Capítulo 6

Operadores Ortogonais

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 6: Operadores Ortogonais

Meta

Apresentar ao aluno a definição e diversas propriedades dos operadores ortogonais.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar um operador ortogonal e conhecer suas principais propriedades.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I.

6.1 Introdução

Os operadores ortogonais têm como principal característica a preservação de comprimentos e, consequentemente, transforma bases ortonormais em bases ortonormais. Diante disto, verificamos que seus autovalores, caso existam, são somente 1 ou -1. Transformações como rotações são exemplos de operadores ortogonais.

6.2 Operadores Ortogonais

Vamos utilizar, inicialmente, a definição de isometria para estabelecer quais condições deve satisfazer um operador ortogonal.

6.2.1 Definição e Exemplos de Isometrias

Definição 6.1. Seja $T : U \to V$ uma aplicação linear, onde U e V são espaços vetoriais com respectivos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_U, \langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Dizemos que T é uma isometria se

$$\|T(u) - T(v)\|_V = \|u - v\|_U,$$

para todo $u, v \in U$. Aqui $\| \cdot \|_U = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_U}$ e $\| \cdot \|_V = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_V}$.

Obs 6.1. Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ os produtos $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ e por $\|\cdot\|$ as normas $\|\cdot\|_U$ e $\|\cdot\|_V$.

Exemplo 6.1 (Translação é Isometria)**.** Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja $T : V \to V$ uma translação, isto é, $T(v) = v + w$, onde $w \in V$ está fixo. Afirmamos que T é uma isometria. Com efeito,

$$\|T(u) - T(v)\| = \|u + w - (v + w)\| = \|u + w - v - w\| = \|u - v\|,$$

para todo $u, v \in V$.

Exemplo 6.2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\|T(x,y) - T(a,b)\|^2 &= \|(y,x) - (b,a)\|^2\\ &= (y-b)^2 + (x-a)^2\\ &= (x-a)^2 + (y-b)^2\\ &= \|(x,y) - (a,b)\|^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|T(x,y) - T(a,b)\| = \|(x,y) - (a,b)\|,$$

para todo $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Daí, T é uma isometria.

Exemplo 6.3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (1, y)$. Assim sendo,

$$\|T(1,1) - T(0,1)\| = \|(1,1) - (1,1)\| = 0.$$

Por outro lado, $\|(1, 1) - (0, 1)\| = \|(1, 0)\| = 1$. Daí, $\|T(1, 1) - T(0, 1)\| \neq \|(1, 1) - (0, 1)\|$. Logo, T não é uma isometria.

6.2.2 Operadores Lineares e Isometrias

Prezado aluno, quando uma aplicação $T : U \to V$ é linear, é possível caracterizar uma isometria da seguinte forma:

Proposição 6.1 (Caracterização Isometria Linear)**.** Seja $T : U \to V$ uma aplicação linear, onde U, V são espaços vetoriais com os respectivos produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_U, \langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Então T é uma isometria se, e somente se, $\|T(u)\|_V = \|u\|_U, \forall\, u \in U$, isto é, T preserva norma.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que T é uma isometria. Como T é linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Consequentemente,

$$\|T(u)\|_V = \|T(u - \mathbf{0})\|_V = \|T(u) - T(\mathbf{0})\|_V = \|u - \mathbf{0}\|_U = \|u\|_U, \forall\ u \in U,$$

na terceira igualdade usamos a Definição 6.1.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\|T(u)\|_V = \|u\|_U, \forall\ u \in U$. Portanto, utilizando a definição de aplicação linear, obtemos

$$\|T(u) - T(v)\|_V = \|T(u - v)\|_V = \|u - v\|_U, \forall\ u, v \in U.$$

Portanto, T é uma isometria (ver Definição 6.1). $\square$

Exemplo 6.4 (Isometria Linear em $\mathbb{R}^2$)**.** Vejamos outra maneira de verificar que a aplicação $T(x, y) = (y, x)$ é uma isometria. Note que T é linear (verifique!). Além disso,

$$\|T(x, y)\| = \|(y, x)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|, \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, pela Proposição 6.1, T é uma isometria.

6.2.3 Definição e Exemplos de Operadores Ortogonais

Definição 6.2. Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que T é um operador ortogonal se T é uma isometria.

Obs 6.2. A Proposição 6.1 nos diz que um operador linear $T : V \to V$ é ortogonal se, e somente se, $\|T(u)\| = \|u\|$, para todo $u \in V$.

Exemplo 6.5. No exemplo 6.4, vimos que $T(x, y) = (y, x)$ é um operador ortogonal.

Exemplo 6.6. O operador $T(x, y) = (x + y, y)$ não é ortogonal. Com efeito,

$$\|T(1, 1)\| = \|(2, 1)\| = \sqrt{5} \text{ e } \|(1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Logo, $\|T(1, 1)\| \neq \|(1, 1)\|$. Usando a Proposição 6.1, concluímos que T não é ortogonal (ver Definição 6.2).

