Capítulo 2

Ortogonalidade e Processo de Gram-Schmidt

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves de Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 2: Ortogonalidade e Processo de Gram-Schmidt

Meta

Mostrar para o aluno um algoritmo que fornece bases ortonormais a partir de bases arbitrárias.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de verificar a ortogonalidade entre elementos de uma espaço vetorial bem como transformar uma base qualquer deste espaço numa base ortonormal.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I.

2.1 Introdução

O fato de dotarmos um espaço vetorial com um produto interno permite-nos definir a estrutura de um conjunto ortogonal e toda sua importância na simplificação da representação de um elemento deste espaço bem como na representação de transformações lineares sobre este espaço através do uso de bases ortonormais. Nesse intuito, apresentamos um processo para construir bases ortonormais.

2.2 Ângulo entre Vetores e Ortogonalidade

Prezado aluno, nesta seção, mostraremos como estender a idéia de vetores ortogonais, vista no curso de Vetores e Geometria Analítica para espaços vetoriais mais gerais. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos permite definir ângulo entre dois vetores quaisquer em um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{R}$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Com efeito, se u e v são elementos não-nulos de V, então $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$ e assim

$$-\|u\|\|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\|\|v\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1. \tag{2.1}$$

Consequentemente, existe $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$. Estabelecemos então a seguinte definição.

Definição 2.1 (Ângulo entre vetores)**.** Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $u, v \in V$ vetores não-nulos. Definimos o ângulo entre u e v por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right).$$

Obs 2.1. Encontrar $\theta = \arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right)$ é equivalente a encontrar o número θ tal que $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

Obs 2.2. Quando V é um espaço vetorial com produto interno Hermitiano, o módulo de $\langle u, v\rangle$ (encontrado no Teorema 1.1) não pode ser tratado como em (2.1), pois neste espaço, $|\langle u, v\rangle|$ significa o módulo do número complexo $\langle u, v\rangle$. Pense nisso!!!

Exemplo 2.1. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e sejam $u = (1, 0)$ e $v = (1, 1)$ vetores em V. Desde que $\langle u, v\rangle = \langle (1, 0), (1, 1)\rangle = 1$, $\|u\| = \sqrt{\langle (1, 0), (1, 0)\rangle} = 1$ e $\|v\| = \sqrt{\langle (1, 1), (1, 1)\rangle} = \sqrt{2}$, segue que $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Agora, para $w = (0, 1)$, temos que $\langle u, w\rangle = \langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 0$ e $\|w\| = \sqrt{\langle (0, 1), (0, 1)\rangle} = 1$. Consequentemente, $\theta = \frac{\pi}{2}$ pois

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, w\rangle}{\|u\|\|w\|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0.$$

Exemplo 2.2. Sejam $V = C([0, 1])$ e $f(t) = t$, $g(t) = 1 \in V$. É possível calcular o angulo entre f e g. Como visto no Exemplo, $\|f\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $\|g\| = 1$, e desde que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$, segue que $\theta = \arccos\left(\dfrac{\langle f, g\rangle}{\|f\|\|g\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}\cdot}1}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

2.2.1 Definição de Vetores Ortogonais e Exemplos

Agora, estamos prontos para definir quando dois vetores em um espaço vetorial com produto interno formam um ângulo de 90º ou $\frac{\pi}{2}$ radianos. Usando a Definição 2.1 e o fato que $\theta \in [0, \pi]$, temos que

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

Mais precisamente, podemos adicionar ao conteúdo a seguinte

Definição 2.2 (Vetores Ortogonais)**.** Sejam $u, v \in V$. Dizemos que u e v são ortogonais (ou perpendiculares) se $\langle u, v\rangle = 0$. Denotamos este fato por $u \perp v$.

Obs 2.3 (Ortogonalidade em $\mathbb{C}$)**.** Se V é um espaço vetorial com produto interno Hermitiano, não podemos definir ângulo entre dois vetores como na Definição 2.1 (ver observação 2.2). Porém, podemos definir vetores ortogonais, neste espaço, como na Definição 2.2.

Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Seja V um espaço com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ real. Então $\langle u, v\rangle = 0$ se, e somente se, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, onde $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\langle u, v\rangle = 0$. Segue da Definição 1.1, itens **i)** e **iii)**, que $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, onde na última igualdade usamos a hipótese do Teorema.

Reciprocamente, consideremos que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Vimos acima que,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

Portanto, das duas últimas igualdades, inferimos que $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$. Cancelando os termos iguais desta igualdade, obtemos $2\langle u, v\rangle = 0$. Por fim, $\langle u, v\rangle = 0$, como queríamos demonstrar. □

Obs 2.4. A recíproca do Teorema de Pitágoras, isto é, $\langle u, v\rangle = 0 \Leftarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ não é verdadeira no caso do produto interno ser Hermitiano. Tente justificar o por quê!!!

Exemplo 2.3. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e consideremos os vetores $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$ e $w = (0, 1)$. Então $\|u\|^2 = \langle (1, 1), (1, 1)\rangle = 2$, $\|v\|^2 = \langle (1, 0), (1, 0)\rangle = 1$ e $\|w\|^2 = \langle (0, 1), (0, 1)\rangle = 1$. Assim sendo, $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ e como $u = v + w$, segue pelo Teorema de Pitágoras (ver Teorema 2.1) que $\langle v, w\rangle = 0$.

Exemplo 2.4. Seja $V = C([-1, 1])$ e consideremos os elementos $f(t) = t$ e $g(t) = 1$ em V. Desde que $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$, $\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1 dt = t|_{-1}^{1} = 2$ e $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$, segue pelo Teorema de Pitágoras (ver 2.1) que

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}.$$

2.2.2 Propriedades da Ortogonalidade

Vejamos algumas propriedades herdadas da definição de ortogonalidade

Proposição 2.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então são válidas as seguintes afirmações:*

i) $\mathbf{0} \perp v$, *para todo $v \in V$;*

ii) *Se $u \perp v$, então $v \perp u$;*

iii) *Se $u \perp v$, para todo $v \in V$, então $u = \mathbf{0}$, em palavras, o único vetor que é ortogonal a todos os vetores de V é o vetor nulo;*

iv) *Se $u \perp w$ e $v \perp w$, então $(u + v) \perp w$;*

v) *Se $u \perp v$, então $(\lambda u) \perp v$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Os itens **i)** e **iii)** é uma reformulação dos itens **ii)** e **iv)** da Proposição 1.1, repectivamente. Verifique! Vamos mostrar os demais itens.

ii) Se $u \perp v$, então $\langle u, v\rangle = 0$ e, consequentemente, $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle = 0$. Nesta penúltima igualdade usamos a comutatividade da Definição 1.1. Com isso, $v \perp u$.

iv) Se $u \perp w$ e $v \perp w$, então $\langle u, w\rangle = 0$ e $\langle v, w\rangle = 0$. Portanto, utilizando a Definição 1.1 (qual item?), obtemos $\langle (u + v), w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 0 + 0 = 0$. Assim, $(u + v) \perp w$.

v) Se $u \perp v$, então, $\langle u, v\rangle = 0$. Logo, $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = \lambda \cdot 0 = 0$, novamente pela Definição 1.1. Ou seja, $(\lambda u) \perp v$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Exercícios de Fixação

1. Achar o ângulo entre os seguintes pares de vetores do $\mathbb{R}^3$:

i) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$;

ii) $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$.

2. Achar o cosseno do ângulo entre u e v nos seguintes casos:

i) $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (0, 0, 1, 1)$ com o produto interno canônica em $\mathbb{R}^4$;

ii) $f(t) = 1 + t - t^2$ e $g(t) = 3t^2$, com o produto interno canônico para $C([0,1])$;

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com o produto interno definido por $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$, onde $\mathrm{tr}(X) = X_{11} + X_{22}$ e A^t é a matriz transposta de A.

3. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dados $u, v \in V$ ($v \neq \mathbf{0}$) e $\lambda = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$, mostrar que $(u - \lambda v) \perp v$.

4. Determinar $m \in \mathbb{R}$ a fim de que sejam ortogonais os vetores $u = (1, m+1, m)$ e $v = (m-1, m, m+1)$ do $\mathbb{R}^3$.

