Capítulo 4

A Adjunta de um Operador Linear

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 4: A Adjunta de um Operador Linear

Meta

Mostrar para o aluno a construção de uma aplicação linear importante, chamada de aplicação adjunta.

Objetivos

Ao final da aula, o aluno deve ser capaz de representar um funcional liner na forma de um produto interno e calcular a adjunta de uma aplicação linear.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I

4.1 Introdução

A definição de operador linear adjunto permitirá, adiante, uma classificação de operadores lineares. A construção da adjunta de uma transformação linear é baseada no fato que para cada funcional linear está associado um elemento do espaço vetorial, de forma que este funcional é representado por um produto interno.

4.2 Adjunta de um Operador Linear

Caro aluno, nesta aula, mostraremos como, em alguns casos, é possível obter, a partir de um operador linear, uma aplicação linear chamada Adjunta. Veremos que propriedades este novo operador satisfaz. A adjunta será responsável pela definição de operadores de grande relevância para a Álgebra Linear.

4.2.1 Definição e Exemplos

O Teorema a seguir caracteriza todos os funcionais lineares reais sobre um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita. Antes de enunciá-lo relembre a definição de funcional linear real.

Definição 4.1 (Funcional Linear)**.** Seja V um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}$ é um funcional linear se $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$, para todos $u, v \in V$ e todo

$\lambda \in \mathbb{R}$. O conjunto $V^* = \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ é linear}\}$ é um espaço vetorial chamado espaço dual de V.

Exemplo 4.1. A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = 2x + y$, é um exemplo de funcional linear.

Seja V um espaço com produto interno e seja $w \in V$. A função $g : V \to \mathbb{R}$ definida por $g(v) = \langle v, w\rangle$, para todo $v \in V$, é linear (justifique!). O próximo resultado expressará o fato que se V é um espaço de dimensão finita, então todo funcional linear será desta forma.

Teorema 4.1 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Dado um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$, existe único $v \in V$ tal que $f(u) = \langle u, v\rangle$, para todo $u \in V$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, sabemos que existe uma base ortonormal de V. Digamos que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é esta base. Dado $u \in V$, pela definição de base, temos que

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

Note que

$$\langle u, v_1\rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, v_1\rangle.$$

Portanto, pela Defingão 2.4,

$$\langle u, v_1\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_1\rangle + \lambda_2\langle v_2, v_1\rangle + ... + \lambda_n\langle v_n, v_1\rangle = \lambda_1.$$

Analogamente, prova-se que $\lambda_i = \langle u, v_i\rangle$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Assim sendo,

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + ... + \langle u, v_n\rangle v_n.$$

Consequentemente, usando a Definição 4.1,

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + ... + \langle u, v_n\rangle v_n) \\ &= \langle u, v_1\rangle f(v_1) + \langle u, v_2\rangle f(v_2) + ... + \langle u, v_n\rangle f(v_n) \\ &= \langle u, f(v_1)v_1\rangle + \langle u, f(v_2)v_2\rangle + ... + \langle u, f(v_n)v_n\rangle \\ &= \langle u, f(v_1)v_1 + f(v_2)v_2 + ... + f(v_n)v_n\rangle. \end{aligned}$$

Defina $v = f(v_1)v_1 + f(v_2)v_2 + ... + f(v_n)v_n$. Portanto, $f(u) = \langle u, v \rangle$, para todo $u \in V$. Agora, vamos provar a unicidade de $v \in V$. Suponha que existe $w \in V$ tal que $f(u) = \langle u, w \rangle$, para todo $u \in V$. Com isso, $\langle u, w \rangle = f(u) = \langle u, v \rangle$, para todo $u \in V$. Daí, $\langle u, w - v \rangle = 0$, para todo $u \in V$. Usando o item **iv)** da Proposição 1.1, chegamos a $w - v = \mathbf{0}$. Logo, $w = v$. Isto porva a unicidade. $\square$

Exemplo 4.2. Seja $f(x, y) = 2x + y$ o funcional visto no exemplo 4.1. Então podemos escrever $f(x, y) = \langle (x, y), (2, 1) \rangle$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $v = (2, 1)$ é o vetor relatado no Teorema 4.1.

