Capítulo 3

Complemento e Projeção Ortogonal

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 3: Complemento e Projeção Ortogonal

Meta

Mostrar para o aluno que a noção de ortogonalidade possibilita decompor o espaço vetorial numa soma de dois subespaços.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz decompor um espaço vetorial de forma conveniente como soma direta entre um subespaço e seu complemento.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I

3.1 Introdução

A noção de complemento ortogonal de um subconjunto de um espaço vetorial com produto interno, permite decompor este espaço como soma direta entre um subespaço e seu complemento ortogonal. Este fato possibilita uma melhor compreensão da estrutura de espaços vetoriais com produto interno.

3.2 Complemento Ortogonal

Caro aluno, nesta seção, discutiremos uma forma conveniente de decompor um espaço vetorial em soma direta de dois subespaços.

3.2.1 Definição e Exemplos

Definição 3.1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $U \subseteq V$ um subconjunto qualquer. Definimos o complemento ortogonal de U em V como sendo o conjunto $U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0$, para todo $u \in U\}$.

Exemplo 3.1. Vamos encontrar o complemento ortogonal do conjunto $U = \{(1, -1)\}$ em $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (x, y) \in U^\perp$ qualquer. Então $\langle v, (1, -1) \rangle = 0$ implica que $\langle (x, y), (1, -1) \rangle = 0$, e daí $x - y = 0$. Dessa forma $v = (x, y) = (y, y) = y(1, 1)$ e $U^\perp = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$

$\langle (x,y),(1,-1)\rangle = 0\} = \{y(1,1) : y \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$. Portanto, $U^{\perp} = [(1,1)]$, onde $[(1,1)]$ significa o espaço gerado pelo subconjunto $\{(1,1)\}$.

Exemplo 3.2. Seja $U = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Para determinarmos $U^{\perp}$ tomemos um elemento arbitrário $v = (a,b,c) \in U^{\perp}$. Então de $\langle v,(x,y,0)\rangle = 0$ (ver exemplo 1.2), podemos concluir que $\langle (a,b,c),(x,y,0)\rangle = 0$, para todo $x,y \in \mathbb{R}$. Ou seja, $ax + by = 0$, para todo $x,y \in \mathbb{R}$. Em particular, fazendo $x = 1$ e $y = 0$, temos que $a = 0$, e para $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $b = 0$. Dessa forma, $v = (a,b,c) = (0,0,c) = c(0,0,1)$. Portanto, $U^{\perp} = [(0,0,1)]$.

Note que U não, necessariamente, é um subespaço de V, mas o que podemos afirmar sobre $U^{\perp}$? Nos exemplos 3.1 e 3.2, encontramos um subespaço para o conjunto $U^{\perp}$. A pergunta que surge é: isto é sempre verdade? A resposta é afirmativa.

Proposição 3.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Então $U^{\perp}$ é um subespaço de V.*

Demonstração. Com efeito, primeiramente, note que $\mathbf{0} \in U^{\perp}$, pois $\langle \mathbf{0},u\rangle = 0$, para todo $u \in U$ (ver Proposição 1.1). Em seguida, sejam $v,w \in U^{\perp}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $\langle v,u\rangle = 0$ e $\langle w,u\rangle = 0$, para todo $u \in U$. Consequentemente,

$$\langle v + \lambda w, u\rangle = \langle v,u\rangle + \lambda\langle w,u\rangle = 0 + \lambda \cdot 0 = 0,$$

para todo $u \in U$, ver Definição 1.1. Ou seja, $v + \lambda w \in U^{\perp}$. Isto prova que $U^{\perp}$ é um subespaço de V. □

3.2.2 Resultado Importante

Prezado aluno, no caso em que U é um subespaço de dimensão finita, o Teorema a seguir nos permite definir projeção ortogonal.

Teorema 3.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot,\cdot\rangle$ e seja U um subespaço de dimensão finita de V. Então*

$$V = U \oplus U^{\perp}, \text{ isto é, } V = U + U^{\perp} \text{ e } U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}.$$

Demonstração. Inicialmente, provemos que $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Ora, se $v \in U \cap U^{\perp}$, então $v \in U$ e $v \in U^{\perp}$. Usando a Definição 3.1, temos que $\langle v,u\rangle = 0$, para todo $u \in U$. Como

$v \in U$, então, em particular, $\langle v, v\rangle = 0$. Usando a Definição 1.1, concluimos que $v = \mathbf{0}$. Logo, $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Agora, verificaremos que $V = U + U^{\perp}$. Como $\dim U$ é finita, segue do Teorema 2.2 que existe uma base ortonormal $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ de U. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Provaremos que v é a soma de um vetor de U com um vetor de $U^{\perp}$. Para isso, escolha $u = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle u_i \in U$. Vimos na demonstração do Teorema 2.2 que, $\langle v - u, u_j\rangle = 0$, para todo $j = 1, 2, ..., m$. Para comodidade do leitor, faremos a prova desta afirmação novamente.

$$\begin{aligned}
\langle v - u, u_j\rangle &= \langle v, u_j\rangle - \langle u, u_j\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle u_i, u_j \right\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle \langle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \langle v, u_j\rangle = 0,
\end{aligned}$$

pois β é ortonormal. Consequentemente, $v - u \in U^{\perp}$. Mas, $v = u + (v - u)$, onde $u \in U$ e $v - u \in U^{\perp}$. Isto prova que $V = U + U^{\perp}$. Portanto, $V = U \oplus U^{\perp}$. $\square$

Obs 3.1. Sob as hipóteses do Teorema 3.1, temos que $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$, pois $V = U \oplus U^{\perp}$.

