Capítulo 7

Operadores Normais

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 7: Operadores Normais

Meta

Apresentar ao aluno o conceito e as principais propriedades de operadores normaisl

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capas de identificar operadores normais e conhecer suas principais propriedades.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I.

7.1 Introdução

Operadores normais englobam as categorias de operadores auto-adjuntos e operadores ortogonais. Diferentemente dessas classes, o espectro de um operador normao pode ser vazio. Quando o corpo que age sobre o espaço vetorial é o conjuntos dos números complexos, um operador normal é diagonalizável.

7.2 Operadores Normais

Prezados alunos, nesta seção, veremos quais propriedades operadores que comutam com sua adjunta satisfazem.

7.2.1 Definição e Exemplos

Definição 7.1. Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que T é normal se $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Exemplo 7.1. Os operadores auto-adjuntos e os operadores ortogonais são operadores normais (ver Definições 5.1, **??** e 6.2).

Exemplo 7.2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, -x + y)$. Vamos provar que T

é normal. Primeiramente vamos encontrar T^*.

$$\begin{aligned}
\langle (a,b), T(x,y)\rangle &= \langle (a,b), (x+y, -x+y)\rangle \\
&= a(x+y) + b(-x+y) \\
&= (a-b)x + (a+b)y \\
&= \langle (a-b, a+b), (x,y)\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $T^*(a,b) = (a-b, a+b)$. Assim sendo,

$$T \circ T^*(a,b) = T(a-b, a+b) = (a-b+a+b, -a+b+a+b) = (2a, 2b).$$

Por outro lado,

$$T^* \circ T(x,y) = T^*(x+y, -x+y) = (x+y+x-y, x+y-x+y) = (2x, 2y).$$

Logo, $T \circ T^* = T^* \circ T$. Com isso, pela Definição 7.1, T é normal. Observe que T não é auto-adjunto nem ortogonal (verifique!).

Exemplo 7.3 (Operador Não-normal)**.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (y, 2x)$. Vamos mostrar que T não é normal. De fato, $T^*(x,y) = (2y, x)$ (verifique!). Logo,

$$T \circ T^*(x,y) = T(2y, x) = (x, 4y).$$

Por outro lado,

$$T^* \circ T(x,y) = T^*(y, 2x) = (4x, y).$$

Dessa forma, $T \circ T^*(0,1) = (0,4)$ e $T^* \circ T(0,1) = (0,1)$. Ou seja, $T \circ T^* \neq T^* \circ T$. Pela Definição 7.1, T não é um operador normal.

7.2.2 Resultados Importantes

Caro aluno, vejamos uma outra maneira de definir um operador normal.

Teorema 7.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então T é normal se, e somente se, $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$.*

Demonstração. Suponha que T é um operador normal. Assim sendo, usando as Definições 4.2 e 7.1, obtemos

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^* \circ T(v)\rangle = \langle v, T \circ T^*(v)\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2,$$

para todo $v \in V$. Consequentemente, $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$.

Reciprocamente, considere que $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$. Vamos mostrar que T é normal. Note que, através da Definição 4.2, concluímos que

$$\langle T^* \circ T(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle = \|T(v)\|^2 = \|T^*(v)\|^2 = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \langle T \circ T^*(v), v\rangle,$$

para todo $v \in V$. Portanto, $\langle T^* \circ T(v), v\rangle = \langle T \circ T^*(v), v\rangle$, para todo $v \in V$. Dessa forma,

$$\langle T^* \circ T(u+w), u+w\rangle = \langle T \circ T^*(u+w), u+w\rangle,$$

para todo $u, w \in V$. Pela Definição 1.1 e usando a hipótese da recíproca, obtemos

$$\langle T^* \circ T(u), w\rangle + \langle T^* \circ T(w), u\rangle \;=\; \langle T \circ T^*(u), w\rangle + \langle T \circ T^*(w), u\rangle,$$

para todo $u, w \in V$. Através da Definição 4.2, encontramos

$$\langle T^* \circ T(u), w\rangle \;=\; \langle T \circ T^*(u), w\rangle,$$

para todo $u, w \in V$. Consequentemente,

$$\langle [T^* \circ T - T \circ T^*](u), w\rangle \;=\; 0,$$

para todo $u, w \in V$. Pela Proposição 1.1, $[T^* \circ T - T \circ T^*](u) = 0$, para todo $u \in V$. Isto nos diz que $T^* \circ T = T \circ T^*$. Através da Definição 7.1, temos que T é normal. $\square$

Exemplo 7.4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x, x - y, 0)$. Vamos mostrar que T não é normal. De fato, verifique que $T^*(x, y, z) = (2x + y, -y, 0)$. Logo,

$$\|T(0,1,0)\| = \|(0,-1,0)\| = 1 \text{ e } \|T^*(0,1,0)\| = \|(1,-1,0)\| = \sqrt{2}.$$

Consequentemente, $\|T^*(0,1,0)\| \neq \|T(0,1,0)\|$. Portanto, usando o Teorema 7.1, concluímos que T não é normal.

