Capítulo 9

Polinômio Mínimo e Operadores Nilpotentes

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 9: Polinômio Mínimo e Operadores Nilpotentes

Meta

Mostrar ao aluno resultados importantes que nos levam à simplificação da representação matricial de um operador linear.

Objetivos

Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de determinar o polinômio mínimo de um operador linear, bem como identificar operadores nilpotentes e conhecer o Teorema de Cayley-Hamilton.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I

9.1 Introdução

Apresentamos aqui resultados importantes em busca de uma representação matricial simplificada para um operador linear. Associamos autovalores deste operador a raízes de polinômios especiais que são anulados por este operador. Por fim, conhecemos um pouco da classe de operadores nilpotentes, úteis ao objetivo de simplificação.

9.2 Polinômio Mínimo

Caros alunos, vimos em Álgebra linear 1 que se V é um espaço vetorial de dimensão finita n, então $\dim L(V) = n^2$, onde $L(V) = \{T : V \to V \text{ é um operador linear}\}$. Considere $T \in L(V)$. Assim sendo, o conjunto $\{I, T, T^2, ..., T^{n^2}\}$ com $n^2 + 1$ elementos é linearmente dependente (l.d.), aqui $T^r = T \circ T \circ ... \circ T$, para todo $r \in \mathbb{N}$ (r fatores), pois este conjunto possui mais elementos que a dimensão do espaço $L(V)$. Seja m o menor natural tal que $\{I, T, T^2, ..., T^m\}$ é l.d.. Por esta minimalidade de m, T^m é combinção linear dos operadores $I, T, T^2, ..., T^{m-1}$, já que $\{I, T, T^2, ..., T^{m-1}\}$ é linearmente independente (l.i.). Logo, existem únicos (verifique) $a_0, a_1, ..., a_{m-1} \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$T^m + a_{m-1}T^{m-1} + a_{m-2}T^{m-2} + ... + a_0 I = \mathbf{0}.$$

9.2.1 Definição e Exemplos

Definição 9.1. Seja V um espaço vetorial com dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador linear. O polinômio

$$m_T(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $T^m + a_{m-1}T^{m-1} + a_{m-2}T^{m-2} + ... + a_0 I = \mathbf{0}$, é chamado polinômio mínimo do operador T.

Obs 9.1. Note que m_T é mônico (coeficiente do termo de maior grau igual a 1).

Exemplo 9.1. Seja V um espaço de dimensão finita. Seja $I : V \to V$ o operador identidade, isto é, $I(v) = v$ para todo $v \in V$). Logo, $m_I(x) = x - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $I^1 - I = I - I = \mathbf{0}$ $(m = 1)$.

Definição 9.2. Sejam V um espaço vetorial com dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear e

$$p(x) = \lambda_m x^m + \lambda_{m-1}x^{m-1} + \lambda_{m-2}x^{m-2} + ... + \lambda_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ um polinômio. Definimos um operador linear $p(T) : V \to V$ pondo

$$p(T)(v) := \lambda_m T^m(v) + \lambda_{m-1}T^{m-1}(v) + \lambda_{m-2}T^{m-2}(v) + ... + \lambda_0 I(v),$$

para todo $v \in V$. Ou seja,

$$p(T) := \lambda_m T^m + \lambda_{m-1}T^{m-1} + \lambda_{m-2}T^{m-2} + ... + \lambda_0 I.$$

Exemplo 9.2 (Minimalidade do Grau do Polinômio Mínimo)**.** O polinômio mínimo de T

$$m_T(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

satisfaz

$$m_T(T) = T^m + a_{m-1}T^{m-1} + a_{m-2}T^{m-2} + ... + a_0 I = \mathbf{0}.$$

Portanto, m_T é o polinômio de menor grau (minimalidade de m) tal que $m_T(T) = \mathbf{0}$.

Caro aluno, existe uma maneira mais simples de encontrar o polinômio mínimo de um operador linear. Para isto precisaremos de alguns resultados preliminares.

