operações possuem as propriedades exigidas na definição de espaço vetorial.

8.2 O espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$

Dados dois espaços vetoriais, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, podemos definir uma estrutura linear no conjunto de todas as aplicações lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$.

Soma de aplicações lineares

Definição 8.36. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ e $\mathrm{U} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ são aplicações lineares. Dizemos que a aplicação $\mathrm{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é a **soma** de T e U e escrevemos $S = \mathrm{T} + \mathrm{U}$ se

$$S(x) = \mathrm{T}(\mathbf{x}) + \mathrm{U}(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x}$ em $\mathcal{V}$.

Teorema 8.36. A soma de duas aplicações lineares é uma aplicação linear.

Demonstração. Sejam $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ e $U : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ aplicações lineares. Se x, y forem dois vetores em $\mathcal{V}$, então

$$\begin{aligned}(T+U)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + T(\mathbf{x}+\mathbf{y})\\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) + U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{y})\\ &= (T+U)(\mathbf{x}) + (T+U)(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Se $\mathbf{x}$ for um vetor de $\mathcal{V}$ e α um escalar, obtemos

$$(T+U)(\alpha\mathbf{x}) = T(\alpha\mathbf{x}) + U(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \alpha U(\mathbf{x}) = \alpha(T+U)(\mathbf{x}).$$

Portanto, $T + U$ é uma aplicação linear. □

Múltiplo de uma aplicação linear por um escalar

Definição 8.37. Seja $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear e α um escalar. O **múltiplo** αT é uma aplicação de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ definida por

$$(\alpha T)(\mathbf{v}) = \alpha(T(\mathbf{v}))$$

para todo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$.

Teorema 8.37. Seja $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear e α um escalar. Então αT é uma aplicação linear.

ATIV. 8.42. Mostre o Teorema 8.36.

O espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$

Dados dois espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ o conjunto de todas as aplicações lineares de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{W}$.
As operações de adição de aplicações do conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ e de multiplicação de uma aplicação de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ por um escalar de $\mathbb{K}$

satisfazem toadas as condiçoes listadas na Definição 3.10. Portanto, vale o teorema a seguir.

Teorema 8.38. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Então, o conjunto de todas as aplicações lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ com as operações de adiçaõ e de multiplicação de uma aplicação por um escalar é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.

ATIV. 8.43. Mostre o Teorema 8.37.

8.3 Composição de aplicações lineares

Sejam $\mathrm{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Usaremos a notação TS para a **aplicação composta** $\mathrm{T} \circ \mathrm{S}$, pondo TS=$\mathrm{T} \circ \mathrm{S}$ ou, ainda,

$$(\mathrm{TS})(\mathbf{x}){=}\mathrm{T}\,(\mathrm{S}(\mathbf{x}))$$

para todo x em $\mathcal{V}$.

Exemplo 8.67. Sejam $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ e $\mathrm{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ as aplicações lineares (verifique que são lineares, mesmo!) definidas por

$$\mathrm{S}(u, v) = (u + v, u - v, u, v) \tag{8.146}$$

para todo (u, v) em $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathrm{T}(x, y, z, t) = (y, z, x + t) \tag{8.147}$$

para todo (x, y, z, t) em $\mathbb{R}^4$, correspondentemente. A aplicação composta podemos encontrar pondo

$$(x, y, z, t) = \mathrm{S}(u, v)$$

na equação eq. (8.147). Assim, obtemos

$$(\mathrm{TS})(u, v) = (u + v, u - v, u, v). \tag{8.148}$$

Suponhamos que S e T são aplicações lineares tais que a aplicação TS existe. Uma pergunta natural é: será que TS é linear? A resposta é dada no teorema a seguir.

Teorema 8.39. Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ e $\mathrm{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ são aplicações lineares. Então ST é uma aplicação linear.

Demonstração. Sejam x e y elementos de $\mathcal{U}$ e α um escalar. Sendo T e S aplicações lineares, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{ST})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathrm{S}\left(\mathrm{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right) = \mathrm{S}\left(\mathrm{T}(\mathbf{x})+\mathrm{T}(\mathbf{y})\right) \\ &= \mathrm{S}\left(\mathrm{T}(\mathbf{x})\right)+\mathrm{S}\left(\mathrm{T}(\mathbf{y})\right) = (\mathrm{ST})(\mathbf{x})+(\mathrm{ST})(\mathbf{y}), \\ (\mathrm{ST})(\alpha\mathbf{x}) &= \mathrm{S}\left(\mathrm{T}(\alpha\mathbf{x})\right) = \mathrm{S}\left(\alpha\mathrm{T}(\mathbf{x})\right) = \alpha\mathrm{S}\left(\mathrm{T}(\mathbf{x})\right) = \alpha\left(\mathrm{ST}\right)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Concluimos que ST é uma aplicação linear. □

A lei distribuitiva

A composição de aplicações lineares obedece uma "lei distribuitiva" como estabelece o teorema a seguir.