Proposição 7.1. *Seja $T : V \to V$ um operador normal, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então todo autovalor de T é autovalor de T^*, com o mesmo autovetor associado.*

Demonstração. Seja λ um autovalor de T, então existe $v \in V$, não-nulo, tal que $T(v) = \lambda v$. Assim, $T(v) - \lambda v = 0$, isto é, $(T - \lambda I)(v) = \mathbf{0}$. Portanto, pelo Teorema 7.1 e pela Proposição 4.3, temos que λ é autovalor de T associado a v se, e somente se, $\|(T - \lambda I)(v)\| = 0$ e isto é equivalente a dizer que $\|(T - \lambda I)^*(v)\| = 0$. Assim, pela definição de norma, segue que $(T^* - \lambda I)(v) = 0$. Ou seja, $T^*(v) = \lambda v$. Portanto, λ é autovalor de T^* associado a v. □

Obs 7.1. Note que, na demonstração da Proposição 7.1, não provamos que $T - \lambda I$ é um operador normal (hipótese do Teorema 7.1). Deixamos para o aluno este exercício de fixação.

7.2.3 Matrizes de Operadores Normais

Prezado aluno, vamos mostrar que é possível dar outra definição para um operador normal. Faremos isto estabelecendo a relação de um operador deste tipo com sua matriz, em relação a uma base ortonormal.

Teorema 7.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Então T é normal se, e somente se, $[T]_\beta$ é uma matriz, com coeficientes reais, normal, onde β é base ortonormal de V. Lembre que uma matriz, com coeficientes reais, A é normal se $AA^t = A^tA$.*

Demonstração. Suponha que T é normal. Seja β base ortonormal de V. Vimos no Teorema 4.4 que $[T^*]_\beta = [T]_\beta^t$. Como T é normal, então $T^* \circ T = T \circ T^*$ (ver Definição 7.1). Logo,

$$[T]_\beta [T]_\beta^t = [T]_\beta [T^*]_\beta = [T \circ T^*]_\beta = [T^* \circ T]_\beta = [T^*]_\beta [T]_\beta = [T]_\beta^t [T]_\beta.$$

Isto nos diz que $[T]_\beta$ é normal (esta matriz tem entradas reais).

Reciprocamente, suponha que $[T]_\beta^t [T]_\beta = [T]_\beta [T]_\beta^t$, onde $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V. Assim sendo, $[T^* \circ T]_\beta = [T \circ T^*]_\beta$ (pelo que foi feito acima). Consequentemente, $\langle T^* \circ T(v_i), v_j \rangle = \langle T \circ T^*(v_j), v_i \rangle$, para todo i, j, estas são as entradas das matrizes $[T^* \circ T]_\beta$ e $[T \circ T^*]_\beta$, respectivamente. Logo,

$$\langle u, T \circ T^*(v) \rangle = \langle T^* \circ T(u), v \rangle,$$

para todo $u, v \in V$, ver demonstração do Teorema 5.1. Dessa forma, pela Proposição 1.1, obtemos $T^* \circ T = T \circ T^*$. Pela Definição 7.1, T é normal. $\square$

Exemplo 7.5. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz. Note que

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Isto nos diz que $A^tA = AA^t$. Portanto, A é uma matriz normal (com coeficientes reais). Utilizando o Teorema 7.1, concluímos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (x + y, -x + y)$, é um operador normal, já que $[T]_c = A$ onde c é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Exercícios de Fixação

1. Se T é um operador normal, prove que autovetores de T que estão associados a autovalores distintos são ortogonais.

2. Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita. Prove que S é normal se, e somente se, $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$.

3. Seja $T : V \to V$ um operador normal tal que $\dim V = n$. Se T possui n autovalores distintos, prove que T é auto-adjunto.

4. Entre as matrizes abaixo, determine quais são normais.

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.3 Exercícios Propostos

1. Sejam M e N operadores lineares sobre um espaço vetorial V com N sendo um operador normal. Mostre que se $N \circ M = M \circ N$, então $N^* \circ M = M \circ N^*$.

2. Sejam $M, N : V \to V$ operadores lineares normais. Mostre que se $N \circ M = M \circ N$, então $M^* \circ N = N \circ M^*$ e $M \circ N^* = N^* \circ M$. Conclua que $N \circ M$ é normal.

Próxima Aula

Na próxima aula estudaremos uma generalização do conceito de produto interno na forma de um funcional bilinear.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.