Proposição 9.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja p um polinômio sobre $\mathbb{R}$. Então $p(T) = \mathbf{0}$ (ver Definição 9.2) se, e somente se, $m_T \mid p$, isto é, existe polinômio q tal que $p(x) = m_T(x)q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que $p(T) = \mathbf{0}$. Dividindo o polinômio p por m_T, encontramos polinômios q, r tais que

$$p = m_T q + r, \text{ onde } r = 0 \text{ ou } \partial r < \partial m_T,$$

onde ∂r representa o grau do polinômio r. Portanto,

$$\mathbf{0} = p(T) = m_T(T)q(T) + r(T) = r(T)$$

(verifique). Daí, $r(T) = \mathbf{0}$. Com isso, $\partial r \geq \partial m_T$, pela minimalidade do grau de m_T comentada no exemplo 9.2. Assim, $r = 0$. Com isso, $p = m_T q$, ou seja, $m_T|p$.

Reciprocamente, suponha que $m_T|p$. Logo, existe q tal que $p = m_T q$. Assim sendo,

$$p(T) = m_T(T)q(T) = \mathbf{0}q(T) = \mathbf{0},$$

verifique este produto. Por fim, $p(T) = \mathbf{0}$. □

Proposição 9.2 (Raízes do Polinômio Mínimo)**.** *Seja V um espaço vetorial com dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Seja m_T o polinômio mínimo de T. Então $m_T(\lambda) = 0$ se, e somente se, λ é autovalor de T.*

Demonstração. Seja $m_T(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_0$ e suponha que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja raiz de m_T. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe polinômio q tal que $m_T(x) = (x - \lambda)q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\partial q = m - 1 < m$. Consequentemente, pela Definição 9.2, obtemos $m_T(T) = (T - \lambda I)q(T)$. Mas, $m_T(T) = \mathbf{0}$ (ver exemplo 9.2). Assim,

$$\mathbf{0} = m_T(T) = (T - \lambda I)q(T).$$

Como $\partial q < m$, então $q(T) \neq \mathbf{0}$ (ver exemplo 9.2). Logo, existe $u \in V$ tal que $q(T)(u) \neq \mathbf{0}$. Para $w = q(T)(u) \neq \mathbf{0}$, temos que

$$(T - \lambda I)(w) = (T - \lambda I)q(T)(u) = \mathbf{0}.$$

Ou equaivalentemente,

$$T(w) = \lambda w, \text{ com } w \neq \mathbf{0}.$$

Ou seja, λ é autovalor de T associado ao autovetor w.

Reciprocamente, suponha que λ seja autovalor de T. Então existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Indutivamente, é possível verificar que $T^j(v) = \lambda^j v$, para todo $j \in \mathbb{N}$ (verifique). Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= m_T(T)(v) = (T^m + a_{m-1}T^{m-1} + a_{m-2}T^{m-2} + ... + a_0 I)(v) \\
&= T^m(v) + a_{m-1}T^{m-1}(v) + a_{m-2}T^{m-2}(v) + ... + a_0 v \\
&= \lambda^m v + a_{m-1}\lambda^{m-1}v + a_{m-2}\lambda^{m-2}v + ... + a_0 v \\
&= (\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + a_{m-2}\lambda^{m-2} + ... + a_0)v \\
&= m_T(\lambda)v.
\end{aligned}$$

Como $v \neq \mathbf{0}$, então $m_T(\lambda) = 0$. Portanto, λ é raiz de m_T. □

Obs 9.2. Sabemos, através do curso Álgebra Linear 1, que as raízes do polinômio característico são, exatamente, os autovalores. Logo, os polinômios mínimo e característico têm as mesmas raízes (ver Proposição 9.2).

Teorema 9.1 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Seja V um espaço vetorial com dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Seja p_T o polinômio característico de T. Então $p_T(T) = \mathbf{0}$.*

Demonstração. Seja $\dim V = n$. Seja β uma base de V tal que $A = [T]_\beta$. Então,

$$p_T(x) = det(A - xI).$$

Desejamos provar que $p_T(A) = 0$. Se $q_T(x) = |xI - A|$, então basta provar que

$$q_T(A) = 0.$$

Seja $N = xI - A$. Considere $Q =$Adj$(N) = (q_{ij})$, onde q_{ij} são os cofatores de N (relembre Álgebra Linear 1). Portanto,

$$q_{ij} = q_{ij}^0 + q_{ij}^1 x + q_{ij}^2 x^2 + ... + q_{ij}^{n-1}x^{n-1}$$

são polinômios de grau menor ou igual a $n-1$. Para cada $r = 0, 1, ..., n-1$ ponha

$$Q^r = \begin{pmatrix} q_{11}^r & q_{12}^r & \cdots & q_{1n}^r \\ q_{21}^r & q_{22}^r & \cdots & q_{2n}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1}^r & q_{n2}^r & \cdots & q_{nn}^r \end{pmatrix}$$