Exemplo 3.3. No exemplo 3.2, vimos que para o subespaço $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ temos $U^{\perp} = [(0, 0, 1)]$. O Teorema 3.1, nos garante que $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \oplus [(0, 0, 1)]$.

3.2.3 Projeção Ortogonal

Definição 3.2. Seja $v \in V = U \oplus U^{\perp}$. Definimos, a projeção ortogonal de v em U como sendo o vetor u tal que $v = u + u^{\perp}$, com $u \in U, u^{\perp} \in U^{\perp}$. Denotamos isto por $P_U(v) = u$.

Obs 3.2. Quando não houver possibilidade de confusão com o subespaço U, escreveremos, simplesmente, $P(v) = P_U(v)$.

Obs 3.3 (Como Encontrar $P(v)$)**.** Vimos na demonstração do Teorema 3.1 que

$$P_U(v) = u = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle u_i = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + ... + \langle v, u_m\rangle u_m,$$

onde $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ é uma (não importa qual) base ortonormal de U.

Exemplo 3.4. Seja $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Vamos encontrar a projeção ortogonal de $(1, 1, 1)$ em U. Desde que

$$\begin{aligned} U &= \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 0, 0), (0, 1, 0)], \end{aligned}$$

segue que U é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim U = 2$. Além disso, $\{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0)\}$ é uma base ortonormal de U. Logo, usando a observação 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} P(1, 1, 1) &= \langle (1, 1, 1), u_1\rangle u_1 + \langle (1, 1, 1), u_2\rangle u_2 \\ &= \langle (1, 1, 1), (1, 0, 0)\rangle (1, 0, 0) + \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0)\rangle (0, 1, 0) \\ &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Obs 3.4. No exemplo 3.4, a base encontrada para U é ortonormal. Nem sempre isso ocorre! Quando encontrarmos uma base, a qual não é ortonormal, devemos, primeiramente, aplicar o Processo de Gram-Schmidt para ortonormalizá-la e, depois do processo realizado, procurarmos a projeção ortogonal usando a observação 3.3. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.5. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $U = [(1, 1), (0, 1)]$ um subespaço. Então $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ é uma base de não ortonormal de U. Vamos encontrar $P(1, 2)$. Para isso, precisamos de uma base ortonormal de U. Convidamos o leitor a utilizar o processo de Gram-Schmidt para verificar que $\gamma = \left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é uma base ortonormal de U. Logo, pela observação 3.3,

$$\begin{aligned} P(1, 2) &= \langle (1, 2), u_1\rangle u_1 + \langle (1, 2), u_2\rangle u_2 \\ &= \left\langle (1, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left\langle (1, 2), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= (1, 2). \end{aligned}$$

Definição 3.3 (Aplicação Projeção Ortogonal)**.** Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.1 definimos a projeção ortogonal de V em U como sendo a função $P : V \to U$ que associa cada $v \in V$ ao vetor $P_U(v)$ (projeção de v em U).

Proposição 3.2 (Linearidade da Projeção Ortogonal)**.** *Considere que estamos sob as mesmas hipóteses do Teorema* 3.1*. Então a projeção ortogonal de* V *em* U *é uma aplicação linear.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2 \in V$. Como $V = U \oplus U^{\perp}$, então existem únicos $u_1, u_2 \in U$ e $u_1^{\perp}, u_2^{\perp} \in U^{\perp}$ tais que $v_1 = u_1 + u_1^{\perp}$ e $v_2 = u_2 + u_2^{\perp}$. Portanto, para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$v_1 + \lambda v_2 = (u_1 + \lambda u_2) + (u_1^{\perp} + \lambda u_2^{\perp}),$$

onde $u_1 + \lambda u_2 \in U$ e $u_1^{\perp} + \lambda u_2^{\perp}$ (esta é a única maneira de escrever $v_1 + \lambda v_2$, ver Teorema 3.1), pois U e $U^{\perp}$ são subespaços de V (ver Teorema 3.1 e Proposição 3.1). Com isso,

$$P(v_1) = u_1, P(v_2) = u_2 \text{ e } P(v_1 + \lambda v_2) = u_1 + \lambda u_2.$$

