Autovalores e autovetores

10

AULA

META

- Introduzir os conceitos de autovalor, autovetor, polinômio catracterístico e diagonalização.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar o polinômio característico para encontrar os autovalores de um operador linear;
- dado um autovalor, encontrar autovetores associados a ele;
- diagonalizar um operador linear em um espaço vetorial de dimensão n quando o operador tem n autovalores distintos.

PRÉ-REQUISITOS

- Sistemas de equações lineares.
- Espaços vetoriais; base e dimensão.
- Determinantes; propriedades dos determinantes.
- Aplicações lineares; operações com aplicações lineares, matrizes de aplicações lineares.

10.1 Introduction

As matrizes diagonais $n \times n$ formam um subconjunto de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ fechado em relação às operações com matrizes. Além disso, uma matriz $n \times n$ diagonal tem no máximo n entradas diferentes de zero e a multiplicação de matrizes diagonais é uma tarefa fácil. Um operador linear é representado por matrizes diferentes em bases diferentes. Dado um operador linear T em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão finita, existe uma base de $\mathcal{V}$ na qual a matriz do operador é diagonal? Este é o problema da diagonalização de um operador linear. Os conceitos de autovalo e autovetor surgem naturalmente na tentativa de resolver o problema.

10.2 Autovalores e autovetores

10.2.1 Autovalores e autovetores de um operador linear

Definição 10.43. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Dizemos que um elemento não-nulo $\mathbf{x}$ de $\mathcal{V}$ é um **autovetor** de T se existir um escalar λ em $\mathbb{K}$ tal que

$$\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

O escalar λ é chamado **autovalor** correspondente ao autovetor $\mathbf{x}$. Dizemos também que o autovetor $\mathbf{x}$ é associado ao autovalor λ.

Exemplo 10.74. Seja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathrm{T}(x, y) = (y, x)$$

para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. O vetor $\mathbf{u} = (1, 1)$ é um autovetor de S.

Com efeito,

$$\mathrm{S}(\mathbf{u}) = \mathrm{S}(1,1) = (1,1) = \mathbf{u}.$$

Logo, $\mathbf{u}$ é um autovetor de S associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Outrossim, o vetor $\mathbf{v} = (1,-1)$ é um autovetor de S associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Proposição 10.24. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Suponhamos que $\mathbf{x}$ é um autovetor de $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ associado a um dado autovalor λ. Então, para todo $\alpha \neq 0$ em $\mathbb{K}$ o vetor $\alpha\mathbf{x}$ é um autovetor de T associado ao mesmo autovalor λ.

Demonstração. Seja α um escalar não-nulo. Sendo $\mathbf{x} \neq 0_{\mathcal{V}}$, o vetor $\alpha\mathbf{x}$ é um vetor não-nulo. Alem disso,

$$\mathrm{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda\left(\alpha\mathbf{x}\right).$$

Logo, $\alpha\mathbf{x}$ é um autovetor associado ao autovalor λ. □

Existem operadores lineares que não possuem autovalores e autovetores.

Exemplo 10.75. Seja $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathrm{T}(x,y) = (-y,x)$$

para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$. Para que um número real λ seja um autovalor te T tem que existir um vetor não-nulo (x,y) em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = \lambda(x,y). \tag{10.162}$$

A equação (10.162)é equivalente ao sistema linear de equações para x e y,

$$\left\{\begin{array}{rrl} -\lambda x & -y & = 0 \\ x & -\lambda y & = 0 \end{array}\right. \tag{10.163}$$

Autovalores e autovetores

A matriz do sistema (10.163)

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

tem determinante $\det A = \lambda^2 + 1$ que não se anula para nenhum valor real de λ. Usando o Teorema 6.23 concluimmos que a única solução do sistema (10.163) é $x = y = 0$, qualquer que seja o valor de λ. Como um autovetor tem que ser não-nulo, concluimos que T não possui autovalores e autovetores.

O próximo exemplo mostra que a existência de autovalores e autovetores pode depender das propriedades do corpo dos escalares.

Exemplo 10.76. Seja $\mathrm{U} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$\mathrm{U}(x, y) = (-y, x)$$

para todo (x, y) em $\mathbb{C}^2$. O vetor $\mathbf{u} = (1, i)$ é um autovetor de U correspondente ao autovalor $\lambda_1 = i$. O vetor $\mathbf{v} = (1, -i)$ é um autovetor de U correspondente ao autovalor $\lambda_2 = -i$.