Verifique que

$$Q = Q^0 + Q^1x + Q^2x^2 + ... + Q^{n-1}x^{n-1}. \tag{9.1}$$

Por outro lado,

$$QN = \mathrm{Adj}(N)N = |N|I, \tag{9.2}$$

onde I é a matriz identidade de ordem n. Usando (9.1) e (9.2), obtemos

$$(Q^0 + Q^1x + Q^2x^2 + ... + Q^{n-1}x^{n-1})(xI - A) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n)I,$$

onde $q_T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ (este é polinômio mônico de grau n). Comparando os coeficientes desta última igualdade, temos que

$$\begin{cases} a_0I & = & -Q^0A; \\ a_1I & = & Q^0 - Q^1A; \\ \cdots & = & \cdots; \\ a_{n-1}I & = & Q^{n-2} - Q^{n-1}A; \\ I & = & Q^{n-1}. \end{cases}$$

Consequentemente, multiplicando estas igualdadedes por $I, A, A^2, ..., A^n$, respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} a_0I & = & -Q^0A; \\ a_1A & = & Q^0M - Q^1A^2; \\ \cdots & = & \cdots; \\ a_{n-1}A^{n-1} & = & Q^{n-2}A^{n-1} - Q^{n-1}A^n; \\ A^n & = & Q^{n-1}A^n. \end{cases}$$

Somando as equações deste sistema, encontranos

$$q_T(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + ... + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = \mathbf{0}.$$

Com isso,

$$q_T(A) = 0.$$

Isto conclui a prova do Teorema. □

Obs 9.3. Através da Proposição 9.1 e do Teorema 9.1, concluímos que o polinômio característico p_T divide o polinômio mínimo m_T. Lembre que a Proposição 9.2 nos diz que os polinômios característico p_T e mínimo m_T têm as mesmas raízes. Pelo Teorema 9.1, temos que $p_T(T) = \mathbf{0}$, consequentemente, $\partial m_T \leq \partial p_T$ (ver exemplo 9.2). Portanto, na decomposição dos polinômios m_T e p_T encontramos os mesmos fatores. Estes tendo um grau inferior ou igual em m_T. Além disso, $m_T(T) = \mathbf{0}$.

Obs 9.4. É fato que, $m_T(T) = \mathbf{0} \Leftrightarrow m_T([T]_\beta) = \mathbf{0}$, onde β é uma base de V.

Vejamos uma aplicação do Teorema de Cayley-Hamilton.

Exemplo 9.3. Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos mostrar, através do Teorema 9.1, que $A^2 = 2A + 8I$. Com efeito,

$$p_A(x) = x^2 - 2x - 8$$

é o polinônmio característico de A (verifique). Usando o Teorema 9.1, concluímos que $p_A(A) = 0$. Consequentemente,

$$A^2 - 2A - 8I = \mathbf{0} \Rightarrow A^2 = 2A + 8I.$$

Caros alunos, vejamos por que podemos calcular o polinômio mínimo de um operador linear através da matriz deste em relação a uma base qualquer.

Teorema 9.2. *Sejam A e B matrizes semelhantes, isto é, existe matriz P invertível tal que $B = PAP^{-1}$. Então A e B têm o mesmo polinômio mínimo.*

Demonstração. Seja $B = PAP^{-1}$, então $B^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA^2P^{-1}$. Indutivamente, temos que $B^n = PA^nP^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (verifique). Seja

$$m_A(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0$$

o polinômio mínimo de A. Logo,

$$\begin{aligned} m_A(B) &= B^m + a_{m-1}B^{m-1} + ... + a_0 I \\ &= PA^mP^{-1} + a_{m-1}PA^{m-1}P^{-1} + ... + a_0 PIP^{-1} \\ &= P(A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_0 I)P^{-1} = Pm_A(A)P^{-1} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ver Exemplo 9.2. Através do Lema 9.1, concluímos que $m_B | m_A$. Observe que

$$B^n = PA^nP^{-1} \Rightarrow P^{-1}B^nP = P^{-1}PA^nP^{-1}P = A^n \Rightarrow A^n = P^{-1}B^nP,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Realizando um processo análogo ao que foi feito acima, concluímos que $m_A | m_B$. Como m_A e m_B são mônicos (ver Definição 9.1), então $m_A = m_B$. $\square$

Prezados alunos, as duas observações acima descrevem como encontrar o polinômio mínimo de um operador T, ou de uma matriz, qualquer.