Dessa forma,

$$P(v_1 + \lambda v_2) = u_1 + \lambda u_2 = P(v_1) + \lambda P(v_2),$$

isto é, $P(v_1 + \lambda v_2) = P(v_1) + \lambda P(v_2)$, ou seja, P é linear. $\square$

Exemplo 3.6. Seja $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Vamos encontrar a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em U. Vimos no exemplo 3.4 que $U = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e $\{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0)\}$ é uma base ortonormal de U. Logo, usando a observação 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \langle (x, y, z), u_1 \rangle u_1 + \langle (x, y, z), u_2 \rangle u_2 \\ &= \langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle (1, 0, 0) + \langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle (0, 1, 0) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0). \end{aligned}$$

Logo, $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ define a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em U

Exercícios de Fixação

1. Achar uma base do subespaço $V^{\perp}$, onde $V = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 0)]$. Ortonormalize esta base.

2. Determinar a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ no subespaço $U = [(1, 3)]$.

3. Achar a projeção ortogonal de $(1,1,1,1)$ no subespaço $U = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$.

4. Determinar a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1$ no subespaço $U = [t]$, em relação ao produto interno canônico de $C([0,1])$.

5. Determinar uma base ortonormal de $U^{\perp}$, onde $U = \{(x,y,z,t) : x + y = 0 \text{ e } 2x + z = y\}$.

6. Seja V o espaço formado pelos polinômios de grau menor que ou igual a 2 com o produto interno canônico de $C([0,1])$.

i) Ortonormalize $\{1, 1+t, 2t^2\}$;

ii) Achar o complemento ortogonal do subespaço $U = [5, 1+t]$.

7. Mostre que a projeção ortogonal, $P : V \to U$, de V em U satisfaz:

i) $P^2 := P \circ P = P$;

ii) $\ker(P) = U^{\perp}$ (núcleo de P) e $\mathrm{Im}(P) = U$;

iii) $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.

8. Seja $u = (1,1,1,1)$. Encontre $\{u\}^{\perp}$. Determine uma base ortonormal para $\{u\}^{\perp}$.

3.3 Conclusão

Nesta aula concluímos que é sempre possível decompor um espaço vetorial em produto interno e dimensão finita numa soma de dois subespaços, e assim definir uma projeção ortogonal sobre este espaço.

3.4 Exercícios Propostos

1. Seja V o espaço vetorial formado pelos polinômios com grau ≤ 3. Equipe V com o produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

i) Encontre o complemento ortogonal do subespaço formado pelos polinômios constantes;

ii) Aplique o processo de Gram-Schmidt à base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

2. Seja V o espaço vetorial de toads as matrizes $n \times n$ com entradas reais. Verifique que $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$, onde $tr(X) = X_{11} + X_{22} + ... + X_{nn}$ (traço de X), é um produto interno sobre V. Encontre o complemento ortogonal do subespaço formado pelas matrizes diagonais.

3. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja W um subespaço de V com dimensão finita. Seja P a projeção ortogonal de V em W. Mostre que $\langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle$, para todos $u, v \in V$.

4. Consideremos o espaço vetorial $C([-1,1])$ munido com o produto interno canônico. Seja $P \subseteq C([-1,1])$ o subespaço formado por todas as funções pares e $I \subseteq C([-1,1])$ o subespaço formado pelas funções ímpares. Mostre que $P^\perp = I$.

5. Mostre que se U for um subespaço de dimensão infinita de um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então não é verdade, em geral, que $V = U \oplus U^\perp$. Portanto, se retirarmos a hipótese de dimensão finita do subespaço, no Teorema 3.1, o Teorema deixa de ser verdadeiro.

Sugestão: Considere que $V = l^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$ com o produto interno $\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ (verifique!). Seja $U = [(1,0,...), (0,1,0,...), ..., (0,0,...,1,0,...), ...]$. Prove que $U^\perp = \{(0,0,...)\}$. Para concluir, mostre que $V \neq U$.

6. Seja $W = [(3,4)]$. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$. Encontre a projeção ortogonal P de $\mathbb{R}^2$ em W, a matriz de P (em relação à base canônica), $W^\perp$, uma base ortonormal β tal que $[P]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Sejam U_1, U_2 subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ e $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

8. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja U um subespaço de dimensão finita de V. Então, para cada $v \in V$, tem-se

$$\|v - P(v)\| \leq \|v - u\|,$$

para todo $u \in U$, em palavras, $P(v)$ é o vetor de menor distância a v.

9. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $U \subseteq V$. Mostre que $[U] \subseteq U^{\perp\perp}$, onde $[U]$ é o subespaço gerado por U e $U^{\perp\perp} = (U^\perp)^\perp$. Prove que se V tem dimensão finta, então $[U] = U^{\perp\perp}$. Conclua que se V tem dimensão finta e U é subespaço de V, então $U = U^{\perp\perp}$.

Próxima Aula

Na aula seguinte mostramos que todo funcional linear pode ser representado por um produto interno e, a partir daí, construiremos um operador linear importante, dito operador adjunto.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.