10.2.2 Autovalores e autovetores de uma matriz quadrada

Definição 10.44. Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Uma matriz X em $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ se diz **autovetor** da matriz A se

(i) X é não-nula;

(ii) existe um escalar λ tal que

$$AX = \lambda X.$$

O escalar λ é chamado de **autovalor** da matriz A.

Teorema 10.52. Seja T um operador linear em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão finita $n \geq 1$. Suponhamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Então um vetor $\mathbf{x}$ em $\mathcal{V}$ é um autovetor de T correspondente ao autovalor λ se, e somente se, a matriz $n \times 1$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

das coordenadas do vetor $\mathbf{x}$ na base B é um autovetor correspondente ao autovalor λ da matriz T do operador T relativa à base B.

Demonstração. (i) Suponhamos que X é um autovetor da matriz T. Isto é, $X \neq 0$ e existe um escalar λ tal que

$$TX = \lambda X.$$

O vetor $\mathbf{x}$ é não-nulo, sendo a matriz X das coordenadas do vetor não-nula. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathbf{x}) &= \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{T}(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} [T]_{ji} \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} [T]_{ji} x_i\right) \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda x_j \mathbf{v}_j = \lambda \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{x}$ é um autovetor de T.

(ii) Suponhamos que $\mathbf{x}$ é um autovetor de T, logo X é uma matriz não-nula. Alem disso,

$$\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} [T]_{ji} x_i\right) \mathbf{v}_j. \tag{10.164}$$

Sendo $\mathbf{x}$ um autovetor correspondente ao autovalor λ, vale

$$\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} (\lambda x_i) \mathbf{v}_i. \tag{10.165}$$

Usando a unicidade da representação do vetor $\mathrm{T}(\mathbf{x})$ por uma commbinação linear dos vetores da base, obtemos das equações (10.164) e (10.165)

$$\sum_{i=1}^{n}[T]_{ji}x_i = \lambda x_j.$$

Concluimos que X é um autovetor da matriz T. $\square$

10.3 Polinômio característico

10.3.1 Polinômio característico de uma matriz quadrada

Vamos obter agora uma *condição suficiente* para que um escalar λ_0 seja uma autovalor de uma matriz quadrada.

Seja $T = (t_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ é suponhamos que λ_0 é um autovalor de T. Então, existe uma matriz X ($n \times 1$, não-nula, com entradas em $\mathbb{K}$), tal que

$$TX = \lambda_0 X.$$

Esta equação matricial é equivalente à equação

$$(T - \lambda_0 I_n)X = 0. \tag{10.166}$$

Como a eq. (10.166) tem uma solução não-nula (X é um autovetor, logo é não-nula), obtemos, usando ....

$$\det(T - \lambda_0 I_n) = 0.$$

Concluimos que λ_0 é um autovalor *somente se* λ_0 é uma solução para a equação

$$p(\lambda) = 0,$$

onde

$$p(\lambda) = \det(T - \lambda I_n). \qquad (10.167)$$

A função p definida pela eq. (10.167) é, obviamente, uma função polinomial.

Definição 10.45. Seja T ua matriz $n \times n$. O polinômio p definido pela eq. (10.167) é chamado de **polinômio característico da matriz** T.

Proposição 10.25. O polinômio característico de uma matriz $n \times n$ é de grau n.

ATIV. 10.48. Mostre a Proposição 10.25.
Dica. Use a definição do determinante.

10.3.2 Polinômio característico de um operador linear

Definição 10.46. Suponhamos que $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial de dimensão finita e T é um operador linear em $\mathcal{V}$. O polinômio definido por

$$p(\lambda) = \det(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}_{\mathcal{V}})$$

é chamado de **polinômio característico do operador** T.

Teorema 10.53. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 0$ sobre $\mathbb{K}$. Suponhamos que $:\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é um operador linear e λ_0 é um elemento de $\mathbb{K}$. Então, λ_0 é um autovalor de T se, e somente se, λ_0 é uma raiz do polinômio característico do operador T.

