Capítulo 5

Operadores Auto-adjuntos

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 5: Operadores Auto-adjuntos

Meta

Apresentar ao aluno a definição e principais propriedades de operadores auto-adjuntos.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar um operador auto-adjunto e saber suas principais propriedades.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I.

5.1 Introdução

Operadores auto-adjuntos são extremamente importantes em mecânica quântica. Por serem diagonalizáveis, têm seu espectro totalmente determinado. Através de operadores auto-adjuntos positivos podemos definir um produto interno sobre o espaço vetorial.

5.2 Operadores Auto-adjuntos

Caro aluno, nesta aula, trabalharemos com operadores denominados auto-adjuntos. Mostraremos a estreita relação existente entre o estudo dos autovetores, realizado em Álgebra Linear 1, com tais operadores.

5.2.1 Definição e Exemplos

Prezado aluno, nosso principal interesse no estudo de operadores auto-adjuntos é estabelecer e aplicar o Teorema Espectral para tais operadores. Para isto precisamos percorrer o prazeroso caminho que descreve esta teoria.

Definição 5.1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que um operador linear $T : V \to V$ é auto-adjunto se $T = T^*$.

Exemplo 5.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (y, x)$. Vimos, no exemplo 4.6, que $T^* = T$. Logo, T é um operador auto-adjunto.

Exemplo 5.2 (Operador Não-auto-adjunto)**.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (-y, x)$. Vimos, no exemplo 4.5, que $T^*(a, b) = (b, -a)$. Em particular,

$$T^*(1, 1) = (1, -1) \text{ e } T(1, 1) = (-1, 1).$$

Ou seja, $T^* \neq T$. Isto nos diz que T não é auto-adjunto (ver definição 5.1).

Exemplo 5.3. Seja V o espaço dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ com o produto interno canônico de $C([0, 1])$ (ver exemplo 1.3). Fixe $g \in V$. Defina $T : V \to V$ pondo $T(f) = f \cdot g$, para todo $f \in V$. Vimos, no exemplo 4.3, que $T = T^*$. Com isso, T é auto-adjunto (ver definição 5.1).

Exemplo 5.4. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $v \in V$ um vetor fixo. Seja $T : V \to V$ definida por $T(u) = \langle v, u \rangle v$, para todo $u \in V$. Vamos mostrar que T é auto-adjunto. De fato,

$$\langle v, T(u) \rangle = \langle v, \langle v, u \rangle v \rangle = \langle v, u \rangle \langle v, v \rangle = \langle \langle v, v \rangle v, u \rangle = \langle T(v), u \rangle,$$

ou seja, $T^* = T$. Isto nos diz que T é auto-adjunto (ver definição 5.1).

5.2.2 Resultados Importantes

Vejamos alguns resultados para operadores auto-adjuntos.

Proposição 5.1. *Seja V espaço vetorial com produto interno e seja $T : V \to V$ um operador auto-adjunto e um isomorfismo. Então T^{-1} também o é.*

Demonstração. A Proposição 4.4 nos diz que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$, pois $T = T^*$. Ou seja, T^{-1} é auto-adjunto. □

Exemplo 5.5. Seja $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Então T é auto-adjunto. De fato,

$$\begin{aligned} \langle (a, b), T(x, y) \rangle &= \langle (a, b), (x + y, x - y) \rangle \\ &= a(x + y) + b(x - y) \\ &= x(a + b) + y(a - b) \\ &= \langle (a + b, a - b), (x, y) \rangle \end{aligned}$$

implica que $T^*(a,b) = (a+b, a-b)$, e isso mostra que $T^* = T$. Convidamos o aluno a mostrar que $T^{-1}(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ é a inversa de T. Pelo Teorema 5.1, T^{-1} é auto-adjunto.

5.2.3 Matrizes de Operadores Auto-adjuntos

Caro aluno, é possível verificarmos se um operador é auto-adjunto através da matriz deste, em relação a uma base ortonormal. Vejamos a prova desta afirmação.