6.2.4 Alguns Resultados sobre Operadores Ortogonais

Caro aluno, agora vamos mostrar outras maneiras de definir operador ortogonal sobre espaços vetoriais com produto interno.

Teorema 6.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então são equivalentes os seguintes itens:*

i) *T é um operador ortogonal;*

ii) *$\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$, para todo $u, v \in V$, isto é, T preserva produto interno;*

iii) *$T^* \circ T = I$, caso exista T^* (aqui I é o operador identidade).*

Demonstração. Vamos provar as implicações **i**) $\Rightarrow$ **ii**) $\Rightarrow$ **iii**) $\Rightarrow$ **i**).

Comecemos com a implicação **i**) $\Rightarrow$ **ii**). Se T é um operador ortogonal, então pela Proposição 6.1, $\|T(u)\| = \|u\|$, para todo $u \in V$. Assim, usando a identidade de polarização (ver exercícios da aula 01), obtemos

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle^2 &= \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|T(u+v)\|^2 - \frac{1}{4}\|T(u-v)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|T(u)+T(v)\|^2 - \frac{1}{4}\|T(u)-T(v)\|^2 \\ &= \langle T(u), T(v)\rangle^2, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in V$. Logo, $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$, para todo $u, v \in V$.

ii) $\Rightarrow$ **iii**) Se $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$, para todo $u, v \in V$, então, pela Definição 4.2, obtemos

$$\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^* \circ T(v)\rangle,$$

para todo $u, v \in V$, ou seja, $\langle u, T^* \circ T(v) - v\rangle = 0$, para todo $u, v \in V$, Dessa forma, pela Proposição 1.1, concluímos $T^* \circ T(v) = v$, para todo $v \in V$. Com isso, $T^* \circ T = I$.

iii) $\Rightarrow$ **i**) Considere que $T^* \circ T = I$. Note que, pela Definição 4.2, encontramos as igualdades

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, T^* \circ T(u)\rangle = \langle u, I(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2,$$

para todo $u \in V$. Portanto, pela Proposição 6.1, temos que T é um operador ortogonal. $\square$

Exemplo 6.7. Sabemos que a identidade, $I : V \to V$, satisfaz $I^* = I$ (ver Proposição 4.3). Além disso, $I^{-1} = I$ (verifique!). Com isso, $I^{-1} = I^*$. Portanto, pelo item **iii)** do Teorema 6.1, temos que I é ortogonal. Outra maneira de verificar que I é ortogonal é utilizar o item **ii)** do Teorema 6.1. De fato,

$$\langle u, v\rangle = \langle I(u), I(v)\rangle,$$

para todo $u, v \in V$.

Corolário 6.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e dimensão finita. Enão T é ortogonal se, e somente se, T^* também o é.*

Demonstração. Se T é ortogonal, então $T^{-1} = T^*$. Usando o Teorema 4.4 e a Proposição 4.3, temos que

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* = T^{**}.$$

Pelo item **iii)** do Teorema 6.1, T^* é ortogonal.

Reciprocamente, se T^* é uma isometria, então $(T^*)^{-1} = T^{**} = T$ (ver Proposição 4.3). Com isso, $T^{-1} = [(T^*)^{-1}]^{-1} = T^*$, ou seja, T é uma isometria (ver item **iii**) do Teorema 6.1). $\square$

Exemplo 6.8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Verifique que T é ortogonal. Vimos que $T^* = -T$ (ver exemplo 4.5). Logo, $-T$, definido por $-T(x, y) = (y, -x)$, é um operador ortogonal, pelo Corolário 6.2.

Corolário 6.3. *Seja $T : V \to V$ um operador ortogonal, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Então T transforma conjuntos ortonormais em conjuntos ortonormais, isto é, se $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é ortonormal então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_m)\}$ também o é.*

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ um conjunto ortonormal de V. Utilizando o Teorema 6.1, obtemos

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., m$ (ver Definição 2.4). Logo, $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_m)\}$ é um conjunto ortonormal (ver Definição 2.4). $\square$

Exemplo 6.9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$. T é um operador ortogonal (verifique!). Sabemos que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ (ver exemplo 2.8). Portanto, pelo Corolário 6.3, $\{T(1, 0), T(0, 1)\} = \{(0, 1), (-1, 0)\}$ é um conjunto ortonormal.

Proposição 6.2. *Seja $T : V \to V$ um operador ortogonal, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então os possíveis autovalores de T são 1 e -1.*

Demonstração. Seja v um autovetor de T, ou seja, seja $v \neq \mathbf{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Vamos provar que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Com efeito, sabemos que $\|T(v)\| = \|v\|$ (ver Definição 6.2). Com isso, pela Definição 1.1,

$$|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|T(v)\| = \|v\|.$$

Assim, $(|\lambda| - 1)\|v\| = 0$. Como $\|v\| > 0$, então $|\lambda| = 1$. Por fim, $\lambda = \pm 1$. $\square$

Exemplo 6.10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, 2x)$. Note que

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde c é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ (ver exemplo 2.8). Portanto,

$$p_T(x) = det \begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & x \end{pmatrix} = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Com isso, os autovalores de T são $\pm\sqrt{2}$. Pela Proposição 7.1, T não é ortogonal.