Corolário 4.2 (Isomorfismo entre V e V^*)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. e dimensão finita. Então V^* é isomorfo a V.*

Demonstração. Defina $T : V^* \to V$ por $T(f) = v$, onde $f(u) = \langle u, v \rangle$, para todo $u \in V$ (ver Teorema 4.1). Como $\dim V^* = \dim V$, então, pelo Teorema do núcleo e imagem, basta provar que T é linear e injetora, ou seja, que T é linear e $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, para provar que T é um isomorfismo. Primeiramente, vamos provar que T é linear. Com efeito, sejam $f, g \in V^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 4.1, existem únicos $v, w \in V$ tais que $f(u) = \langle u, v \rangle$ e $g(u) = \langle u, w \rangle$, para todo $u \in V$. Portanto,

$$(\lambda f + g)(u) = \lambda f(u) + g(u) = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = \langle u, \lambda v + w \rangle,$$

para todo $u \in V$. Ou seja, $T(\lambda f + g) = \lambda v + w$ (ver unicidade no Teorema 4.1). Consequentemente,

$$T(\lambda f + g) = \lambda v + w = \lambda T(f) + T(g).$$

Assim, T é linear. Agora, considere que $f \in \ker(T)$, ou seja, $T(f) = \mathbf{0}$. Logo, $v = T(f) = \mathbf{0}$. Por fim, $f(u) = \langle u, v \rangle = 0$, para todo $u \in V$. Isto é, $f = \mathbf{0}$. Isto mostra que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. $\square$

Definição 4.2 (Adjunta)**.** Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, onde U e V são espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, respectivamente. Dizemos que uma aplicação $T^* : V \to U$ é a adjunta de T se esta satisfaz

$$\langle v, T(u) \rangle_V = \langle T^*(v), u \rangle_U,$$

para todo $u \in U, v \in V$.

Obs 4.1. Quando não houver possibilidade de confusão escreveremos, simplesmente, $\langle \cdot, \cdot \rangle$

para representar $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, mas deve estar claro que estes produtos estão sobre U e V, respectivamente.

Exemplo 4.3. Seja V o espaço dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ com o produto interno canônico de $C([0,1])$ (ver exemplo 1.3). Fixe $g \in V$. Defina $T : V \to V$ pondo $T(f) = f \cdot g$, para todo $f \in V$. Vamos procurar a adjunta de T (caso esta exista). Observe que

$$\langle f, T(h)\rangle = \langle f, h \cdot g\rangle = \int_0^1 f(t)[h(t)g(t)]dt = \int_0^1 [f(t)g(t)]h(t)dt = \langle f \cdot g, h\rangle = \langle T(f), h\rangle,$$

para todos $f, h \in V$. Portanto, $T^*(f) = T(f)$ para todo $f \in V$. Ou seja, $T^* = T$.

4.2.2 Existência e Unicidade da Adjunta

As perguntas que surgem no exemplo 4.3 são: a adjunta sempre existe? E se existe, esta é única? A resposta para a primeira pergunta é negativa, veremos um exemplo na lista de exercícios propostos. A resposta para a segunda pergunta está na seguinte proposição.

Proposição 4.1 (Unicidade da Adjunta)**.** *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, onde U e V são espaços vetoriais com produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, respectivamente. Caso exista T^*, esta é única.*

Demonstração. Suponha que existe $S : V \to U$ tal que

$$\langle v, T(u)\rangle_V = \langle S(v), u\rangle_U,$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$. Então,

$$\langle T^*(v), u\rangle_U = \langle v, T(u)\rangle_V = \langle S(v), u\rangle_U,$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$. Ou seja,

$$\langle T^*(v) - S(v), u\rangle_U = 0,$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, isto é, $T^*(v) - S(v) = \mathbf{0}$, para todo $v \in V$ (ver item **iv**) da Proposição 1.1) e, portanto, $S = T^*$. Isto garante a unicidade de T^*. $\square$

Note que, no exemplo 4.3 vimos que $T^* = T$, então como T é linear podemos concluir que T^* é linear. Isto sempre ocorre? Ou seja, quando a adjunta existe, além de ser única, esta é uma transformação linear? Confira a resposta na sequência.