Teorema 5.1 (Caracterização de Operadores Auto-adjuntos)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Então T é auto-adjunto se, e somente se, $[T]_\beta$ é simétrica, onde β é base ortonormal de V. Lembre que uma matriz A é simétrica se $A = A^t$.*

Demonstração. Suponha que T é auto-adjunto. Seja β base ortonormal de V. Vimos no Teorema 4.4 que $[T^*]_\beta = [T]_\beta^t$. Como T é auto-adjunto, então $T^* = T$ (ver Definição 5.1). Logo, $[T]_\beta = [T^*]_\beta = [T]_\beta^t$. Isto nos diz que $[T]_\beta$ é simétrica.

Reciprocamente, suponha que $[T]_\beta = [T]_\beta^t$, onde $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V. Consequentemente, $\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle T(v_j), v_i \rangle$, para todo i, j, estas são as entradas das matrizes $[T]_\beta$ e $[T]_\beta^t$, respectivamente. Se $u, v \in V$, então, pela definição de base, $u = \sum_i x_i v_i$ e $v = \sum_j y_j v_j$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle u, T(v) \rangle &= \left\langle \sum_i x_i v_i, T\left(\sum_j y_j v_j\right) \right\rangle \\
&= \sum_i x_i \sum_j y_j \langle v_i, T(v_j) \rangle \\
&= \sum_i x_i \sum_j y_j \langle T(v_j), v_i \rangle \\
&= \sum_i x_i \sum_j y_j \langle T(v_i), v_j \rangle,
\end{aligned}$$

na última igualdade usamos que $\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, T(v_j) \rangle$. Por fim,

$$\langle u, T(v) \rangle = \left\langle \sum_i x_i T(v_i), \sum_j y_j v_j \right\rangle = \left\langle T\left(\sum_i x_i v_i\right), \sum_j y_j v_j \right\rangle = \langle T(u), v \rangle.$$

Logo, usando a Proposição 1.1, temos que, $T^* = T$. Pela Definição 5.1, T é auto-adjunto. $\square$

A hipótese de ortonormalidade da base não pode ser desconsiderada. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5.6. Seja $T(x, y, z) = (2x + 2z, x + z, x + z)$ operador linear sobre $V = \mathbb{R}^3$ e seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ uma base de V (esta base não é ortonormal, verifique!). Note que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim sendo, $[T]_\beta$ é simétrica, mas T não é auto-adjunto. Com efeito,

$$\langle T(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle = \langle (2, 1, 1), (0, 1, 0)\rangle = 1 \text{ e } \langle (1, 0, 0), T(0, 1, 0)\rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 0)\rangle = 0.$$

Logo, $\langle T(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle \neq \langle (1, 0, 0), T(0, 1, 0)\rangle$.

Exemplo 5.7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Note que,

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde c é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ (a qual é ortonormal, ver exemplo 2.8). Veja que $[T]_c$ não é simétrica, logo, T não é auto-adjunto, pelo Teorema 5.1.

Exemplo 5.8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$. Veja que

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica, onde c é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Dessa forma, pelo Teorema 5.1, T é auto-adjunto.

5.2.4 Teorema Espectral para Operadores Auto-adjuntos

Prezados alunos, mostraremos nesta seção que para operadores auto-adjuntos sobre um espaço vetorial V existe uma base ortonormal desse espaço formada por autovetores. Isto garante que a representação matricial do operador é uma matriz diagonal. Tal resultado é conhecido como Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos. Para chegarmos até tal teorema, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 5.1. *Seja T um operador linear auto-adjunto sobre um espaço vetorial com produto interno V. Então autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração. Sejam $v, w \in V$ autovetores associados a autovalores distintos λ e μ, respectivamente. Ou seja, $Tv = \lambda v$ e $Tw = \mu w$. Então, por ser T auto-adjunto, segue que $\langle v, Tw\rangle = \langle Tv, w\rangle$. Assim, $\langle v, \mu w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle$. Consequentemente, $\mu\langle v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ e $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$. Como $\lambda \neq \mu$, temos que $\langle v, w\rangle = 0$. Usando a Definição 2.2, concluimos que $v \perp w$. □