Teorema 8.40. Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$.

(a) Suponhamos que $\mathrm{T}_1 : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\mathrm{T}_2 : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ e $\mathrm{U} : \mathcal{V} \to \mathrm{W}$ são aplicações lineares. Então

$$\mathrm{U}(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2) = \mathrm{UT}_1+\mathrm{UT}_2.$$

(b) Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $U_1 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ e $U_2 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ aplicações lineares. Então

$$(U_1+U_2)\mathrm{T} = U_1\mathrm{T}+U_2\mathrm{T}.$$

Demonstração. (a) Sejam $\mathbf{x}$ um vetor do espaço vetorial $\mathcal{V}$. Sendo T_1, T_2 e U aplicações lineares, obtemos

$$\begin{aligned}\big[U(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\big](\mathbf{x}) &= U\left((\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)(\mathbf{x})\right) = U\left(\mathrm{T}_1(x)+\mathrm{T}_2(\mathbf{x})\right)\\ &= U\left(\mathrm{T}_1(\mathbf{x})\right)+U\left(\mathrm{T}_2(\mathbf{x})\right) = (U\mathrm{T}_1)(\mathbf{x})+(U\mathrm{T}_2)(\mathbf{x})\\ &= (U\mathrm{T}_1+U\mathrm{T}_2)(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

donde $U(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2) = U\mathrm{T}_1+U\mathrm{T}_2$.
A demonstração do item (b) do Teorema pode ser feita de modo análogo. □

ATIV. 8.44. Mostre o item (b) do Teorema 8.40.

8.4 Isomorfismo

8.4.1 Isomorfismo de espaços vetoriais

Definição 8.38. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços lineares sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação linear $\mathrm{T}:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é um **isomorfismo** de $\mathcal{V}$ sobre W se T for

(i) linear;

(ii) invertível.

Usando as Proposições 7.20 e 7.21, concluimos que uma aplicação linear T é um isomorfismo se, e somente se, T for injetora e sobrejetora.
Suponhamos que $\mathrm{T}:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ é um isomofismo. Uma pergunta natural é a seguinte: a aplicação inversa $\mathrm{T}^{-1}:\mathcal{W}\to\mathcal{V}$ é uma aplicação linear? A resposta é positiva, como estabelece o teorema a seguir.

Teorema 8.41. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathrm{W}$ é uma aplicação linear invertível. Então T^{-1} é linear.

Demonstração. Sejam $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ vetores do espaço vetorial $\mathcal{W}$. Devemos mostrar que $\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}_2)$. Pela Proposição 7.20, a aplicação T é sobrejetora. Então, existem $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em V tais que $\mathrm{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $\mathrm{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= \mathrm{T}^{-1}\left(\mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \mathrm{T}(\mathbf{v}_2)\right) = \mathrm{T}^{-1}\left(\mathrm{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right) \\ &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}_2).\end{aligned}$$

Seja α um escalar e w um vetor do espaço vetorial $\mathcal{W}$. Mostraremos que $\mathrm{T}^{-1}(\alpha\mathbf{w}) = \alpha\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w})$. Com efeito, existe um $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ tal que $\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, portanto

$$\mathrm{T}^{-1}(\alpha\mathbf{w}) = \mathrm{T}^{-1}\left(\alpha\mathrm{T}(v)\right) = \mathrm{T}^{-1}\left(\mathrm{T}(\alpha\mathbf{v})\right) = \alpha\mathbf{v} = \alpha\mathrm{T}^{-1}(\mathbf{w}).$$

□

Corolário 8.12. Se $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é um isomorfismo, então $\mathrm{T}^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ também é.

Demonstração. Pelo Corolário 7.10 a aplicação T^{-1} é invertível. Usando o Teorema 8.41 concluimos que T^{-1} é linear. Portanto, T^{-1} é um isomosrfismo de $\mathcal{W}$ sobre $\mathcal{V}$. □

Teorema 8.42. Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, espaços lineares. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ e $\mathrm{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ são isomorfismos. Então $\mathrm{ST} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ é um isomorfismo.

Demonstração. Pelo Teorema 8.39 a aplicação ST é linear. Pela Proposição 7.22 ela é invertível. Portanto, ST é um isomorfismo.

□

8.4.2 Isomosrfismo de espaços vetoriais de dimensão finita

Teorema 8.43. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita e igual, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma aplicação linear. Se $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\}$, então T é um isomorfismo.