Exemplo 9.4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + y - 2z, -x - 2z)$. Então

$$A = [T]_c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

onde c é a base canônica de $\mathbb{R}^3$ (ver exemplo 2.9). Vamos encontrar o polinômio mínimo desta matriz (ver Teorema 9.2). Note que o polinômio característico de A é dado por

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -2 & x-1 & 2 \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix} = (x+1)^2(x-3),$$

(verifique). Com isso, através das observações acima, os possíveis polinômios mínimos são

$$(x+1)(x-3) \text{ ou } (x+1)^2(x-3).$$

Mas $m_A(A) = \mathbf{0}$. Verifiquemos se $(x+1)(x-3)$ é o polinômio mínimo. Olhe que

$$(A+I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Não importa os valores das outras entradas, essa matriz não é nula. Logo, $(x+1)(x-3)$ não é o polinômio mínimo. Portanto, o polinômio mínimo de A é

$$m_A(x) = (x+1)^2(x-3) = p_A(x).$$

Exemplo 9.5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Desejamos revelar o polinômio mínimo desta matriz. Veja que o polinômio característico de A é dado por

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ 2 & x+1 & 2 \\ -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)^3,$$

verifique. Com isso, os possíveis polinômios mínimos são

$$(x-1), (x-1)^2 \text{ ou } (x-1)^3.$$

Lembre que $m_A(A) = \mathbf{0}$ (ver exemplo 9.2). Verifiquemos se $(x-1)$ é o polinômio mínimo. Observe que

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz não é nula. Logo, $(x-1)$ não é o polinômio mínimo. Agora, vejamos se $(x-1)^2$ é o polinômio minimo.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o polinômio mínimo de A é

$$m_A(x) = (x-1)^2.$$

Exemplo 9.6. Seja

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar o polinômio mínimo desta matriz. Note que o polinômio característico de A é dado por

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & x+1 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix} = (x+1)^5(x+4),$$

verifique. Com isso, os possíveis polinômios mínimos são

$$(x+1)(x+4),\ (x+1)^2(x+4),\ (x+1)^3(x+4),\ (x+1)^4(x+4) \text{ ou } (x+1)^5(x+4).$$

Verifique que

$$m_A(x) = (x+1)^3(x+4)$$

é o polinômio mínimo de A.

Exercícios de Fixação

1. Prove ou dê um contra exemplo para a seguinte afirmação: se A e B têm o mesmo polinômio mínimo então A e B são semelhantes.

2. Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre o polinômio característico de M. Use o Teorema de

Cayley-Hamilton para mostrar que $M^2 = 2M + 8I$. Encontre M^3 e M^4 em função de M.

3. Seja $T : V \to V$ linear, onde V é um espaço vetorial com dimensão finita. Suponha que o polinômio característico de T é dado por $p_T(x) = (x-1)^2(x-4)^3(x+2)$. Então, qual a dimensão de V, quais os autovalores de T e quais as possibilidades para o polinômio mínimo de T?

4. Seja $T : V \to V$ linear, onde V é um espaço vetorial com dimensão finita 5. Seja $m_T(x) = (x-1)^2(x-2)$ o polinômio mínimo de T. Quais as possibilidades para o polinômio característico de T?

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que a matriz de T em relação à base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Determine o polinômio mínimo de T quando $a = 0$ e $a \neq 0$.

6. Para as transformações lineares definidas pelas matrizes abaixo encontre o polinômio característico e o polinômio mínimo.

i) $\begin{pmatrix} 14 & 8 & -1 & -6 & 2 \\ -12 & -4 & 2 & 8 & -1 \\ 8 & -2 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

ii) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

iv) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

vi) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.3 Operadores Nilpotentes

Caros alunos, nesta seção, estudaremos operadores que possuem alguma potência nula.

9.3.1 Definição e Exemplos

Definição 9.3. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Dizemos que um operador linear $T : V \to V$ é nilpotente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^k = \mathbf{0}, \text{ onde } T^k = T \circ T \circ ... \circ T, \text{ com } k \text{ fatores.}$$

O menor natural m tal que $T^m = \mathbf{0}$ é chamado índice de nilpotência de T.

