Aplicações lineares e matrizes

9
AULA

META

- Introduzir o conceito de matriz de uma aplicação linear

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- determinar a matriz de uma aplicação linear relativa a uma escolha das bases no domínio e no contradominio da aplicação linear;
- usar as propriedades das matrizes das aplicações lineares no cálculo de somas e composições de aplicações lineares;
- usar a transformação da matriz de um operador linear da mudança da base.

PRÉ-REQUISITOS

- Espaços vetoriais; base e dimensão.
- Determinantes e propriedades dos determinantes.
- Aplicações lineares e operações com aplicações lineares.

9.1 Introdução

Vimos na aula anterior que um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ é isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{K}^n$. Dada uma base em $\mathcal{V}$, cada vetor de $\mathcal{V}$ é representado por um vetor de $\mathbb{K}^n$, ou, seja, por uma seqüência finita de escalares. Suponhamos que $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, ambos de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n$ e $\dim \mathcal{W} = m$. Seja $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Usando isomorfismos entre $\mathcal{V}$ e $\mathbb{K}^n$ e, também, entre $\mathcal{W}$ e $\mathbb{K}^m$, podemos associar a T uma tabela de números ou, seja, uma matriz. As relações entre as aplicações lineares e as matrizes associadas são o tema desta aula.

9.2 Matriz associada a uma aplicação linear

Consideremos dois espaços vetorioais de dimensão finita $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e $\dim \mathcal{W} = m \geq 1$. Então, existe uma base ordenada B de $\mathcal{V}$ contendo exatamente n elementos, $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Também existe uma base ordenada B' de $\mathcal{W}$ contendo exatamente m elementos, $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$. Se $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ for uma aplicação linear, a imagem $\mathrm{T}(\mathbf{v}_i)$ de cada vetor da base B é representada (de modo único) por uma combinação linear dos vetores da base B':

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}_i) = t_{1i}\mathbf{w}_1 + \cdots + t_{mi}\mathbf{w}_{mi}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9.149}$$

Portanto, a aplicação T podemos associar a matriz T dos coeficientees das equações (9.149),

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix}.$$

Apresentaremos a definição.

Definição 9.39. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e $\dim \mathcal{W} = m \geq 1$. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{V}$ e que $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{W}$. Seja $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. A matriz $m \times n$ cujas entradas t_{ij} são os coeficientes nas representações (9.149) e chamada de **matriz da aplicação** T **relativa a escolha das bases** B **e** B'.

Exemplo 9.69. Seja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida no Exemplo 8.67,

$$\mathrm{S}(u, v) = (u + v, u - v, u, v)$$

para todo (u, v) em $\mathbb{R}^2$. Encontraremos a matriz S da aplicação S relativa a escolha das bases canônicas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$. Aplicando S aos vetores da base canônica em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(1,0) &= (1,1,1,0) &&= (1,0,0,0) + (0,1,0,0) + (0,0,1,0), \\ \mathrm{S}(0,1) &= (1,-1,0,1) &&= (1,0,0,0) - (0,1,0,0) \qquad\qquad + (0,0,0,1), \end{aligned}$$

Usando a Definição 9.39 obtemos

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.150}$$

A primeira *coluna* da matriz S é formada pelas coordenadas do vetor $\mathrm{S}(1,0)$. De modo análogo, a segunda coluna da matriz S é formada pelas coordenadas do vetor $\mathrm{S}(0,1)$.

Exemplo 9.70. Seja $\mathrm{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida no Exemplo 8.67,

$$\mathrm{T}(x, y, z, t) = (y, z, x + t)$$

para todo (x, y, z, t) em $\mathbb{R}^4$. Encontraremos a matriz T da aplicação T relativa a escolha das bases canônicas em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Aplicando S aos vetores da base canônica em $\mathbb{R}^4$, obtemos

$$\mathrm{T}(1,0,0,0) = (0,0,1), \qquad \mathrm{T}(0,1,0,0) = (1,0,0)$$
$$\mathrm{T}(0,0,1,0) = (0,1,0), \qquad \mathrm{T}(0,0,0,1) = (0,0,1).$$