Proposição 4.2. *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, onde U e V são espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, respectivamente. Caso exista T^*, esta é linear.*

Demonstração. Sejam $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, usando a Proposição 1.1, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T^*(\lambda v + w), u \rangle_U &= \langle \lambda v + w, T(u) \rangle_V = \langle \lambda v + w, T(u) \rangle_V = \lambda \langle v, T(u) \rangle_V + \langle w, T(u) \rangle_V \\ &= \lambda \langle T^*(v), u \rangle_V + \langle T^*(w), u \rangle_V = \langle \lambda T^*(v) + T^*(w), u \rangle_V, \end{aligned}$$

para todo $u \in U$. Ou seja,

$$\langle T^*(\lambda v + w), u \rangle_U = \langle \lambda T^*(v) + T^*(w), u \rangle_V,$$

para todo $u \in U$. Portanto,

$$\langle T^*(\lambda v + w) - (\lambda T^*(v) + T^*(w)), u \rangle_U = 0,$$

para todo $u \in U$. Utilizando o item **iv)** da Proposição 1.1, concluimos que

$$T^*(\lambda v + w) - (\lambda T^*(v) + T^*(w)) = 0,$$

Ou, equivalentemente, $T^*(\lambda v + w) = \lambda T^*(v) + T^*(w)$. Isto nos diz que T^* é linear. □

Prezado aluno, será que existe alguma condição que estabelece a existência da adjunta?

Teorema 4.3 (Existência e Unicidade da Adjunta)**.** *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, onde U e V são espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, respectivamente, e de dimensões finitas. Então T^* existe, é única e linear.*

Demonstração. Defina, para cada $v \in V$, $f(u) = \langle v, T(u) \rangle_V$, para todo $u \in U$. Note que $f : U \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. De fato, através da linearidade de T e da definição 1.1, obtemos

$$f(\lambda u + w) = \langle v, T(\lambda u + w) \rangle_V = \langle v, \lambda T(u) \rangle_V + \langle v, T(w) \rangle_V = \lambda \langle v, T(u) \rangle_V + \langle v, T(w) \rangle_V$$

$$= \lambda f(u) + f(w),$$

para todo $u, w \in U$. Ou seja, $f(\lambda u + w) = \lambda f(u) + f(w)$, para todo $u, w \in U$. Isto nos diz que f é linear. Pelo Teorema de Representação de Riesz 4.1, existe um único $w \in U$ tal que $f(u) = \langle u, w\rangle_U = \langle w, u\rangle_U$, para todo $u \in U$. Daí,

$$\langle v, T(u)\rangle_V = f(u) = \langle w, u\rangle_U,$$

para todo $u \in U$. Por isso, defina $T^*(v) = w$. Logo,

$$\langle v, T(u)\rangle_V = \langle T^*(v), u\rangle_U,$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$. T^* é adjunta de T. A unicidade está garantida pela Proposição 4.1 e a linearidade através da Proposição 4.2. $\square$

Exemplo 4.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y) = (x, 2x + y, -y)$. Sabemos que a adjunta de T existe, pelo Teorema 4.3. Então vamos determiná-la. Usando a definição 4.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle (a, b, c), T(x, y)\rangle &= \langle (a, b, c), (x, 2x + y, -y)\rangle \\
&= ax + b(2x + y) - cy \\
&= (a + 2b)x + (b - c)y \\
&= \langle (a + 2b, b - c), (x, y)\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $T^*(a, b, c) = (a + 2b, b - c)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, define a adjunta de T.