Obs 9.5. Seja $T : V \to V$ um operador nilpotente com índice de nilpotência m, então, pela minimalidade de m, $T^{m-1} \neq \mathbf{0}$, isto é, existe $v \in V$ tal que $T^{m-1}(v) \neq \mathbf{0}$.

Exemplo 9.7. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear definido por $T(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$.

Observe que

$$T^2(x,y,z,t) = T \circ T(x,y,z,t) = T(T(x,y,z,t)) = T(z,t,0,0) = (0,0,0,0).$$

Daí, pela Definição 9.3, T é um operador nilpotente com índice de nilpotência 2.

Exemplo 9.8. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (y,0,z)$. Veja que

$$T^2(x,y,z) = T \circ T(x,y,z) = T(T(x,y,z)) = T(y,0,z) = (0,0,z).$$

Com isso,

$$T^3(x,y,z) = T \circ T^2(x,y,z) = T(T^2(x,y,z)) = T(0,0,z) = (0,0,z).$$

Indutivamente, é possível verificar que $T^k(x,y,z) = (0,0,z), \forall\ k \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Definição 9.3, T não é um operador nilpotente, pois

$$T^k(0,0,1) = (0,0,1) \neq (0,0,0), \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 9.9. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear definido por $T(x,y,z,t,s) = (0,x,y,0,t)$. Note que

$$T^2(x,y,z,t,s) = T(T(x,y,z,t,s)) = T(0,x,y,0,t) = (0,0,x,0,0).$$

Consequentemente,

$$T^3(x,y,z,t,s) = T(T^2(x,y,z,t,s)) = T(0,0,x,0,0) = (0,0,0,0,0).$$

Logo, através da Definição 9.3, concluímos que T é um operador nilpotente com índice de nilpotência 3.

Exemplo 9.10. Seja $P_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial constituído dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2. Sabemos que $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador derivada. Este é definido por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x.$$

Com isso,

$$T^2(a_0 + a_1x + a_2x^2) = T(a_1 + 2a_2x) = 2a_2.$$

Por conseguinte,

$$T^3(a_0 + a_1x + a_2x^2) = T(T^2(a_0 + a_1x + a_2x^2)) = T(2a_2) = 0.$$

Portanto, pela Definição 9.3, T é um operador nilpotente com índice de nilpotência 3.

Definição 9.4 (Matriz Nilpotente)**.** Seja A uma matriz quadrada, com coeficientes reais, de ordem n. Dizemos que A é nilpotente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A^k = \mathbf{0}, \text{ onde } A^k = A \cdot A \cdot ... \cdot A, \text{ com } k \text{ fatores.}$$

O menor natural m tal que $A^m = \mathbf{0}$ é chamado índice de nilpotência de A.

Obs 9.6. Seja A uma matriz nilpotente com índice de nilpotência m, então, pela minimalidade de m, $A^{m-1} \neq \mathbf{0}$.

Exemplo 9.11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, pela Definição 9.4, A é nilpotente com índice de nilpotência 2.

Exemplo 9.12. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos, indutivamente, verificar que

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Definição 9.4, A não é nilpotente.

9.3.2 Resultados Importantes

Caros alunos, vocês devem estar se perguntando: até quando devemos calcular potências de um operador para sabermos se este é nilpotente? A resposta está no seguinte Teorema:

Teorema 9.3. *Seja V um espaço vetorial com dimensão finita n. Seja $T : V \to V$ nilpotente. Então $T^n = \mathbf{0}$.*

Obs 9.7. Note que o Teorema 9.3 nos diz que não é necessário calcular potências de expoente maior que a dimensão do espaço V. Se o operador não zerar até a potência de expoente $\dim V$, então este não é nilpotente.

Para provar o Teorema 9.3 precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 9.1. *Seja V um espaço vetorial com dimensão n. Seja $T : V \to V$ linear. Se $\ker T^m = \ker T^{m+1}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então*

$$\{\mathbf{0}\} = \ker T^0 \subseteq \ker T^1 \subseteq \ker T^2 \subseteq ... \subseteq \ker T^m = \ker T^{m+1} = ...,$$

onde $T^0 = I$ identidade sobre V e $\ker T = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}\}$ é o núcleo do operador T.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que $\ker T^j \subseteq \ker T^{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $v \in \ker T^j$, então $T^j(v) = \mathbf{0}$. Logo,

$$T^{j+1}(v) = T(T^j(v)) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

pois T é linear. Daí,

$$\ker T^j \subseteq \ker T^{j+1},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Agora, vamos mostrar que $\ker T^{m+k} = \ker T^{m+k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Já provamos que

$$\ker T^{m+k} \subseteq \ker T^{m+k+1}$$

(faça $j = m + k$).