Então,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.151}$$

Exemplo 9.71. Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios de uma variável real, com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n. Consideremos a aplicação linear $\mathrm{D} : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ que a cada polinômio p do espaço $\mathcal{P}_n$ associa a derivada p' de p. O espaço $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é de dimensão $n + 1$. Uma base ordenada B de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é dada pelos monômios t^k de grau $k \leq n$;

$$B = \{1, t, \ldots, t^n\}.$$

Uma base ordenada no espaço $\mathcal{P}_{n-1}$ é dada por

$$B' = \{1, t, \ldots, t^{n-1}\}.$$

Aplicando D aos vetores da base B obtemos

$$\begin{array}{llllll}
D(1) & = 0 & & & & \\
 & = 0 \cdot 1 & +0 \cdot t & + \ldots & +0 \cdot t^{n-2} & +0 \cdot t^{n-1} \\
D(t) & = 1 & & & & \\
 & = 1 \cdot 1 & +0 \cdot t & + \ldots & +0 \cdot t^{n-2} & +0 \cdot t^{n-1} \\
D(t^2) & = 2t & & & & \\
 & = 0 \cdot 1 & +2 \cdot t & + \ldots & +0 \cdot t^{n-2} & +0 \cdot t^{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
D(t^{n-1}) & = (n-1)t^{n-2} & & & & \\
 & = 0 \cdot 1 & +0 \cdot t & + \ldots & +(n-1) \cdot t^{n-2} & +0 \cdot t^{n-1} \\
D(t^n) & = nt^{n-1} & & & & \\
 & = 0 \cdot 1 & +0 \cdot t & + \ldots & +0 \cdot t^{n-2} & +n \cdot t^{n-1}.
\end{array} \tag{9.152}$$

Das equaçoes (9.149) econtramos as entradas da matriz $n \times (n+1)$ associada a aplicação D:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Dadas duas bases nos espações vetorias $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, a regra que associa a cada aplicação linear T : $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ a matriz T da aplicação linear T relativa a escolha das bases define uma aplicação do espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ no espaço vetorial das matrizes $m \times n$, onde $m = \dim \mathcal{W}$ e $n = \mathcal{V}$. Mostraremos que esta aplicção é

(a) invertível;

(b) linear.

Teorema 9.46. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e $\dim \mathcal{W} = m \geq 1$. Sejam $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ respectivamente. Então a regra, descrita na Definição 9.39, que associa a cada aplicação linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma matriz $m \times n$ define uma aplicação injetora e sobrejetora de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ sobre $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demonstração. Dada uma matriz $T = (t_{ij})$, o Teorema 7.35 garante que existe uma, e somente uma aplicação linear T de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ que satisfaz as equações (9.149). Logo, a regra que associa matrizes $m\times n$ às aplicações lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ define uma aplicação injetora e sobrejetora. $\square$

Teorema 9.47. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e $\dim \mathcal{W} = m \geq 1$. Sejam $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ correspondentemente. Então a regra descrita na Definição 9.39 que associa a cada aplicação linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma matriz $m \times n$ define uma aplicação linear de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ sobre $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demonstração. Sejam S e T aplicações lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$. Denotaremos por S e T as matrizes destas aplicações relativas a escolha das bases B é B'. Então

$$\mathrm{S}(\mathbf{v}_j) = [S]_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + [S]_{mj}\mathbf{w}_m, \tag{9.153}$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}_j) = [T]_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + [T]_{mj}\mathbf{w}_m, \tag{9.154}$$

para $j = 1, \ldots, n$. Somando as equações 9.153 e 9.154 obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}+\mathrm{T})(\mathbf{v}_j) &= ([S]_{1j} + [T]_{1j})\,\mathbf{w}_1 + \cdots + ([S]_{mj} + [T]_{mj})\,\mathbf{w}_m \\ &= [S+T]_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + [S+T]_{mj}\mathbf{w}_m.\end{aligned}$$

Então, a matriz associada à soma das aplicações S e T é a soma das matrizes S e T.

Seja α um escalar. Usando a eq. (9.153) obtemos

$$\begin{aligned}(\alpha\mathrm{T})(\mathbf{v}_i) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{v}_i) &= \alpha\left([T]_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + [T]_{mj}\mathbf{w}_m\right) \\ &= [\alpha T]_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + [\alpha T]_{mj}\mathbf{w}_m.\end{aligned}$$

Então, ao múltiplo por α da aplicação T associamos o múltiplo por α da matriz T. Concluimos que a aplicação que associa matrizes às aplicaçoes lineares segundo a Definição 9.39 é linear. □

Corolário 9.13. A aplicação que associa matrizes às aplicações lineares conforme a Definição 9.39 é um isomorfismo.

Demonstração. Com efeito, sendo invertível e linear, esta aplicação é um isomosrfismo. □

9.3 Composição de aplicações e multiplicação de matrizes

Consideremos dusa aplicações lineares, $\mathrm{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, onde $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dadas as bases ordenadas B, B' e B'' de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ correspondentemente, sejam

- S a matriz da aplicação linear S relativa à escolha das bases B e B';
- T a matriz da aplicação linear T relativa à escolha das bases B' e B'';
- M a matriz da aplicação linear TS relativa à escolha das bases B e B''.