6.2.5 Matrizes de Operadores Ortogonais

Prezado aluno, vejamos como definir operador ortogonal através da matriz deste operador, em relação a uma base ortonormal.

Teorema 6.4. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Então T é ortogonal se, e somente se, $[T]_\beta$ é uma matriz ortogonal, onde β é base ortonormal de V. Lembre que uma matriz A é ortogonal se $AA^t = A^tA = I$.*

Demonstração. Suponha que T é ortogonal. Seja β base ortonormal de V. Vimos no Teorema 4.4 que $[T^*]_\beta = [T]^t_\beta$. Como T é ortogonal, segue que $T^* \circ T = T \circ T^* = I$, (ver Definição 6.2) através do Teorema do Núcleo e Imagem. Logo,

$$[T]_\beta [T]^t_\beta = [T]_\beta [T^*]_\beta = [T \circ T^*]_\beta = [T^* \circ T]_\beta = [T^*]_\beta [T]_\beta = [T]^t_\beta [T]_\beta.$$

Além disso,

$$[T]_\beta [T]^t_\beta = [T]_\beta [T^*]_\beta = [T \circ T^*]_\beta = [I]_\beta = I \text{ e } [T]^t_\beta [T]_\beta = [T^*]_\beta [T]_\beta = [T^* \circ T]_\beta = [I]_\beta = I.$$

Portanto,

$$[T]_\beta [T]^t_\beta = [T]^t_\beta [T]_\beta = [I]_\beta = I.$$

Isto nos diz que $[T]_\beta$ é ortogonal (esta matriz tem entradas reais).

Reciprocamente, suponha que $[T]^t_\beta [T]_\beta = [T]_\beta [T]^t_\beta = I$, onde $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V. Assim sendo, $[T^* \circ T]_\beta = [T \circ T^*]_\beta = [I]_\beta$ (pelo que foi feito acima). Consequentemente,

$$\langle T^* \circ T(v_i), v_j \rangle = \langle T \circ T^*(v_j), v_i \rangle = \langle v_i, v_j \rangle,$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Estas são as entradas das matrizes $[T^* \circ T]_\beta$, $[T \circ T^*]_\beta$ e $[I]_\beta$, respectivamente. Portanto,

$$\langle u, T \circ T^*(v) \rangle = \langle T^* \circ T(u), v \rangle = \langle u, v \rangle,$$

para todo $u, v \in V$, ver demonstração do Teorema 5.1. Assim sendo, $T^* \circ T = T \circ T^* = I$ (ver Proposição 1.1). Pela Definição 6.2, T é ortogonal. □

Exemplo 6.11. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ uma matriz. Note que

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Analogamente,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto, $AA^t = A^tA = I$. Logo, A é uma matriz ortogonal. Com isso, pelo Teorema 6.4, temos que o operador, definido por, $T(x, y) = (y, x)$ é ortogonal, pois $[T]_c = A$ (onde c é a base canônica de $\mathbb{R}^2$).

Exercícios de Fixação

1. Seja $T : U \to V$ linear, onde U, V são espaços vetoriais de dimensão finita, com produto interno e $\dim U = \dim V$. Sejam β e γ bases ortonormais de U e V, respectivamente. Mostre que $[T]_\beta^\gamma$ é ortogonal $\Leftrightarrow T$ é uma isometria.

2. Se uma matriz ortogonal é triangular superior, prove que ela é diagonal se seu quadrado é igual à matriz identidade.

3. Entre as matrizes abaixo, determine quais são ortogonais.

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Considere que a matriz $P = (v_1 v_2 ... v_n)$, cujas colunas são os vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Mostre que P é ortogonal.

5. Seja $V = \mathbb{R}^2$, com produto interno canônico. Se $T : V \to V$ é um operador ortogonal, mostre que a matriz de T em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi]$.

6.3 Conclusão

Concluímos então que operadores lineares que preservam comprimentos são operadores ortogonais.

6.4 Exercícios Propostos

1. Um isomorfismo dos espaços com produto interno U e V é uma bijeção linear $T : U \to V$ que satisfaz $\langle T(u), T(v)\rangle_V = \langle u, v\rangle_U$, para todo $u, v \in U$. Seja $T : U \to V$ linear, onde U, V são espaços vetoriais de dimensão finita, com produto interno e $\dim U = \dim V$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) T preserva produto interno;

ii) T é um isomorfismo de espaços vetoriais com produto interno;

iii) T transforma base ortonormal de U em base ortonormal de V;

iv) T transforma alguma base ortonormal de U em alguma base ortonormal de V.

2. Prove que todo operador linear $T : V \to V$ admite uma decomposição da forma $T = P \circ R$, onde $R : V \to V$ é ortogonal e $P : V \to V$ é não-negativo. Esta decomposição chama-se decomposição polar do operador T.

3. Obtenha a decomposição polar da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Próxima Aula

A seguir estudaremos operadores normais, cujos operadores auto-adjuntos e ortogonais são casos particulares.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.