Reciprocamente, considere que $v \in \ker T^{m+k+1}$. Logo, $T^{m+k+1}(v) = \mathbf{0}$. Portanto,

$$\mathbf{0} = T^{m+k+1}(v) = T^{m+1}(T^k(v)).$$

Isto nos diz que $T^k(v) \in \ker T^{m+1}$. Por hipótese, $\ker T^{m+1} = \ker T^m$. Assim, segue que $T^k(v) \in \ker T^m$. Logo,

$$\mathbf{0} = T^m(T^k(v)) = T^{m+k}(v).$$

Por fim, $v \in \ker T^{m+k}$. Com isso, $\ker T^{m+k+1} \subseteq \ker T^{m+k}$. Deste modo,

$$\ker T^{m+k+1} \subseteq \ker T^{m+k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 9.2. *Seja V um espaço vetorial com dimensão n. Seja $T : V \to V$ linear. Então*

$$\ker T^n = \ker T^{n+1} = \ker T^{n+2} = ...,$$

$\ker T$ é o núcleo do operador T.

Demonstração. Pelo Lema 9.1, sabemos que $\ker T^n \subseteq \ker T^{n+1}$. Suponha, por absurdo, que $\ker T^n \subsetneq \ker T^{n+1}$. Novamente, pelo Lema 9.1, obtemos

$$\{\mathbf{0}\} = \ker T^0 \subsetneq \ker T \subsetneq ... \subsetneq \ker T^{n-1} \subsetneq \ker T^n \subsetneq \ker T^{n+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n &= \dim V \geq \dim\ker T^{n+1} \geq \dim\ker T^n + 1 \geq \dim\ker T^{n-1} + 2 \geq ... \geq \dim\ker T + n \\ &\geq \dim\ker T^0 + n + 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Logo, $n \geq n+1$, consequentemente, $0 \geq 1$. Isto é um absurdo. Por fim, $\ker T^n = \ker T^{n+1}$. Pelo Lema 9.1, obtemos

$$\ker T^n = \ker T^{n+1} = \ker T^{n+2} = ...$$

□

Caros alunos, agora, faremos a prova do Teorema 9.3.

Demonstração. Como T é nilpotente, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = \mathbf{0}$. Logo, $T^k(v) = \mathbf{0}$, para todo $v \in V$. Ou seja, $V = \ker T^k$. Pelos Lemas 9.1 e 9.2, temos que

$$\ker T^1 \subseteq \ker T^2 \subseteq ... \subseteq \ker T^n = \ker T^{n+1} = ...$$

Logo, se $k \geq n$, então $V = \ker T^k = \ker T^n$. Se $k < n$, então $V = \ker T^k \subseteq \ker T^n \subseteq V$. De qualquer forma, $V = \ker T^n$. Ou equivalentemente, $T^n(v) = \mathbf{0}$, para todo $v \in V$. Isto nos diz que $T^n = \mathbf{0}$. □

Exemplo 9.13. Vimos no exemplo 9.8, que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por $T(x, y, z) = (y, 0, z)$, satisfaz $T^3(x, y, z) = (0, 0, z)$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então T não é nilpotente, pois $T^3 \neq \mathbf{0}$ (ver Terema 9.3). Não precisamos usar indução para chegarmos a esta conclusão.

Teorema 9.4 (Autovalor de um Operador Nilpotente)**.** *Seja V um espaço vetorial com dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador nilpotente. Então o único autovalor de T é* 0.