Exemplo 4.5. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(x, y) = (-y, x)$. Daí,

$$\langle (a, b), T(x, y)\rangle = \langle (a, b), (-y, x)\rangle = -ay + bx = bx + (-a)y = \langle (b, -a), (x, y)\rangle.$$

Logo, $T^*(a, b) = (b, -a), \forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, define a adjunta de T. Neste caso, $T^* = -T$.

Exemplo 4.6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$. Note que

$$\langle (a, b), T(x, y)\rangle = \langle (a, b), (y, x)\rangle = ay + bx = bx + ay = \langle (b, a), (x, y)\rangle,$$

para todo $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Então $T^*(a, b) = (b, a)$. Logo, $T^* = T$.

4.2.3 Propriedades da Adjunta

Caros alunos, sabemos que a soma de duas transformações lineares é uma transformação linear. Faz sentido, então, perguntar se existe ligação entre a adjunta de uma soma e as adjuntas de cada uma das parcelas. O mesmo pode ser indagado sobre composição, multiplicação por escalar envolvendo transformações lineares. O próximo resultado estabelece as propriedades da adjunta.

Proposição 4.3. *Sejam $T, S : U \to V$ e $P : V \to W$ transformações lineares, onde U, V e W são espaços vetoriais com produto interno e dimensão finita. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

i) *$I^* = I$, onde I é a transformação linear identidade, isto é, $I(v) = v$, para todo v;*

ii) *$(T + S)^* = T^* + S^*$, em palavras, a adjunta de uma soma é a soma das adjuntas;*

iii) *$(\lambda T)^* = \lambda T^*$, em palavras, a adjunta de uma multiplicação por escalar é a multiplicação por escalar com a adjunta;*

iv) *$(P \circ T)^* = T^* \circ P^*$, em palavras, a adjunta de uma composta é a composta das adjuntas com os fatores comutados;*

v) *$T^{**} := (T^*)^* = T$, em palavras, a adjunta da adjunta de uma transformação linear é a própria transformação.*

Demonstração. A existência e a unicidade destas adjuntas estão garantidas pelo Teorema 4.3. Essas propriedades decorrem imediatamente da Definição 4.2. De fato,
i) $I^* = I$ segue diretamente do fato que

$$\langle v, I(u)\rangle_V = \langle v, u\rangle_U = \langle I(v), u\rangle_U,$$

para todo u, v.
ii) $(T + S)^* = T^* + S^*$ é uma consequência do fato que

$$\begin{aligned}
\langle v, (T+S)(u)\rangle &= \langle v, T(u) + S(u)\rangle \\
&= \langle v, T(u)\rangle + \langle v, S(u)\rangle \\
&= \langle T^*(v), u\rangle + \langle S^*(v), u\rangle \\
&= \langle T^*(v) + S^*(v), u\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$.

iii) Da Definição 4.2, também concluímos que

$$\langle v, (\lambda T)(u) \rangle = \langle v, \lambda T(u) \rangle = \lambda \langle v, T(u) \rangle = \lambda \langle T^*(v), u \rangle = \langle \lambda T^*(v), u \rangle,$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, $(\lambda T)^* = \lambda T^*$.

iv) Novamente pela Definição 4.2, encontramos

$$\begin{aligned} \langle w, (P \circ T)(u) \rangle &= \langle w, P(T(u)) \rangle \\ &= \langle P^*(w), T(u) \rangle \\ &= \langle T^*(P^*(w)), u \rangle \\ &= \langle (T^* \circ P^*)(w), u \rangle, \end{aligned}$$

para todo $u \in U$ e $w \in W$. Portanto, $(P \circ T)^* = T^* \circ P^*$.

v) Por fim, $T^{**} = T$ segue do fato que

$$\langle v, T^*(u) \rangle = \langle T(v), u \rangle,$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$.