É possivel exprimir as entradas da matriz M em termos das entradas das matrizes S e T? A respostra é dada no seguinte teorema.

Teorema 9.48. Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais, todos de dimensão finita e não-nula, sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $\mathrm{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ aplicações lineares. Suponhamos que $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, $B' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B'' = \{w_1, \ldots, w_r\}$ são bases ordenadas de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, correspondentemente. Sejam

- S a matriz da aplicação **S**, relativa a escolha das bases B e B';
- T a matriz da aplicação T, relativa a escolha das bases B' e B'';
- M a matriz da aplicação TS, relativa a escolha das bases B e B''.

Então $M = TS$.

Demonstração. Usando as representações

$$\mathrm{S}(\mathbf{u}_i) = [S]_{1i}\mathbf{v}_1 + \cdots + [S]_{ni}\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n}[S]_{ji}\mathbf{v}_j, \qquad i = 1, \ldots m,$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}_j) = [T]_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + [T]_{rj}\mathbf{v}_r = \sum_{k=1}^{r}[T]_{kj}\mathbf{w}_k, \qquad j = 1, \ldots m$$

e as propriedades das aplicações lineares, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{TS})(\mathbf{v}_i) &= \mathrm{T}(\mathrm{S}(\mathbf{v}_i)) = \mathrm{T}\left(\sum_{j=1}^{n}[S]_{ji}\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}[S]_{ji}\mathrm{T}(\mathbf{v}_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}[S]_{ji}\left(\sum_{k=1}^{r}[T]_{kj}\mathbf{w}_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}[S]_{ji}[T]_{kj}\mathbf{w}_k.\end{aligned}$$

Trocando a ordem das somas, obtemos, para todo $i = 1, \ldots, m$

$$(\mathrm{TS})(\mathbf{v}_i) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[S]_{ji}[T]_{kj}\mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n}[T]_{kj}[S]_{ji}\right)\mathbf{w}_k. \tag{9.155}$$

Sendo a representação

$$(\mathrm{TS})(\mathbf{u}_i) = \sum_{k=1}^{r}[M]_{ki}\mathbf{w}_k, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{9.156}$$

única, obtemos das equações (9.155) e (9.156)

$$[M]_{ki} = \sum_{j=1}^{n}[T]_{kj}[S]_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, r.$$

Logo, $M = TS$. $\square$

Exemplo 9.72. Consideremos as aplicações lineares $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ e $\mathrm{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definidas nos Exemplos 9.69 e 9.71, correspondentemente. A aplicação composta TS foi encontrada no Exemplo 8.67,

$$(\mathrm{TS})(u, v) = (u + v, u - v, u, v).$$

A matriz M de TS (relativa a escolha das bases canônicas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^r$) podemos encontrar usando a Definição 9.39,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, podemos encontrar a mesma matriz multiplicando a matriz T da aplicação linear T (ver o Exemplo 9.70) pela matriz S da aplicação linear S (ver o Exemplo 9.69). Com efeito, segue do Teorema 9.48 que $M = TS$.

9.4 Matrizes associadas a operadores lineares

A associação de matrizes a operadores lineares (ou, seja, a aplicações lineares de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ no mesmo espaço $\mathcal{V}$) é um caso particular importante. Quando se trata de aplicações de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$ podemos usar podemos usar uma única base no domínio e no contradomínio, porque o espaço vetorial $\mathcal{V}$ é ao mesmo tempo o domínio e o contradomínio da aplicação.

9.4.1 Matriz de um operador linear relativa a uma base

Definição 9.40. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$, sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{V}$. Seja A : $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ uma aplicação linear. A matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

cujas entradas são os coieficientes nas representações

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathrm{A}(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\dots\dots\dots \\ \mathrm{A}(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{9.157}$$

e chamada de **matriz do operador** A **relativa a base** B (ou, simplesmente, matriz do operador A na base B).