Demonstração. Considere que T é nilpotente com índice de nilpotência m. Então $T^m = \mathbf{0}$ e $T^{m-1} \neq \mathbf{0}$. Daí, existe $w \neq \mathbf{0}$ tal que $T^{m-1}(w) \neq \mathbf{0}$. Por outro lado,

$$T(T^{m-1}(w)) = T^m(w) = \mathbf{0},$$

isto implica que, $T^{m-1}(w) \in \ker T$ e $T^{m-1}(w) \neq \mathbf{0}$. Isto nos diz que $\ker T \neq \{\mathbf{0}\}$. Dessa forma, existe $v \neq \mathbf{0}$ em V tal que $T(v) = \mathbf{0} = 0v$. Consequentemente, 0 é autovalor de T. Suponha que λ seja autovalor de T, ou seja, $T(u) = \lambda u$ ($u \neq \mathbf{0}$). Indutivamente, temos que $T^m(u) = \lambda^m u$. Mas, $T^m(u) = \mathbf{0}$, logo, $\lambda^m u = \mathbf{0}$. Como $u \neq \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$. Ou seja, 0 é o único autovalor de T. □

Obs 9.8. Vimos, na demonstração do Teorema 9.4, que $\ker T \neq \{\mathbf{0}\}$, para todo operador nilpotente T. Dessa forma, todo operador nilpotente é não-injetivo.

9.3.3 Matrizes de Operadores Nilpotentes

Caros alunos, vejamos como representar um operador nilpotente em forma de matriz.

Teorema 9.5. *Seja V um espaço vetorial com dimensão finita n. Seja $T : V \to V$ um operador nilpotente. Então existe uma base β de V tal que*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Como T é nilpotente, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = \mathbf{0}$. Isto nos diz que $V = \ker T^k$ (verifique). Sabemos, através do Lema 9.1, que

$$\{\mathbf{0}\} = \ker T^0 \subseteq \ker T^1 \subseteq \ker T^2 \subseteq ... \subseteq \ker T^k = V.$$

Escolha uma base $\beta_1 = \{v_1^1, v_2^1, ..., v_{r_1}^1\}$ de $\ker T$. Complete esta base a uma base $\beta_2 = \{v_1^1, v_2^1, ..., v_{r_1}^1, v_1^2, v_2^2, ..., v_{r_2}^2\}$ de $\ker T^2$. Siga este processo até encontrar uma base

$$\beta = \{v_1^1, v_2^1, ..., v_{r_1}^1, v_1^2, v_2^2, ..., v_{r_2}^2, ..., v_1^k, v_2^k, ..., v_{r_k}^k\}$$

de $\ker T^k = V$, onde

$$\beta_i = \{v_1^1, v_2^1, ..., v_{r_1}^1, v_1^2, v_2^2, ..., v_{r_2}^2, ..., v_1^i, v_2^i, ..., v_{r_i}^i\}$$

é base de $\ker T^i, \forall\ i = 1, 2, ..., k$. Verifique que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exercícios de Fixação

1. Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente, com $\dim V = n$. Mostre que o polinômio característico de T é $p_T(x) = x^n$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que a matriz de T em relação à base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. T é nilpotente? No caso afirmativo, determine seu índice de nilpotência.

3. Prove que toda matriz diagonal A é nilpotente se, e somente se, $A = \mathbf{0}$.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A é nilpotente? No caso afirmativo, determine seu índice de nilpotência.

5. Quais das seguintes matrizes é nilpotente?

i) $\begin{pmatrix} 14 & 8 & -1 & -6 & 2 \\ -12 & -4 & 2 & 8 & -1 \\ 8 & -2 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

ii) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

iv) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

9.4 Conclusão

Vimos nesta seção que os polinômios mínimo e característico de um operador linear são anulados por este e que autovalores deste operador são raízes destes polinômios. Por fim, conhecemos algumas propriedades de operadores nilpotentes.

9.5 Exercícios Propostos

1. Seja A uma matriz de ordem n com entradas reais. Mostre que A e A^t têm o mesmo polinômio mínimo.

2. Sejam A e B matrizes de ordem n com entradas reais. Mostre que o polinômio mínimo da matriz de ordem $2n$, em forma de blocos,

$$C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

é o mmc dos polinômios mínimos de A e B.

3. Seja A uma matriz de ordem 4 com entradas reais e autovalores 1 e -1. Escreva todas as possibilidades para o polinômio característico de A. Para cada possibilidade do polinômio característico de A, escreva os possíveis polinômios minimais de A.

4. Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência m, onde $\dim V = n$. Mostre que o polinômio mínimo de T é $p_T(x) = x^m$. Conclua que o único autovalor de T é 0.

Próxima Aula

Em nossa próxima e última aula estudaremos a forma canônica de Jordan, que é o modo mais simples de representação matricial para um operador linear não diagonalizável.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.