Demonstração. (i) Suponhamos que λ_0 é uma raiz do polinômio característico do operador T. Logo,

$$\det(\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I}_{\mathcal{V}}) = 0,$$

portanto, pelo Teorema 9.51, o operador $\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I}_{\mathcal{V}}$ *não é* invertível. Usando o Teorema 7.33 obtemos

$$N(\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I}_{\mathcal{V}}) \neq \{0_{\mathcal{V}}\}.$$

Logo, existe em $\mathcal{V}$ um vetor não-nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$(\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I}_{\mathcal{V}})(\mathbf{v}) = 0_{\mathcal{V}}, \tag{10.168}$$

donde

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \lambda_0 \mathbf{v}. \tag{10.169}$$

Concluimos que λ_0 é um autovalor de T.
(ii) Suponhamos que λ_0 é um autovalor do operador linear T. Então existe um vetor $\mathbf{v} \neq 0_{\mathcal{V}}$ em $\mathcal{V}$ tal que valem as equações (10.168) e (10.169). Logo,

$$N(\mathrm{T}) \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$$

e, pelo Teorema 7.33 concluimos que

$$p(\lambda_0) = \det(\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I}_{\mathcal{V}}) = 0.$$

□

Corolário 10.16. Seja T uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é um autovalor da matriz T se, e somente se, λ é uma raiz do polinômio característico p da matriz T.

ATIV. 10.49. Prove o Corolário 10.16.

10.3.3 Existência de autovalores e autovetores

Alguns operadores lineares não possuem autovetores e autovalores.

Exemplo 10.77. Consideremos o operador linear $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathrm{T}(x, y) = (-y, x).$$

Na base ordenada $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ ele é representado pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.170}$$

Logo, o polinômio característico do operador T é dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Este polinômio não tem raizes reais. Portanto, pelo Teorema 10.53 o operador linear T não tem autovalores.

ATIV. 10.50. Mostre que a matriz do operador T definido no Exemplo 10.77 relativa a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é dada pela eq. (10.170).

Determinando se um operador linear, ou uma matriz quadrada, tem autovalores (e, conseqentemente, autovetores), temos que prestar atenção às propriedades do corpo dos escalares.

Exemplo 10.78. Consideremos a matriz T definida pela eq. (10.170) como sendo uma matriz do espaço $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ou, seja, uma matriz com entradas complexas. O polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Ele tem duas raizes complexas, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Usando o Corolário 10.16 concluimos que esses números são autovalore da matriz T.

Autovalores e autovetores

Autovetores da matriz T podemos encontrar resolvendo as sistemas lineares correspondentes. Seja

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = i$. Usando a Definição 10.44, obtemos

$$\begin{cases} -ix_1 & -x_2 & = 0 \\ x_1 & -ix_2 & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$X = \begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{10.171}$$

O vetor X dado pela eq. 10.171 é um autovetor de T (associado ao autovalor $\lambda_1 = i$) quando $z \neq 0$.

Proposição 10.26. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{C}$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Então, existe um autovetor de T.

Demonstração. O polinômio característico de T é um polinômio com coeficientes complexos de uma variável complexa. Um tal polinômio sempre tem pelo menos uma raiz no corpo dos complexos. Pelo Teorema 10.53 toda raiz do polinômio característico é um autovalor do operador linear T. Concluimos que um autovalor e, correspondentemente, um autovetor de T existem. □

10.3.4 Propriedades dos autovetores

Quando é que uma *combinação linear* de autovetotores de um operador linear T representa um autovetor do mesmo operador? A resposta é dada nas seguintes proposições.

Teorema 10.54. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ autovetores do operador linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ associados ao autovalor λ. Indiquemos por $\mathcal{W}$ o subespaço gerado pelo conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Então todo elemento não-nulo de W é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Demonstração. Seja $\mathbf{w}$ em $\mathcal{W}$, isto é,

$$w = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são escalares. Aplicando o operador T ao vetor w, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\mathbf{w}) &= \mathrm{T}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m) = \alpha_1 \mathrm{T}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_m \mathrm{T}(\mathbf{v}_m) \\ &= \alpha_1 \lambda \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \lambda \mathbf{v}_m = \lambda \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Se, além disso, $\mathbf{w} \neq 0$, concluimos, usando a Definição 10.43 que $\mathbf{w}$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ. □

Definição 10.47. Sejam $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear e λ um autovalor de T. O subespaço V_λ gerado por todos os autovetores de T associados a λ é denominado **espaço próprio de T associado a** λ.

Teorema 10.55. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Suponhamos que $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ são autovalores distintos de T e seja $\mathbf{v_i}$ um autovetor associado ao autovalor λ_i para $i = 1, \ldots, n$. Então o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é linearmente independente.