Exemplo 9.73. Seja o operador $\mathrm{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathrm{A}(x, y, z) = (x + y + z, y - 2z, x + 3y - z). \tag{9.158}$$

Para achar a matriz de A na base ordenada canônica $B = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$ substituimos o vetor (x, y, z) na eq. (eq10-6) por e_1, e_2, e_3, obtendo

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(e_1) &= \mathrm{A}(1,0,0) = (1,0,1) &&= (1,0,0) + (0,0,1), \\ \mathrm{A}(e_2) &= \mathrm{A}(0,1,0) = (1,1,3) &&= (1,0,0) + (0,1,0) + 3(0,0,1), \\ \mathrm{A}(e_3) &= \mathrm{A}(0,0,1) = (1,-2,-1) &&= (1,0,0) - 2(0,1,0) - (0,0,1). \end{aligned}$$

Usando a Definição9.40 encontramos que a matriz A do operador A na base B é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicações lineares e matrizes

Sendo $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita, $n \geq 1$, e dada uma base B de $\mathcal{V}$, podemos associar ao operador identidade $I_{\mathcal{V}}$ uma matriz. Um resultado importante é, que, nesse caso, a matriz não depende da escolha da base.

Corolário 9.14. Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base no espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão finita $n \geq 1$. Então a matriz do operador $I_{\mathcal{V}}$ é a matriz identidade I_n.

Demonstração. Denotaremos por A a matriz do operador $I_{\mathcal{V}}$ na base B. Sendo $I_{\mathcal{V}}(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j$, encontramos, usando a Definição 9.40, que

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Então, $A = I_n$. □

9.4.2 Composição de operadores e multiplicação de matrizes

Corolário 9.15. Sejam S e T operadores lineares em $\mathcal{V}$ onde $\mathcal{V}$ é de dimensão finita, $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$. Suponhamos que B uma base ordenada de $\mathcal{V}$ e que S e T são asmatrizes na base B de S e T, correspondentemente. Então, a matriz do operador TS na base B é dada pelo produto TS.

Demonstração. Imediata, do Teoréma 9.48. □

Aplicação inversa

Teorema 9.49. Suponhamos que $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Sejam B uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Denotaremos por T a matriz de T na base B.

(a) Se T for invertível, então a matriz T é invertível e T^{-1} será a matriz do operador T^{-1} na base B.

(b) Se T for invertível, então T é invertível e T^{-1} será a matriz da aplicação inversa T^{-1} na base B.

Demonstração. (a) Suponhamos que T é invertível. Denotaremos por A a matriz do operador T^{-1} na base B. Sendo $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T} = \mathrm{I}_{\mathcal{V}}$ obtemos, usando o Teorema 9.48 e o Corolário 9.13,

$$AT = I_n.$$

De modo análogo provamos que $TA = I_n$. Logo, T é invertível e $A = T^{-1}$.
(b) Supondo que T é invertível, seja S o operador cuja matriz na base B é T^{-1}. Usando o Teorema 9.48 obtemos

$$\mathrm{ST} = \mathrm{TS} = \mathrm{I}_{\mathcal{V}}.$$

Logo, T é invertível e $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{S}$. □

9.4.3 Mudança da base

Aparentemente, não há motivos para privilegiar uma ou outra base em um espaço vetorial. No entanto, em vários problemas uma escolha adequada da base pode simplificar o cálculo. Por exemplo, a matriz de um dado operador linear pode ser mais "simples" em uma base do que em uma outra. Que forma da matriz deve ser considerada "simples", depende do problema a ser resolvido. Pode ser uma forma diagonal, triangular, ou, simplesmente, uma matriz com um número maior de entradas nulas. Independemente da forma particular "simples" (ou desejável), frequentemente é necessário, partindo da matriz de um operador em uma dada base, obter a matriz do mesmo operador em uma base nova.

A representação de operadores por matrizes é um método eficiente. No entanto, uma parte dos operadores em um dado problema podem estar definidos pelas matrizes que os representam em uma base, enquanto outros operadores podem ser dados pelas matrizes relativas a uma segunda base. Uma transformação de (pelo menos) uma parte das matrizes que representam os operadores pode se tornar necessária.

Finalmente, o problema de transformação da matriz de uma operador linear na mudança de base é importante em estudos daquelas propriedades do operador que não dependem da escolha particular da base.

Teorema 9.50. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ são bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e que A é a matriz de mudança de base de B para B'. Sejam T e T' as matrizes do operador T em relação às bases B e B'. Então

$$T' = A^{-1}TA.$$

Demonstração. Sendo A a matriz da mudança de base de B para

B', vale

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathbf{v}'_j) &= \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n}[A]_{ij}\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}[A]_{ij}\mathrm{T}(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}[A]_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}[T]_{ki}\mathbf{v}_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[T]_{ki}[A]_{ij}\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[T]_{ki}[A]_{ij}\left(\sum_{m=1}^{n}[A^{-1}]_{mk}\mathbf{v}'_m\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[T]_{ki}[A^{-1}]_{ij}\left(\sum_{m=1}^{n}[A^{-1}]_{mk}\mathbf{v}'_m\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[A^{-1}]_{mk}[T]_{ki}[A]_{ij}\mathbf{v}'_m.
\end{aligned}$$