Lema 5.2. *Seja T um operador auto-adjunto sobre um espaço vetorial com produto interno V. Se U é um subespaço T-invariante, então $U^\perp$ também o é (ver Proposição 4.5).*

Demonstração. Este Lema é só uma reformulação do exemplo 4.10. □

Lema 5.3. *Seja $T : V \to V$ um operador linear auto-adjunto sobre um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita V. Então o conjunto de autovalores de T é não-vazio e está constituído por números reais.*

Demonstração. Seja β uma base ortonormal de V (existe pelo Teorema 2.2). Considere que $\dim V = n > 0$. Então, pelo Teorema 5.1, $[T]_\beta = A = (A_{ij})$ é simétrica, pois T é um operador auto-adjunto. Considere o polinômio característico de T, $p_A(x) = det(xI - A)$, onde I é a matriz identidade $n \times n$. Então λ é autovalor de T se, e somente se, $p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0$. Note que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, este polinômio tem pelo menos uma raiz complexa λ. Vamos mostrar que $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $det(\lambda I - A) = 0$, segue que o sistema linear $AX = \lambda X$ possui infinita soluções não-nulas para X (matriz $n \times 1$ com entradas complexas). Digamos que

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

é uma solução não-nula de $AX = \lambda X$. Ou seja, $AY = \lambda Y$ e $Y \neq \mathbf{0}$. Escrevendo esta equação matricial como sistema linear, obtemos as equações

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j = \lambda y_i,\ \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Com isso, multiplicando por $\overline{y_i}$, encontramos $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i} = \lambda y_i \overline{y_i}, (i = 1, 2, ..., n)$. Somando estes resultados, obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i} \ \ = \ \ \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{y_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2. \tag{5.1}$$

(este módulo é o módulo de um número complexo). Observe que esta última soma resulta em um número real. Vamos, agora, verificar que $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i} \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i} = \overline{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i}}.$$

De fato,

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i}} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{A_{ij}}\, \overline{y_j} y_i = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \overline{y_j} y_i,$$

na última igualdade usamos o fato que A é uma matriz real. Como A é simétrica, então

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i}} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ji} \overline{y_j} y_i = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \overline{y_i} y_j = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i},$$

na penúltima igualdade fizemos uma mudança de índices de i por j. Consequentemente, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} y_j \overline{y_i} \in \mathbb{R}$. Mas, $\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^2 \in \mathbb{R}$. Pelas igualdades em 5.1, concluímos que $\lambda \in \mathbb{R}$. Dessa forma, λ é um autovalor real de T. □

Teorema 5.2 (Teorema Espectral para Operadores Auto-adjuntos)**.** *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita V. Então T é auto-adjunto se, e somente se, existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.*

Demonstração. Seja $\dim V = n$. Faremos a prova por indução sobre n. Se $n = 1$ e $\{v\}$ é uma base de V, segue que $\left\{\dfrac{v}{\|v\|}\right\}$ (ver observação **??**) é uma base ortonormal de V formada por um autovetor, pois nesse caso, todo elemento não-nulo de V é autovetor já que $T(v) \in V$ implica, pela definição de base, que $T(v) = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Agora considere $n > 1$ e suponha que o Teorema seja válido para todo subespaço de V com dimensão menor que n. Como $n > 1$, segue do Lema 5.3 que existe $v_1 \in V$ autovetor unitário de T associado a um autovalor α. Seja $U = [v_1]$. Assim, pela Observação 3.1, temos que $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U = n - 1 < n$. Além disso, para qualquer elemento $w = \mu v_1$ em U temos que $T(\mu v_1) = \mu T(v_1) = (\mu\alpha)v_1 \in U$. Isto nos diz que U é T-invariante e, em consequência, do Lema 5.2, concluimos que $U^{\perp}$ é T-invariante. Resumindo, $U^{\perp}$ é um subespaço de dimensão menor que n e T-invariante. Por hipótese de indução, existe uma base ortonormal $\{v_2, v_3, ..., v_n\}$ de $U^{\perp}$ formada por autovetores de T. Logo, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T (ver Teorema 3.1).