Demonstração. Sendo $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\}$, concluimos, usando o Teorema 7.35, que T é injetora. Como, além disso, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$, concluimos, usando o Teorema 7.34, que T é sobrejetora. Logo, pela Proposição 7.21, T é invertível. Concluimos que T é um isomorfismo. □

Freqüentemente mais importante do que a forma de um ou de outro isomorfismo entre dois espaços vetoriais é o próprio fato de existência de um isomorfismo. Quando existe um isomorfismo entre dois espaços vetoriais, dizemos que os espaços são **isomorfos**. Em considerações que envolvem apenas a estrutura linear, podemos "substituir" um dos dois espaços isomorfos pelo outro no seguinte sentido: toda proposição, verdadeira para um dos espaços será válida para o outro também. Temos que tomar cuidado, no entanto, para não confundir as propriedades que dependem apenas da estrutura linear com as que são específicas para um dos dois espaços. Apresentaremos um teorema que trata de um exemplo importante de espaços isomorfos, mas antes mostraremos um a condição necessária e suficiente para existênia de isomorfismo entre dois espaços vetoriais.

Teorema 8.44. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então, $\mathcal{V}$ é isomorfo a $\mathcal{W}$ se, e somente se,

$\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$.

Demonstração. (a) Supondo que $\mathcal{V}$ é isomorfo a $\mathcal{W}$ mostraremos que $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$. Seja $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ um isomorfismo. Usando o Teorema 7.32 obtemos

$$\dim N(\mathrm{T}) + \dim R(\mathrm{T}) = \dim \mathcal{V}.$$

Sendo T injetora, vale $\dim N(\mathrm{V}) = 0$. Sendo T sobrejetora, vale $\dim R(\mathrm{T}) = \dim \mathcal{W}$. Portanto,

$$\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}.$$

(b) Suponhamos que $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$ Se $n = 0$, então cada um dos espaçõs vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$ contem apenas um elemento, o vetor nulo. A aplicação linear definida por $\mathrm{T}(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$ é, obviamente, um isomorfismo. Se $n \geq 1$, existem bases ordenadas de B de $\mathcal{V}$ e B' de $\mathcal{W}$ cada uma das quais contem exatamente n elementos,

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \qquad B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}.$$

Pelo Teorema 7.35 existe uma, e somente uma, aplicação linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que $\mathrm{T}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Mostraremos que T é injetora. Seja v um elemento de $N(T)$. Sendo B uma base de $\mathcal{V}$, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Sendo T linear, obtemos

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \alpha_1 \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n \mathrm{T}(\mathbf{v}_n) = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{w}_n.$$

Como B' é uma base de $\mathcal{W}$, a igualdade $\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{w}_n = 0$ implica $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, portanto $\mathbf{v} = 0_{\mathcal{V}}$. Logo, $N(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{V}}\}$.

Concluimos que T é injetora. Usando o Teorema 7.34 obtemos que T é sobrejetora. Alem disso, ela é linear por definição. Concluimos que T é um isomorfismo de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$. $\square$

O teorema a seguir trata de um exemplo importante de espaços lineares isomorfos.

Teorema 8.45. Seja $\mathcal{V}$ uma espaço vetorial de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$. Então $\mathcal{V}$ é isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{K}^n$.

Demonstração. Sendo $\dim \mathcal{V} = n$, existe uma base ordenada B de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n vetores, $B = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n\}$, e cada vetor v em $\mathcal{V}$ é representado por uma combinação linear dos vetores de B,

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Definimos uma aplicação $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$ por

$$\mathrm{T}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

A aplicação T é injetora. Com efeito, sejam u e v dois vetores em $\mathcal{V}$,

$$\mathbf{u} = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n, \qquad \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Se $\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(v)$, então $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, \dots, n)$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A aplicação T é sobrejetora, porque, dado um vetor $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ em $\mathbb{K}^n$, ele e a imagem de um vetor em $\mathcal{V}$ dado por

$$\mathbf{w} = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \gamma_n \mathbf{v}_n.$$

Verificar que T é linear não é difícil. Deixaremos esta parte da demonstração como exercício. Concluimos que T é um isomorfismo. Então, $\mathcal{V}$ e $\mathbb{K}^n$ são isomorfos. $\square$

8.5 Operadores

As aplicações lineares de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ no mesmo espaço vetorial $\mathcal{V}$ são chamados de **operadores lineares em** $\mathcal{V}$, ou, simplesmente, de operadores em $\mathcal{V}$. Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ o conjunto de todos os operadores em $\mathcal{V}$.