5. Mostrar que se u e v são tais que $\|u + v\| = \|u - v\|$, então $u \perp v$.

6. Em $\mathbb{R}^3$ defina o produto interno $\langle u, v \rangle := x_1 y_1 + 2x_2 y_2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Verificar se $u \perp v$, em relação a esse produto, nos seguintes casos:

i) $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$;

ii) $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 1)$;

iii) $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$.

7. Consideremos em V espaço formado pelos polinômios de grau menor ou igual a 2 com o produto interno canônico de $C([0,1])$. Nessas condições, para que valor $m \in \mathbb{R}$ temos $(f(t) = mt^2 - 1) \perp (g(t) = t)$?

8. Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ de norma igual a 2 que sejam ortogonais simultaneamente a $(2, 1, 2)$ e $(-1, 3, 4)$.

2.3 Conjuntos Ortonormais

Prezados alunos, nesta seção, trabalharemos para que uma base qualquer de um espaço vetorial com produto interno seja transformada em outra base, onde os respectivos vetores são dois a dois ortogonais e cada vetor, isoladamente, seja unitário. Esta nova base facilita, em muitos casos, as demonstrações dos resultados que estão por vir e os cálculos que aparecerão em vários exercícios deste material.

2.3.1 Definição e Exemplos

Definição 2.3. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que um subconjunto $X \subseteq V$ é ortonormal se

i) $u \perp v$, para todos $u, v \in X$ distintos;

ii) todo vetor de X é unitário, isto é, $\|v\| = 1$, para todo $v \in X$.

Obs 2.5 (Conjunto Ortogonal)**.** Quando um subconjunto X satisfaz o item **i)** dizemos que X é um conjunto ortogonal.

Obs 2.6. Note que X na Definição 2.3 não precisa ser subespaço de V.

Exemplo 2.5. A base canônica de $\mathbb{R}^2$, $X = \{(1,0), (0,1)\}$, é um conjunto ortonormal, pois $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 0$, $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$. O subconjunto $Y = \{(1,1), (1,-1)\}$ é ortogonal, mas não é ortonormal. De fato, $\langle (1,1), (1,-1) \rangle = 1 - 1 = 0$ e $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \neq 1$.

Exemplo 2.6. O subconjunto $X = \{1, 3t^2 - 1\}$ é um conjunto ortogonal, mas não ortonormal, pois $\langle 1, 3t^2 - 1 \rangle = \displaystyle\int_0^1 [3t^2 - 1] dt = 0$, porém

$$\|3t^2 - 1\| = \left(\int_0^1 (3t^2 - 1)^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (9t^4 - 6t^2 + 1) dt \right)^{1/2} = \frac{9}{5} - 1 \neq 1.$$

Exemplo 2.7. Seja $\mathbb{R}^n$. A base canônica de $\mathbb{R}^n$, $X = \{(1,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,...,1)\}$, é um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Para verificar esta afirmação siga os mesmos passos do exemplo 2.5.

Definição 2.4 (Base Ortonormal)**.** Seja V um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita. Uma base de V é dita ortonormal se esta for um conjunto ortonormal. Ou equivalentemente, se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é base de V, então

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Exemplo 2.8 (Base Ortonormal de $\mathbb{R}^2$)**.** Vimos no exemplo 2.5 que a base canônica de $\mathbb{R}^2$ é uma base ortonormal.

Exemplo 2.9 (Base Ortonormal em $\mathbb{R}^n$)**.** O conjunto X do exemplo 2.7 é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.10 (Base Não-ortonormal)**.** O conjunto Y do exemplo 2.5 é uma base. Porém não é ortonormal.

2.3.2 Processo de Gram-Schmidt

A pergunta que surge, neste momento, é: sempre existe uma base ortonormal para qualquer espaço vetorial com produto interno e dimensão finita? A resposta é afirmativa. O próximo resultado garante esta resposta ao afirmar que qualquer base de um espaço vetorial pode ser convertida numa base ortogonal. Normalizando os vetores dessa nova base, obtemos uma base ortonormal.