Trocando a ordem das soma nessa expressão, obtemos

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}'_j) = \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{mk}[T]_{ki}[A]_{ij}\right)\mathbf{v}'_m. \tag{9.159}$$

Como

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}'_j) = \sum_{m=1}^{n}[T']_{mj}\mathbf{v}'_m, \tag{9.160}$$

e a matriz T' do operador T na base B' é única, concluimos que

$$[T']_{mj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[A^{-1}]_{mk}[T]_{ki}[A]_{ij},$$

logo, $T' = A^{-1}TA$. $\square$

Matrizes semelhantes

Definição 9.41. Sejam A e B matrizes em $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que a matriz B é semelhante à matriz A, se existir uma matriz não-singular Q em $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tal que

$$B = Q^{-1}AQ.$$

ATIV. 9.47. Suponhamos que A, B, C são matrizes em $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mostre que

1. A é semelhante a A;

2. se B é semelhante a A, então A é semelhante a B;

3. se B é semelhante a A e C é semelhante a B, então C é semlhante a A.

Tendo essas três propriedades, a relação "é semelhante a" é uma relação de equivalencia, portanto, divide as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ em classes de equivalência não-vazias e disjuntas.
O Teorema 9.50 diz que as matrizes que representam um operador linear em duas bases B e B' são *matrizes semelhantes.*

9.4.4 Determinante de um operador linear

Proposição 9.23. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Sejam B e B' base em $\mathcal{V}$. Suponhamos que em operador linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é representado pelas matrizes T e T' respectivamente. Então,

$$\det T' = \det T.$$

Demonstração. Seja A a matriz da mudança de base de B para B'. Usando o Teorema 9.50 obtemos

$$\begin{aligned} \det T' &= \det(A^{-1}TA) = \det(A^{-1}) \cdot \det T \cdot \det A \\ &= (\det A)^{-1} \cdot \det T \cdot \det A = \det T. \end{aligned}$$

□

Como o valor do determinante da matriz de um operador linear não depende da escolha da base, este valor é uma característica apenas do operador.

Definição 9.42. Seja $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. O determinante $\det T$ da matriz do operador T relativa a uma base B de $\mathcal{V}$ se diz **determinante do operador linear** T e é indicada por $\det \mathrm{T}$.

Teorema 9.51. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Um operador linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathrm{T} \neq 0$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $\det \mathrm{T} \neq 0$. Se T for a matriz de T relativa a uma base ordenada

$$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

de $\mathcal{V}$, então

$$\det T = \det \mathrm{T} \neq 0$$

e, pelo Teorema 6.29, a matriz T é invertível. Usando o Corolário 9.14 e o Teorema 9.48, encontramos que o operador S, definido pelas equações

$$\mathrm{S}(\mathbf{v}_i) = [T^{-1}]_{1i}\mathbf{v}_1 + \cdots + [T^{-1}]_{ni}\mathbf{v}_n, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

é o inverso do operador T.
(ii) Supondo que T é invertível indiquemos por S a matriz do operador T^{-1} relativa à base B. Usando o Teorema 9.48 e o Corolário 9.14 encontramos

$$ST = I_n. \tag{9.161}$$

Calculando o determinante dos ambos os membros da eq. (9.161) obtemos pelo Teorema 6.22

$$(\det S) \cdot (\det T) = 1.$$

Logo, $\det T \neq 0$. □

9.5 Conclusão

O método de representação de aplicações lineares por matrizes freqüêntemente é a maneira mais conveniente de trabalhar com aplicações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita.

9.6 Resumo

Definimos o conceito de matriz de uma aplicação linear relativa a uma escolha das bases no domínio e no contradomínio da aplicação linear. Apresentamos exemplos. Mostramos que o espaço das aplicações lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ é isomorfo ao espaço vetorial das matrizes $m \times n$, onde $n = \dim \mathcal{V}$ e $m = \mathcal{W}$. Mostramos que a uma composição de aplicações corresponde o produto das matrizes representantes. Vimos que na mudança da base a matriz de um operador linear é transformada em uma matriz semelhante à original.

9.7 Glossário

determinante de um operador linear Definição 9.42.

matriz de um operador linear relativa a uma base Definição 9.40.

matriz de uma aplicação linear relativa a uma escolha das bases Definição 9.39.

matrizes semelhantes Definição 9.41.

9.8 Próxima aula

O tema da próxima aula são os autovalores e os autovetores dos operadores lineares e o problema da diagonalização de um operador linear.

9.9 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.