Reciprocamente, seja $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V formada por autovetores de T, digamos que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Vamos provar que T é auto-adjunta. Desde que nessa base

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica, ou seja, $[T]_{\beta} = [T]_{\beta}^{t}$, segue do Teorema 5.1 que T é auto-adjunto. $\square$

Vejamos uma aplicação (ou uma reformulação) do Teorema Espectral para matrizes.

Corolário 5.3 (Teorema Espectral para Matrizes Simétricas)**.** *Seja*

$$A \in M_n(\mathbb{R}) = \{\textit{matrizes } n \times n \textit{ com coeficientes reais}\}$$

uma matriz simétrica. Então existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $D = P^t A P$, onde D é uma matriz diagoonal, constituída dos autovalores de A na diagonal (lembre que P é ortogonal se $P^{-1} = P^t$, isto é, $PP^t = P^t P = I$).

Demonstração. Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e c a base canônica desse espaço vetorial (ver exemplo 2.9).

Seja $T : V \to V$ o operador linear tal que $[T]_c = A$. Como c é ortonormal A é simétrica, então, pelo Teorema 5.1, T é um operador auto-adjunto. Pelo Teorema 5.2, existe base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V formada por autovetores de T, digamos $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Logo,

$$D = [T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Mas, $D = [T]_\beta = P^{-1}AP$, onde P é a matriz mudança de base de β para c. Isto é, P possui como colunas os vetores da base β. Seja $v_i = (x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i)$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Logo,

$$\begin{aligned} P^tP &= \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^1 & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & ... & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & ... & \langle v_2, v_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & ... & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I, \end{aligned}$$

a penúltima igualdade segue da ortonormalidade de β. Ou seja, P é ortogonal ($P^{-1} = P^t$), basta utilizar o Teorema do núcleo e imagem. □

Exemplo 5.9. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Encontre A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que A é uma matriz simétrica. Vamos encontrar os autovalores de A. Para isto, basta encontrar as raízes do polinômio característico. Veja que

$$p_A(x) \;=\; det(xI - A) = det \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x+2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-1)(x+2)-4 \\
&= (x+3)(x-2),
\end{aligned}
$$

(I é a matriz identidade 2×2) é o polinômio característico de A. Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Agora, vamos encontrar os autovetores associados a estes autovalores. Comecemos com o autovalor $\lambda_1 = -3$. Seja $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um autovetor qualquer de A associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$. Então $Av = -3v$, ou seja,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
$$

Em forma de sistemas lineares, obtemos

$$
\begin{cases} x + 2y & = -3x; \\ 2x - 2y & = -3y. \end{cases}
$$

Este sistema é equivalente ao sistema

$$
\begin{cases} 4x + 2y & = 0; \\ 2x + y & = 0. \end{cases}
$$

A solução deste sistema é $y = -2x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$
v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.
$$

Logo o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$ é $V_{-3} = [(1, -2)]$. Agora, considere o autovalor $\lambda_2 = 2$. Seja $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um autovetor qualquer de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$. Logo, $Av = 2v$. Isto é,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
$$

Em forma de sistema linear, obtemos

$$\begin{cases} x + 2y &= 2x; \\ 2x - 2y &= 2y. \end{cases}$$

Este sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -x + 2y &= 0; \\ 2x - 4y &= 0. \end{cases}$$

Portanto, a solução deste sistema é $x = 2y$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Assim sendo,

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ é $V_2 = [(2,1)]$. Consequentemente, obtemos uma base formada por autovetores $\{v_1 = (1,-2), v_2 = (2,1)\}$ do operador A. Ora, esses autovetores são asssociados a autovalores distintos, donde pelo Lema 5.1 eles são ortogonais. Resta então normalizá-los para obtermos uma base ortonormal. Dessa forma, $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal formada por autovetores de A. Colocando estes vetores em coluna encontramos a matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

A matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(autovalores de A na diagonal) satisfaz $D = P^{-1}AP$, onde $P^{-1} = P^t$. Consequentemente, $A = PDP^{-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}, \\ A^3 &= A^2A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Ou seja,

$$A^n = PD^nP^{-1} = PD^nP^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5.10. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Veja que A é uma matriz simétrica. Vamos encontrar os autovalores de A. Note que

$$p_A(x) = det(xI - A) = det \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix} = (x+1)^2(x-3).$$