Demonstração. A prova é feita por indução. Os autovetores são, por definição, não-nulos. Portanto, para $m = 1$ o teorema é válido. Admitimos que o teorema é verdadeiro para $m = k$. Devemos mostrar que ele é valido para $m = k+1$. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$ autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ respectivamente. Consideremos uma representação do vetor nulo por uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = 0_{\mathcal{V}}. \tag{10.172}$$

Aplicando o operador T aos ambos os membros da eq. (10.172), obtemos

$$\lambda_1\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k\mathbf{v}_k + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = 0_{\mathcal{V}}. \tag{10.173}$$

Multiplicando a eq. (10.172) por λ_{k+1}, obtemos

$$\lambda_{k+1}\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\alpha_k\mathbf{v}_k + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = 0_{\mathcal{V}}. \tag{10.174}$$

Subtraindo a eq. (10.174) da eq. (10.173), obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}\alpha_k\mathbf{v}_k = 0_{\mathcal{V}}.$$

A combinação linear no primeiro membro é trivial, porque o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente. Sendo os autovalores distintos, vale

$$\lambda_i - \lambda_{k+1} = 0, \qquad i = 1, \ldots k.$$

Logo, $\alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0$. Pondo $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ na eq. (10.172), obtemos que, também, $\alpha_{k+1} = 0$. Concluimos que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}\}$ é linearmente independente. $\square$

10.4 Diagonalização

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Suponhamos que $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é um operador linear. Suponhamos que existe um conjunto B linearmente independente de n autovetores do operador T,

$$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}.$$

Então, B é uma base de B. Aplicando T a cada um dos vetores da base B obtemos

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}_j) = \lambda_j \mathbf{v}_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{10.175}$$

onde $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ são os autovalores correspondentes (não nescessariamente distintos) do operador T. Usando a eq. (10.175) obtemos que a matriz T do operador T na base B é diagonal:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definição 10.48. Dizemos que um operador linear T é **diagonalizado** na base B quando a matriz T do operador T relativa à base B é uma matriz diagonal. Dizemos que um operador linear é **diagonalizável** se *existir* uma base na qual ele é diagonalizado.

Proposição 10.27. Um operador linear $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ se diagonaliza em uma base B do espaço vetorial $\mathcal{V}$ se, e somente se, todos os vetores da base B são autovetores de T.

ATIV. 10.51. Mostre a Proposição 10.27.

Existem vários motivos teóricos como, também, motivos de natureza "técnica" para estudar os operadores *diagonalizáveis* e os procedimentos de *diagonalização*. Obviamente, estamos mais interessados naquelas propriedades dos operadores que não dependem da escolha particular da base no espaço vetorial. No entanto, uma escolha apropoiada da base pode simplificar alguns cálculos significamente.

Suponhamos que um operador linear T em um espaço vetorial de dimensão finita é definido pela matriz do operador relativa a uma dada base B. Se esta matriz não for diagonal, surgem duas perguntas em relação a diagonalização do operador.

1. O operador é diagonalizável?

2. Se for diagonalizável, como encontrar a matriz da mudança da base B para uma base na qual o operador é diagonalizado?

Antes de mais nada, existem operadores lineares não-diagonalizáveis. No Exemplo 10.75 apresentamos um operador que não possui autovalores e, portanto, não pode ser diagonalizado. Uma ampliação do corpo dos escalares no Exemplo 10.76 resolveu o problema. No entanto, algum operadores não são diagonalizáveis por razões mais profundas.

Exemplo 10.79. O operador linear $\mathrm{T} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definido por

$$T(x, y) = (x, 2x + y)$$

não é diagonalizável, qualquer que seja o corpo $\mathbb{K}$. Com efeito, o polinômio característico de T

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

tem uma raiz dupla, $\lambda = 1$, mas o subespaço próprio $\mathcal{V}$ correspondente ao autovalor $\lambda = 1$ é de dimensão um.

ATIV. 10.52. Ache um autovetor do operador T no Exemplo 10.79 associado ao autovalor $\lambda = 1$. Mostre que não existem dois autovetores, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, associados ao único autovalor de T tais que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ seja linearmente independente.

A classe dos operadores diagonalizáveis, por seu lado, é bastante ampla. Uma das situações nos quais um operador linear é diagonalizável é tratado no teorema a seguir.

Teorema 10.56. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$. Suponhamos que $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é um operador linear cujo polinômio característico possui n raizes distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Então T é diagonalizável.