□

Exemplo 4.7. Seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definido por $S(x, y) = (2x, 4x + 2y, -2y)$. Desejamos encontrar a adjunta de S. Observe que $S = 2T$, onde $T(x, y) = (x, 2x + y, -y)$. Vimos no exemplo 4.4 que $T^*(a, b, c) = (a + 2b, b - c)$. Logo, pelo item **iii)** da Proposição 4.3, obtemos

$$S^*(a, b, c) = (2T)^*(a, b, c) = 2T^*(a, b, c) = 2(a + 2b, b - c) = (2a + 4b, 2b - 2c).$$

Exemplo 4.8. Seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $S(x, y) = (x - y, x + y)$. Note que,

$$S(x, y) = (x - y, x + y) = (x, y) + (-y, x) = I(x, y) + T(x, y) = (I + T)(x, y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde T está definida no exemplo 4.5 e I é a identidade de $\mathbb{R}^2$. Vimos que $T^*(a, b) = (b, -a)$. Portanto, usando os itens **i)** e **ii)** da Proposição 4.3, encontramos

$$S^*(a, b) = (I + T)^*(a, b) = (I^* + T^*)(a, b) = I^*(a, b) + T^*(a, b) = (a, b) + (b, -a) = (a + b, b - a).$$

Veremos que a inversa da adjunta de um isomorfismo é a adjunta da inversa desta aplicação.

Proposição 4.4 (Adjunta da Inversa)**.** *Seja $T : V \to V$ um isomorfismo, onde V é um espaço vetorial com produto interno. Então T^* (caso exista) também o é. Neste caso, $[T^*]^{-1} = [T^{-1}]^*$.*

Demonstração. Como T é um isomorfismo, existe aplicação linear $T^{-1} : V \to V$ satisfazendo $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$, onde $I : V \to V$ é a identidade de V. Portanto, utilizando os itens **i)** e **iv)** da Proposição 4.3, obtemos $[T \circ T^{-1}]^* = [T^{-1} \circ T]^* = I^*$. Com isso, $[T^{-1}]^* \circ T^* = T^* \circ [T^{-1}]^* = I$. Isto nos diz que T^* é inversível, ou seja, T^* é um isomorfismo (ver Proposição 4.2). Além disso, $[T^*]^{-1} = [T^{-1}]^*$. □

Exemplo 4.9. Seja $T(x, y) = (-y, x)$. Vamos mostrar que $[T^{-1}]^* = -T^{-1}$. Vimos no exemplo 4.5, que $T^* = -T$. Logo, pela Proposição 4.4,

$$[T^{-1}]^* = [T^*]^{-1} = [-T]^{-1} = -T^{-1}.$$

Por que T é inversível?

Proposição 4.5. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja U um subespaço T-invariante, isto é, $T(U) \subseteq U$. Suponha que $T^* : V \to V$ existe, então $U^\perp$ é T^*-invariante, ou seja, $T^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.*

Demonstração. Seja $u \in T^*(U^\perp)$, então existe $v \in U^\perp$ tal que $u = T^*(v)$. Dado $w \in U$, temos que $\langle u, w \rangle = \langle T^*(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$. Como $w \in U$, então $T(w) \in U$, pois $T(U) \subseteq U$. Por conseguinte, $\langle u, w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = 0$, pois $v \in U^\perp$ e $T(w) \in U$. Assim sendo, $u \in U^\perp$. Ou seja, $T^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$. □

Exemplo 4.10. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T = T^*$ (caso exista), onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja U um subespaço T-invariante, então $U^\perp$ é um subespaço T-invariante (ver Proposição 4.5).

4.2.4 Matriz da Adjunta em Relação a uma Base Ortonormal

Caros alunos, será que existe uma relação entre a matriz de uma transformação linear e a matriz de sua adjunta? Em geral a resposta é negativa, mas se a base for ortonormal obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $T : V \to V$ uma transformação linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Seja $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V. Então $[T^*]_\beta = [T]_\beta^t$.*

Demonstração. Seja $[T]_\beta = (A_{ij})$. Note que $T(v_j) = A_{1j}v_1 + A_{2j}v_2 + ... + A_{nj}v_n$. Consequentemente,

$$\langle T(v_j), v_i \rangle = \langle A_{1j}v_1 + A_{2j}v_2 + ... + A_{nj}v_n, v_i \rangle = A_{1j}\langle v_1, v_i \rangle + A_{2j}\langle v_2, v_i \rangle + ... + A_{nj}\langle v_n, v_i \rangle.$$