Dado um espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, associamos a éle o espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ dos operadores em $\mathcal{V}$. A estrutura linear no conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ é definida pelas operações de adição de operadores e de multiplicação de operadores por escalares, como estabelece o Teorema 8.38. No entanto, no conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ podemos definir, de um modo natural, mais uma operação.

Para qualquer uma das aplicações do conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ o domínio coincide com o contradomínio. Portanto dados dois operadores S e T do conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$, as aplicaçoes compostas ST e TS existem e pertencem ao mesmo conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. A composição de operadores do conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ é, então, uma operação binária em $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ Esta operação tem algumas (não todas!) das propriedades da multiplicação de escalares.

Associatividade da composição

A composição de operadores é associativa. De fato, trata-se de um caso particular de composição de aplicações e toda composição de aplicações é associativa, como mostramos na Proposição 7.18. Dados três operadores, A, B C, vale

$$(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$$

Levando em conta a associatividade da composição, deixamos de usar parenteses em composições de três ou mais operadores, pondo, por exemplo

$$ABC = (\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC}).$$

Lei distributiva

Sejam A, B C operadores de $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Então,

(a) $A(B+C) = AB + AC$;

(b) $(B+C)A = BA + CA$.

Com efeito, trata-se de uma caso particular da situação descrita no Teorema8.40.

A composição de operadores não é comutativa

Geralmente, a composição de operadores não é comutativa, $U\mathrm{T} \neq \mathrm{T}U$.

Exemplo 8.68. Sejam T e U operadores de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definidos por

$$\mathrm{T}(x,y) = (y,x), \qquad U(x,y) = (x,-y) \qquad \text{para todo } (x,y) \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Obtemos

$$U\mathrm{T}(x,y) = U(y,x) = (y,-x), \qquad \mathrm{T}U(x,y) = \mathrm{T}(x,-y) = (-y,x).$$

Os operadores $U\mathrm{T}$ e $\mathrm{T}U$ não são iguais.

Operador identidade

Dado um espaço vetorial $\mathcal{V}$, o operador $\mathrm{I}_{\mathcal{V}}$ definido por

$$\mathrm{I}_{\mathcal{V}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ é chamado de **operador identidade**. Verifica-se facilmente que

$$\mathrm{I}_{\mathcal{V}}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{I}_{\mathcal{V}} = \mathrm{A},$$

qualquer que seja o operador A de $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Polinômios

Seja $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear e k um número natural. Denotaremos por T^n o operador

$$\underbrace{\mathrm{T} \ldots \mathrm{T}}_{k}.$$

Dado um polinômio (de uma variável, com coeficientes em $\mathbb{K}$),

$$p(x) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

podemos associar a ele o operador

$$p(\mathrm{T}) = a_0 \mathrm{I}_{\mathcal{V}} + a_1 \mathrm{T} + \cdots + a_n \mathrm{T}^n.$$

8.6 Conclusão

- O conjunto de todas as aplicações lineares de um espaço vetorial em um segundo espaço vetorial é um espaço vetorial.
- Dois espaços vetoriais de dimensão finita sobre o mesmo corpo são isomorfos se, e somente se tiverem dimensões iguais.
- No conjunto dos operadores em um espaço vetorial temos definida mais uma operação. Esta operação não é comutativa, no caso geral.

8.7 Resumo

Mostramos que, dados dois espaços vetoriais sobre um corpo, o conjunto de todas as aplicações lineares do primeiro espaço no segundo é, de um modo natural, um espaço vetorial. Vimos que a composição de duas aplicações lineares, quando existe, é uma aplicação linear. Provamos a lei distribuitiva correspondente. Definimos o conceito de isomorfismo de dois espsços vetoriais. Mostramos que dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo são isomorfos se, e somente se, as dimensões dos espaços são iguais. Vimos que no espaço dos operadores em um espaço vetorial podemos definir mais uma operação. Esta operação, geralmente, não é comutativa.

ATIV. 8.45. Sejam S e T operadores lineares no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$\mathrm{S}(x, y) = (x + y, x - y), \qquad \mathrm{T}(x, y) = (x + y, y)$$

Ache os operadores ST e TS.

ATIV. 8.46. Seja p o polinômio definido por

$$p(t) = t^2 + t + 1$$

e $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$\mathrm{T}(x, y) = (x + 2y, -y).$$

Ache o operador $p(\mathrm{T})$.

8.8 Glossário

isomorfismo de espaços vetoriais Definição 8.38.

múltiplo de uma aplicação linear por um escalar Definição 8.37.

soma de aplicações lineares Definição 8.36.

8.9 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer as relações entre aplicações lineares e matrizes.

8.10 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.