(I é a matriz identidade 3×3) é o polinômio característico de A. Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ (com multiplicidade algébrica 2) e $\lambda_2 = 3$. Agora, vamos encontrar os autovetores associados a estes autovalores. Comecemos com o autovalor $\lambda_1 = -1$. Seja $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ um autovetor qualquer de A associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$. Daí, $Av = -v$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Em forma de sistema linear, obtemos

$$\begin{cases} x - 2y &= -x; \\ -2x + y &= -y; \\ -z &= -z. \end{cases}$$

Este sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y &= 0; \\ -2x + 2y &= 0. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $x = y$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Com isso,

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $V_{-1} = [(1,1,0),(0,0,1)]$. Agora, considere o autovalor $\lambda_2 = 3$. Seja $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ um autovetor qualquer de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$. Logo, $Av = 3v$. Isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Em forma de sistema linear, temos que

$$\begin{cases} x - 2y & = 3x; \\ -2x + y & = 3y; \\ -z & = 3z. \end{cases}$$

Este sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -2x - 2y & = 0; \\ -2x - 2y & = 0; \\ z & = 0. \end{cases}$$

Portanto, a solução deste sistema é $x = -y, \forall\ y \in \mathbb{R}$. Assim sendo,

$$v = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$ é $V_3 = [(-1,1,0)]$. Por conseguinte, $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,0,1), v_3 = (-1,1,0)\}$ é uma base formada por autovetores de A.

Mais uma vez, como v_3 é autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$ e v_1 e v_2 são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$, segue que $v_3 \perp v_1$ e $v_3 \perp v_2$. Agora, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Assim, a base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é ortogonal. Resta então normalizá-la, multiplicando cada vetor base pelo inverso de sua norma. Dessa forma, $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0,0,1), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$ é uma base ortonormal formada por autovetores de A. Colocando estes vetores em coluna encontramos a matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(autovalores de A na diagonal) satisfaz $D = P^{-1}AP$, onde $P^{-1} = P^t$.

Exercícios de Fixação

1. Seja $T(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ um operador linear. Mostre que T é auto-adjunto. Encontre os autovalores de T e uma base ortonormal formada por autovetores de T.

2. Explique por que para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

existe uma matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal. Encontre as matrizes P e D.

3. Explique por que para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

existe uma matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal. Encontre os autovalores de A e as matrizes P e D.

4. Explique por que para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

existe uma matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal. Encontre os autovalores de A e as matrizes P e D. Determine A^5, usando o Corolário 5.3.

5. Explique por que para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

existe uma matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal. Encontre os autovalores de A e as matrizes P e D.

6. Explique por que para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

existe uma matriz ortogonal P tal que $P^tAP = D$ é diagonal. Encontre as matrizes P e D.

7. Dados o vetores $v = (2, -1, -2)$ e $w = (3, -6, -6)$, determine o operador auto-adjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (1, 1, 13)$ e $T(w) = (3, 21, 33)$, sabendo que o traço de T é 5, isto é, $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5$, onde $[T] = (a_{ij})$.

8. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Prove que A é simétrica e encontre P ortogonal tal que $P^tAP = D$ é uma matriz diagonal.

5.3 Operadores Definidos Positivos

Caros alunos, nesta seção exporemos as definições dos operadores definidos positivos. Almejamos, principalmente, encontrar a caracterização existente entre alguns destes operadores e seus autovalores.

5.3.1 Definição e Exemplos

Definição 5.2. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T : V \to V$ um operador auto-adjunto T sobre V(ver Definição 5.1) é dito definido positivo, e escrevemos $T > 0$, se $\langle T(v), v \rangle > 0$, para todo $v \in V$, com $v \neq \mathbf{0}$.