Demonstração. Usando o Teorema 10.53 obtemos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de T. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ autovetores associados aos autovalores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivamente. Sendo os autovalores de T distintos, o conjunto de n vetores

$$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

é linearmente independente. Pelo Corolário 4.1 B é uma base de $\mathcal{V}$. Sendo B uma base de autovetores de T, pela Proposição 10.27 o operador T é diagonalizado na base B. $\square$

Exemplo 10.80. O operador linear $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathrm{T}(x, y) = (x - 2y, -2x + 3y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

é representado na base padrão $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

O polinômio caracterísitico de T

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1$$

possui duas raizes reais e distintas,

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}.$$

Pelo Teorema 10.56 o operador T é diagonalizável. Existe uma base B' de $\mathbf{R}2$ tal que a matriz do operador linear T relativa a base B' é dada por

$$T' = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Como encontrar essa base? O teorema a seguir dá a resposta.

Teorema 10.57. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão $\dim \mathcal{V} = n \geq 1$ e $\mathrm{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Suponhamos que $T = (t_{ij})$ é a matriz do operador T relativa a uma dada base

$$B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de $\mathcal{V}$. Suponhamos que a matriz T possui n autovetores

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ \ldots \\ q_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad Q_n = \begin{pmatrix} q_{1n} \\ \ldots \\ q_{nn} \end{pmatrix},$$

associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente (os autovalores não são necessariamente distintos). Suponhamos ainda que o conjunto $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ é linearmente independente. Então

(i) para todo $j = 1, \ldots, n$ o vetor

$$\mathbf{v}_j = q_{11}\mathbf{u}_1 + \cdots + q_{n1}\mathbf{u}_n \tag{10.176}$$

é um autovetor do operador T associado ao autovalor λ_j;

(ii) o conjunto

$$B' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

é uma base de $\mathcal{V}$;

(iii) na base B' o operador T é diagonalizado;

(iv) a matriz de mudança da base de B para B' é $Q = (q_{ij})$, isto é, as matrizes Q_j $(j = 1, \ldots, n)$ são as colunas da matriz da mudança de base Q.

Demonstração. Aplicando T ao vetor $\mathbf{v}_j$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathbf{v}_j) &= \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij}\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\mathrm{T}(\mathbf{u}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ki}q_{ij}\right)\mathbf{u}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_j q_{kj}\mathbf{u}_k = \lambda_j \mathbf{v}_j.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{v}_j$ é um autovetor associado ao autovalor λ_j.

Para mostrar que o conjunto B' é linearmente independente, consideremos uma combinação linear dos vetores do conjunto representando o vetor nulo:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j = 0.$$

Substuindo nesta equação a representação (10.176) para $\mathbf{v}_j$ e trocando a ordem das somas, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_{ij}\right)\mathbf{u}_i = 0.$$

Sendo B um conjunto linearmente independente, todos os coeficientes nessa combinação linear são iguais a zero:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_{ij} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10.177}$$

As equações (10.177) são eqüivalentes à equação matricial

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Q_j = 0.$$

O conjunto $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ é linearmente independente, portanto,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Concluimos que o conjunto B' é linearmente independente. Finalmente, seque da representação (10.176) que $Q = (q_{ij})$. $\square$

10.5 Conclusão

A diagonalização de um operador linear, quando é possível, é um método eficaz. No entanto, existem operadores lineares não-diagonalizáveis. Um operador em um espaço de dimensão n que tem n autovalores distintos é diagonalizável.

10.6 Resumo

Definimos os conceitos de autovalor e autovetor de um operador linear e de uma matriz quadrada. Mostramos que existe uma correspondência biunívoca entre os autovetores de um operador e os autovetores da matriz do operador. Definimos o polinômio característico de uma matriz quadrada e de um operador linear. Formulamos o problema de diagonalização de um operador linear. Mostramos que todo operador em um espaço de dimensão n é diagonalizável. Apresentamos um procedimento para a diagonalização do operador.

10.7 Glossário

autovalor de um operador linear Definição 10.43.

autovetor de um operador linear Definição 10.43.

autovalor de uma matriz quadrada Definição 10.44.

autovetor de uma matriz quadrada Definição 10.44.

espaço próprio de um operador associado a um autovalor Definição 10.47.

polinômio característico de uma matriz quadrada Definição 10.45.

polinômio característico de um operador linear Definição 10.46.

10.8 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.