Teorema 2.2 (Teorema de Gram-Schmidt)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita $n > 0$. Seja $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Então existe uma base ortogonal $\gamma = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de V, onde $u_1 = v_1$ e*

$$u_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \tag{2.2}$$

para todo $j = 2, \cdots, n$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Se $n = 1$, então tomamos simplesmente $u_1 = v_1$. Considere agora $n > 1$ e suponhamos que todo espaço vetorial de dimensão $n - 1$ possui uma base ortogonal nos moldes do teorema. Assim, se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é base de V então $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}\}$ satisfaz a expressão 2.2 e nos resta verificar que

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \tag{2.3}$$

é não-nulo e ortogonal aos demais elementos $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$. Ora, se $u_n = \mathbf{0}$, então a expressão 2.3 implica que os elementos $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ são linearmente dependentes, o que é impossível, pois este conjunto é uma base de V. Logo, $u_n \neq \mathbf{0}$.

Agora, como

$$\langle u_n, u_j \rangle \;=\; \left\langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle v_n, u_j\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\
&= \langle v_n, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle v_n, u_j\rangle - \langle v_n, u_j\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

para todo $j = 1, ..., n-1,$, segue que $u_n \perp u_j$, para todo $j = 1, 2, ..., n-1$. N antepenúltima igualdade usamos o fato que $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}\}$ é um conjunto ortogonal. Logo, $\gamma = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ é uma base ortogonal de V e isto conclui a prova. □

Caro aluno, vejamos, em exemplos, como aplicar o Processo de Gram-Schmidt.

Exemplo 2.11. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e consideremos a base

$$\beta = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1), v_3 = (2, 2, 1)\}$$

(realmente é base? Verifique!). Então seguindo o Processo de Gram-Schmidt temos que $u_1 = v_1 = (1, 1, 0)$ e

$$
\begin{aligned}
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
&= (2, 0, 1) - \frac{2}{2}(1, 1, 0) \\
&= (1, -1, 1).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&= (2, 2, 1) - \frac{4}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, -1, 1) \\
&= \left(-\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, $\gamma = \left\{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = \left(-\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ obtida a partir da base β. Se quiséssemos uma base ortonormal, multiplicaríamos cada elemento da base γ pelo inverso de sua respectiva norma. Assim,

$$\delta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

Exemplo 2.12. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial dos polinomios com coeficientes reais de grau menor que ou igual a 2, e tomemos sobre ele o produto interno do exemplo 1.3 para o espaço $C([0,1])$. Seja $\beta = \{1, x, x^2\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ (Verifique que é base!). Vamos ortonormalizar β através do Processo de Gram-Schmidt. Sejam $v_1 = 1$, $v_2 = x$ e $v_3 = x^2$. Assim, $u_1 = 1$,

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ &= x - \frac{\langle x, 1\rangle}{1} 1 \\ &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{1} 1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2}\rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Logo, $\gamma = \{u_1 = 1, u_2 = x - \frac{1}{2}, u_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ é uma base ortogonal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Complete as contas para determinar uma base ortonormal.

Obs 2.7 (Comunicado)**.** Dedicados alunos, o Processo de Gram-Schmidt é de grande valia para o nosso curso. Portanto, sugiro que vocês pratiquem bastante como encontrar uma base ortonormal através deste.

A proposição abaixo mostra um outro caminho de verificar se um conjunto finito é linearmente independente. Mais precisamente,

Proposição 2.2. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Então todo conjunto ortogonal $X \subseteq V$ tal que $\mathbf{0} \notin X$ é linearmente independente.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, ..., v_m$ vetores em X e consideremos a combinação linear nula $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$. Devemos mostrar que a única solução para essa equação é $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$. Então $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m, v_1 \rangle = \langle \mathbf{0}, v_1 \rangle = 0$, nesta última desigualdade usamos a Proposição 1.1. Como X é um conjunto ortogonal, então $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ sempre que $i \neq j$ (ver observação 2.5). Através das propriedades da Proposição 1.2, obtemos

$$0 = \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_2, v_1 \rangle + ... + \lambda_m \langle v_m, v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle. \tag{2.4}$$

Mas $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$, pois $0 \notin X$ (ver Definição 1.1). Portanto, de (2.4), concluímos que $\lambda_1 = 0$. Analogamente, prova-se que $\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m = 0$. Isto garante que X é l.i.. $\square$

Obs 2.8. Se X é um conjunto ortogonal de V com n vetores, onde $\dim V = n$ (dimensão de V), então pela Proposição 2.2 temos que X é uma base de V (pois, X é l.i.).