Obs 5.1. De forma semelhante, definimos operadores definido não-negativo, negativo, não positivo (usando os sinais $\geq$, $<$, e $\leq$, respectivamente. Dizemos que T é indefinido se existem $u, v \in V$ tais que $\langle T(u), u \rangle > 0$ e $\langle T(v), v \rangle < 0$ e

Exemplo 5.11. Seja $I(x, y) = (x, y)$ o operador identidade de $\mathbb{R}^2$. Vimos, na Proposição 4.3, que I é auto-adjunto. Além disso,

$$\langle I(x, y), (x, y) \rangle = \langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Mas, $x^2 + y^2 = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$. Assim,

$$\langle I(x, y), (x, y) \rangle = x^2 + y^2 > 0, \forall\ (x, y) \neq (0, 0).$$

Dessa forma, pela Definição 5.2, $I > 0$.

Exemplo 5.12. Seja $T(x, y) = (y, x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vimos que T é auto-adjunto (ver exemplo 4.6). Além disso,

$$\langle T(x, y), (x, y) \rangle = \langle (y, x), (x, y) \rangle = yx + xy = 2xy.$$

Logo T é um operador indefinido, pois

$$\langle T(1, -1), (1, -1) \rangle = -2 < 0 \text{ e } \langle T(1, 1), (1, 1) \rangle = 2 > 0.$$

Obs 5.2. Poderíamos definir operadores negativos, não-negativos, não-positivos ...

Exemplo 5.13 (Operador Não-negativo em $\mathbb{R}^2$)**.** Seja $T(x, y) = (x+y, x+y), \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é simétrica, então pelo Teorema 5.1, T é auto-adjunto. Além disso,

$$\langle T(x, y), (x, y) \rangle = \langle (x + y, x + y), (x, y) \rangle = (x + y)x + (x + y)y = (x + y)^2 \geq 0.$$

Isto nos diz que $T \geq 0$ (ver Definição 5.2). Porém, $\langle T(1,-1),(1,-1)\rangle = (1-1)^2 = 0$. Portanto, pela Definição 5.2, T não é positivo.

Exemplo 5.14 (Operador Negativo em $\mathbb{R}^2$)**.** Seja $T(x,y) = (-x,-y)$. Note que T é auto-adjunto, pois sua matriz, em relação à base canônica c, é dada por

$$[T]_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é simétrica (ver Teorema 5.1). Além disso,

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle(-x,-y),(x,y)\rangle = -x^2 - y^2 \leq 0.$$

Mas, $-x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Assim,

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = -x^2 - y^2 < 0, \forall\ (x,y) \neq (0,0).$$

Dessa forma, pela Definição 5.2, $T < 0$.

Exemplo 5.15 (Operador Não-positivo em $\mathbb{R}^2$)**.** Seja $T(x,y) = (-x,-y)$. Vimos no exemplo 5.14 que

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle \leq 0, \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, $T \leq 0$.

Exercícios de Fixação

1. Seja V um espaço vetorial com dimensão finita e produto interno. Seja $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Defina $g_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Se $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, mostre que vale $\langle u,v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$. Verifique que $G = (g_{ij})$ é uma matriz simétrica e positiva, isto é, $[u]_\beta^t G [u]_\beta, \forall\ u \neq \mathbf{0}$ em V. Reciprocamente, mostre que se G for uma matriz simétrica positiva, então $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define um produto interno em V. A matriz G é chamada matriz de Gram dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

2. Entre as matrizes abaixo, determine quais são positivas.

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Mostre que um operador T é positivo se, e somente se, T é não-negativo e invertível.

5.4 Raiz Quadrada de Operadores Lineares

5.4.1 Definição e Exemplos

Definição 5.3. Seja V um espaço vetorial. Seja $S : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um operador linear $T : V \to V$ é raiz quadrada de S se $T^2 = S$, isto é, $T \circ T = S$.
Notação: $T = \sqrt{S}$.

Exemplo 5.16. Seja $T(x, y) = (y, x)$. Note que

$$T^2(x, y) = T \circ T(x, y) = T(y, x) = (x, y) = I(x, y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $T^2 = I$. Com isso, $T = \sqrt{I}$.