Como β é uma base ortonormal, então $\langle T(v_j), v_i \rangle = A_{ij}\langle v_i, v_i \rangle = A_{ij}$ (ver Definição 2.4). Logo, $\langle T(v_j), v_i \rangle = A_{ij}$, para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Seja $[T^*]_\beta = (B_{ij})$. Analogamente ao que foi feito nesta demonstração, temos que

$$B_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \rangle = \langle v_j, T(v_i) \rangle = \langle T(v_i), v_j \rangle = A_{ji},$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Isto nos diz que $[T^*]_\beta = [T]_\beta^t$. $\square$

Exemplo 4.11. Seja $T(x, y) = (-y, x)$. Então $[T]_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Como esta base é ortonormal, em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$, usamos o Teorema 4.4 para concluirmos que $[T^*]_c = [T]_c^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, $T^*(a, b) = (b, -a)$.

Exercícios de Fixação

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (10x - y, y)$. Encontre T^*.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (\sqrt{3}x, x - 4y)$. Encontre T^*.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - y, z, y + z)$. Encontre T^*.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, 0, z)$. Encontre T^*.

5. Em $\mathbb{R}^3$ verifique que $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$ define um produto interno. Encontre a adjunta da aplicação linear T dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

com relação a esse produto interno.

6. Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V com produto interno. Suponha que existe T^* e que $T(v) = \lambda v$ e $T^*(w) = \mu w$, com $\lambda \neq \mu$. Mostre que $\langle v, w\rangle = 0$.

7. Sejam U, V espaços vetoriais com produto interno e dimensão finita e $T : U \to V$ linear. Mostre que

i) T é injetora se, e somente se, T^* é sobrejetora;

ii) T é sobrejetora se, e somente se, T^* é injetora.

8. Seja V um espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$ vetores fixados. Mostre que $T(x) = \langle x, u\rangle v$ define uma aplicação linear. Mostre que T^* existe e obtenha sua expressão.

9. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno. Se $\dim U < \dim V$, prove que o operador $T \circ T^* : V \to V$ não é invertível. Mas se $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, prove que $T^* \circ T : U \to U$ é invertível.

4.3 Conclusão

Concluímos nesta seção que a cada operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita está associado um operador linear adjunto que relaciona elementos do espaço dual com elementos do espaço vetorial.

4.4 Exercícios Propostos

1. Sejam U, V espaços vetoriais com produto interno e dimensão finita. Seja $T : U \to V$ linear. Mostre que $T^* \circ T : U \to U$ e $T \circ T^* : V \to V$ têm o mesmo posto de T. Lembre que $\text{posto}(T) = \dim \text{Im}(T)$.

2. Sejam U, V espaços vetoriais com produto interno. Mostre que $U \oplus V$ é um espaço vetorial com produto interno se definirmos $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle := \langle x_1, x_2\rangle_U + \langle y_1, y_2\rangle_V$. Defina $T : U \oplus V \to V \oplus U$ por $T(x, y) = (y, -x)$. Mostre que T^* existe e obtenha sua expressão.

3. Seja V um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita. Para cada $u, v \in V$ defina $T_{u,v}(x) = \langle x, v\rangle u$. Mostre que $T^*_{u,v} = T_{v,u}$.

4. Sejam U, V espaços vetoriais com produto interno. Mostre que $U \oplus V$ é um espaço vetorial com produto interno se definirmos $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_U + \langle y_1, y_2 \rangle_V$. Defina $T : U \oplus V \to V \oplus U$ por $T(x, y) = (y, -x)$. Mostre que T^* existe e obtenha sua expressão.

5. Seja V um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita. Para cada $u, v \in V$ defina $T_{u,v}(x) = \langle x, v \rangle u$. Mostre que $T^*_{u,v} = T_{v,u}$.

Próxima Aula

Na sequência faremos um estudo da classe de operadores dito auto-adjuntos.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.