Exemplo 2.13. O conjunto $X = \{(1,1), (1,-1)\}$ é l.i., pois X é ortogonal (ver exemplo 2.5). Usando a observação 2.8, X é uma base de $\mathbb{R}^2$, já que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Exercícios de Fixação

1. Ortonormalizar a base $\{(1,1,1), (1,-1,1), (-1,0,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$, pelo Processo de Gram-Schmidt.

2. Seja $W = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W.

3. Seja V o espaço formado pelos polinômios de grau menor ou igual a 2 munido pelo produto interno canônico de $C([0,1])$. Ortonormalizar utilizando o Processo de Gram-Schmidt a base canônica $\{1, t, t^2\}$.

4. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ utilizando o Processo de Gram-Schmidt:

i) $W = [(1,1,0,0), (0,1,2,0), (0,0,3,4)]$;

ii) $W = [(2,0,0,0), (1,3,3,0), (3,-3,-3,0)]$.

5. Determinar uma base ortonormal do subespaço

$$W = \{(x, y, z, t) : x - y - z = 0 \text{ e } z - 2t = 0\}.$$

6. Determinar uma base ortonormal do subespaço $W = [(1,1,1), (1,-2,3)]$ em relação ao produto interno dado por $\langle u, v \rangle := x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3, \forall\ u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$.

2.4 Conclusão

A definição de ângulo entre elementos de um espaço vetorial arbitrário através de um produto interno permite trabalharmos com conjuntos ortonormais e, mais especificamente, com bases ortonormais, simplificando a forma de representar os elementos deste espaço.

2.5 Exercícios Propostos

1. Considere agora o espaço vetorial $C([-\pi,\pi])$ com o produto interno canônico. Mostre que $\{1, \text{sen } t, \cos t, \text{sen } 2t, \cos 2t, ...\}$ é um conjunto ortogonal. Este conjunto é ortonormal?

2. Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V. Sejam $u, v \in V$ tais que

$$u = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n \text{ e } v = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + ... + \lambda_nv_n.$$

Mostre que

i) $v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + ... + \langle v, v_n\rangle v_n.$;

ii) $\langle u, v\rangle = \langle u, v_1\rangle\langle v, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle\langle v, v_2\rangle + ... + \langle u, v_n\rangle\langle v, v_n\rangle$;

iii) $\|u\|^2 = \langle u, v_1\rangle^2 + \langle u, v_2\rangle^2 + ... + \langle u, v_n\rangle^2$.

3. Seja $\mathbb{R}^4$ com o produto interno canônico. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ consistindo de todos os vetores que são ortogonais aos vetores $u = (1, 0, -1, 1)$ e $v = (2, 3, -1, 2)$. Encontre uma base ortonormal para W.

4. Use o Processo de Gram-Schmidt aos vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ e $w = (0, 3, 4)$, para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja W um subespaço de V. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de W. Mostre que $\forall\ v \in V$, vale a desigualdade de Bessel

$$\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle^2 \leq \|v\|^2.$$

6. Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então se $[T]_\beta = (A_{ij})$ com relação a uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, prove que $A_{ij} = \langle Tv_j, v_i\rangle$.

7. Determinar uma base ortonormal do subespaço W de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$W = \{(x, y, z) : x - y = 0\}.$$

8. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, definem-se os cossenos diretores de u em relação à base dada por $\cos\alpha = \dfrac{\langle u, v_1\rangle}{\|u\|}$, $\cos\beta = \dfrac{\langle u, v_2\rangle}{\|u\|}$ e $\cos\gamma = \dfrac{\langle u, v_3\rangle}{\|u\|}$. Provar que:

i) $u = \|u\|((\cos\alpha)v_1 + (\cos\beta)v_2 + (\cos\gamma)v_3)$;

ii) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Próxima Aula

A seguir mostraremos como decompor um espaço vetorial numa soma direta de dois subespaços.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.