Exemplo 5.17. Seja $S(x, y) = (-x - y, -x - y)$. Suponha que existe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ raiz quadrada de S. Assim, $T^2 = S$, ou seja,

$$T^2(x, y) = S(x, y) = (-x - y, -x - y).$$

Logo,

$$T^2(1, 0) = (-1, -1) \text{ e } T^2(0, 1) = (-1, -1).$$

Aplicando o Teorema 4.1 aos funcionais $T_1(x, y)$ e $T_2(x, y)$, onde $T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$. Concluímos que $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Daí, $T(1, 0) = (a, c)$ e $T(0, 1) = (b, d)$. Portanto,

$$(-1, -1) = T^2(1, 0) = T(a, c) = (a^2 + bc, ca + dc)$$

e

$$(-1,-1) = T^2(0,1) = T(b,d) = (ab+bd, cb+d^2).$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} b(a+d) = -1; \\ c(a+d) = -1; \\ a^2 + bc = -1. \end{cases}$$

Portanto, $b = c$ (ver as duas primeiras equações do sistema acima). Substituindo este resultado na terceira equação, obtemos $0 \leq a^2 + b^2 = -1$. Isto é um absurdo. Portanto, S não possui raiz quadrada.

5.4.2 Resultados Importantes

Prezados alunos, vejamos que condições devemos colocar em um operador para garantir a existência e unicidade de uma raiz quadrada deste. Além disso, iremos responder à seguinte pergunta: que condições esta raiz deve satisfazer? Para responder esta indagação, primeiramente iremos estabelecer uma nova definição para operadores definidos.

Lema 5.4. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador auto-adjunto. Então T é positivo se, e somente se, os autovalores de T são positivos.*

Demonstração. Suponha que $T > 0$ (ver Definição 5.2). Então $\langle T(v), v \rangle > 0$, para taodo $v \in V$, com $v \neq \mathbf{0}$. Seja λ autovalor de T. Logo, existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Assim sendo,

$$0 < \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.$$

Como $\langle v, v \rangle > 0$ (ver Definição 1.2), então $\lambda > 0$.

Reciprocamente, considere que os autovalores de T são positivos. Como T é auto-adjunto, então, pelo Teorema 5.2, existe uma base ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V formada por autovetores de T, digamos $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Sabemos que $\lambda_i > 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Seja $v \neq \mathbf{0}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ (no mínimo um destes x_i's é não-nulo). Vamos motrar que $\langle T(v), v\rangle > 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle T(v), v\rangle &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right), \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle T(v_i), v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a Definição 2.4 e na desigualdade acima usamos o fato que $v \neq \mathbf{0}$. Com isso, $\langle T(v), v\rangle > 0$, para todo $v \in V$, com $v \neq \mathbf{0}$. Portanto, $T > 0$ (ver Definição 5.2). □

Obs 5.3. Note que o Lema 5.4 nos diz, implicitamente, que T é indefinido se, e somente se possui autovalores positivo e negativo simultaneamente (se $\dim V > 1$).

Exemplo 5.18. Seja $T(x, y) = (x + y, x + y)$. Sabemos que $T \geq 0$ (ver exemplo 5.13). Pelo Lema 5.4, os autovalores de T são não-negativos. De fato, a matriz de T em relação à base canônica c (ver exemplo 2.8) é dada por

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que o polinômio característico de T é dado por

$$p_T(x) = det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 - 1 = x(x-2).$$

Logo os autovalores de T são 0 e 2, ou seja, números não-negativos.

Exemplo 5.19. Seja $T(x, y) = (2y, 2x)$. Verifique que T é auto-adjunto. Além disso, a matriz de T em relação à base canônica c (ver exemplo 2.8) é dada por

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, o polinômio característico de T é dado por

$$p_T(x) = det \left(\begin{array}{cc} x & -2 \\ -2 & x \end{array} \right| = x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

Logo os autovalores de T são -2 e 2. Assim, T possui autovalor positivo e negativo. Usando o Lema 5.4, temos que T é indefinido.

Teorema 5.4 (Existência e Unicidade da Raiz Quadrada)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Seja $S : V \to V$ um operador não-negativo. Então existe uma (única) raiz quadrada não-negativa de T.*

Demonstração. Como $S \geq 0$, então S é auto-adjunto (ver Definição 5.2). Usando o Teorema 5.2, encontramos uma base ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V formada por autovetores de S, digamos $S(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$ (isto é, os λ_i's são os autovalores de S). Como $S \geq 0$, então, pelo Lema 5.4, $\lambda_i \geq 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Defina, para cada $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, o operador

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} x_i v_i.$$

Verifique que T é linear. Vamos mostrar que T é auto-adjunto. Com efeito, para $u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, temos que

$$\langle u, T(v) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} y_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} x_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} x_j y_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} x_i y_i,$$

ver Definição 2.4. Por outro lado,

$$\langle T(u), v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} y_i v_i, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} x_j y_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} x_i y_i,$$

ver Definição 2.4. Com isso,

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$$

, para todo $u, v \in V$. Pela Definição 5.1, temos que T é auto-adjunto. Além disso, $T(v_i) = \sqrt{\lambda_i}v_i, \forall\ i = 1, 2, ..., n$. Ou seja, os autovalores de T, são números não-negativos ($\sqrt{\lambda_i} \geq 0$). Usando o Lema 5.4, concluímos que T é não-negativo. Por fim, utilizando as definições de T e S acima, obtemos

$$\begin{aligned} T^2(u) &= T[T(u)] = T\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} y_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} y_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} y_i \sqrt{\lambda_i} v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i(\lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i S(v_i) = S\left(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right) = S(u). \end{aligned}$$

Dessa forma, $T^2 = S$, ou seja, $T = \sqrt{S}$. $\square$

Obs 5.4. A unicidade da raiz quadrada não foi provada no Teorema acima, por motivos de simplificações na demonstração. Para ver a prova deste resultado consulte [4]. Além disso, note que na demonstração do Teorema 5.4, descrevemos como encontrar esta raiz quadrada (ver definição de T).

Exemplo 5.20. Seja $S(x, y) = (x+y, x+y)$ um operador linear definido em $\mathbb{R}^2$. O exemplo 5.13 nos diz que $S \geq 0$. Pelo Teorema 5.4, existe uma única raiz quadrada para este operador. Vamos encontrá-la. Primeiramente, precisamos dos autovalores de S. Vimos no exemplo 5.19 que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores de T. Verifique que

$$S\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0, 0) \text{ e } S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

onde $\left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de S (utilize o método exposto no Corolário 5.3 para encontrar tais vetores). Seja T a raiz quadrada de S. Vimos na demonstração do Teorema 5.4 que

$$T(x, y) = \frac{\sqrt{2}(y-x)}{2}\sqrt{0}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y, x+y),$$

onde

$$(x, y) = \frac{\sqrt{2}(y-x)}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Verifique que $T = \sqrt{S}$.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que são equivalentes as seguintes condições sobre um operador linear $T : V \to V$.

i) $T = P^2$, para algum $P : V \to V$ auto-adjunto;

ii) $T = S^* \circ S$, para algum $S : V \to V$ auto-adjunto;

iii) $T \geq 0$.

5.5 Conclusão

Concluímos que operadores auto-adjuntos são operadores lineares diagonalizáveis com espectro real.

5.6 Exercícios Propostos

1. Seja A uma matriz simétrica. Seja λ o autovalor de T de menor módulo. Mostre que A é invertível se, e somente se, $\lambda \neq 0$.

2. Sejam $S, T : V \to V$ operadores auto-adjuntos no espaço vetorial V com produto interno e dimensão finita. Mostre que $S \circ T$ é auto-adjunto $\Leftrightarrow S \circ T = T \circ S$.

3. Seja $T : V \to V$ um operador auto-adjunto. Prove que $T^n(v) = 0,$ para algum $n \in \mathbb{N} \Rightarrow T(v) = \mathbf{0}$.

4. Prove que os operadores auto-adjuntos $S, T : V \to V$ são iguais $\Leftrightarrow \langle S(v), v\rangle = \langle T(v), v\rangle$, $\forall\ v \in V$.

Próxima Aula

Na sequência será apresentado os operadores ortogonais e suas propriedades.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.