Capítulo 10

Teorema da Decomposição Primária e Forma Canônica de Jordan

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 10: Teorema da Decomposição Primária e Forma Canônica de Jordan

Meta

Mostrar ao aluno como representar matricialmente um operador linear não necessariamente diagonalizável, numa forma o mais simplificada possível.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de exibir a forma canônica de Jordam de um operador linear.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I.

10.1 Introdução

A forma canônica de Jordan é uma representação matricial simples de um operador linear. Construiremos tal representação através do conhecimento dos polinômios mínimo e característico do operador linear. O pano de fundo baseia-se no Teorema da Decomposição Primária.

10.2 Teorema da Decomposição Primária

Caros alunos, nesta seção, enunciaremos o Teorema da Decomposição Primária. A demonstração deste Teorema requer um conhecimento que não é pré-requisito para esta disciplina. Portanto, entendemos que não é o momento de expor tal trabalho. Para os alunos mais interessados, ver, por exemplo, [1].

Definição 10.1 (Polinômios Irredutíveis)**.** Dizemos que um polinômio não-constante p, com coeficientes reais, é irredutível sobre $\mathbb{R}$ se é impossível encontrar dois polinômios, com coeficientes reais, não-constantes q, r tais que $p(x) = q(x)r(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Caso contrário dizemos que p é redutível sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 10.1. O polinômio $x^2 + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{R}$, pois a equação $x^2 + 1 = 0$ tem discriminante negativo.

Exemplo 10.2. O polinômio $x^2 - 1$ é redutível sobre $\mathbb{R}$, pois

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Teorema 10.1 (Teorema da Decomposição Primária)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Seja p_T o polinômio característico de T tal que*

$$p_T(x) = [p_1(x)]^{s_1}[p_2(x)]^{s_2} \cdot \ldots \cdot [p_k(x)]^{s_k},$$

onde $p_i(x)$ são fatores irredutíveis, para tdo $i = 1, 2, ..., k$, com $p_i \neq p_k$, para $i \neq k$. Então seu polinômio mínimo é

$$m_T(x) = [p_1(x)]^{d_1}[p_2(x)]^{d_2} \cdot \ldots \cdot [p_k(x)]^{d_k},$$

onde $0 < d_i \leq s_i$, para todo $i = 1, 2, ..., k$, e se $W_i = \ker[p_i(T)]^{d_i} = \ker[p_i(T)]^{s_i}$, para todo $i = 1, 2, ..., k$, temos também que

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k,$$

onde W_i é subespaço invariante por T, para todo $i = 1, 2, ..., k$.

10.2.1 Aplicação do Teorema da Decomposição Primária

Prezados alunos, vejamos um exemplo onde podemos aplicar o Teorema da Decomposição Primária.

Exemplo 10.3 (Aplicação do Teorema da Decomposição Primária)**.** Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (10x_1 - 7x_4 + x_5, -x_3, x_2, 13x_1 - 9x_4 + x_5, 4x_1 - 3x_4 + x_5).$$

Escrevendo a matriz de T em relação à base canônica c de $\mathbb{R}^5$ (ver exemplo 2.9), encontramos

$$A = [T]_c = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

verifique. Mostre que o polinômio característico de A é

$$p_A(x) = x(x^2+1)(x-1)^2.$$

Na linguagem do Teorema da Decomposição Primária 10.1, temos que

$$p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2+1,\ p_3(x) = x-1,\ s_1 = s_2 = 1 \text{ e } s_3 = 2.$$

O Teorema 10.1, nos garante que

$$\mathbb{R}^5 = \ker p_1(A) \oplus \ker p_2(A) \oplus \ker p_3(A)^2 = \ker A \oplus \ker(A^2+1) \oplus \ker(A-I)^2,$$

onde $\ker A$, $\ker(A^2+1)$ e $\ker(A-I)^2$ são subespaços invariantes por A. Vamos encontrar tais espaços. Seja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \ker A$, então

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_1 - 7x_4 + x_5 \\ -x_3 \\ x_2 \\ 13x_1 - 9x_4 + x_5 \\ 4x_1 - 3x_4 + x_5 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = \frac{3}{2}x_1,\ x_5 = \frac{1}{2}x_1 \text{ e } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \ker A &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\} = \left\{\left(x_1, 0, 0, \frac{3}{2}x_1, \frac{1}{2}x_1\right)\right\} = \left\{x_1\left(1, 0, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= [(2, 0, 0, 3, 1)]. \end{aligned}$$

Agora, procuremos o espaço $\ker(A^2+I)$. Assim sendo, seja $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \ker(A^2+I)$. Daí,

$$(A^2+I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} A^2+I &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & -17 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 & -45 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 & -44 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A^2+I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 & -44 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14x_1 - 17x_4 + 4x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 17x_1 - 44x_4 + 5x_5 \\ 5x_1 - 4x_4 + 3x_5 \end{pmatrix}.$$

Esta equação tem solução $x_1 = x_4 = x_5 = 0$. Logo,

$$\ker(A^2+I) = \{(0,x_2,x_3,0,0)\} = \{x_2(0,1,0,0,0)+x_3(0,0,1,0,0)\} = [(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)].$$

Analogamente, verificamos que

$$\ker(A-I)^2 = [(1,0,0,0,3),(0,0,0,1,-2)].$$

Dessa forma, pelo Teorema 10.1 (ver soma direta), temos que

$$\beta = \{(2,0,0,3,1),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,0,0,0,3),(0,0,0,1,-2)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^5$. Mostre que,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -11 \end{pmatrix},$$

onde

$$(0), \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$$

são as matrizes de T restrito a $\ker A$, $\ker(A^2+I)$ e $\ker(A-I)^2$, respectivamente.

Exercícios de Fixação

1. Para as transformações lineares definidas pelas matrizes abaixo encontre bases para W_i (ver Teorema 10.1) e a decomposição da matriz que representa T na base associada aos $W_i's$.

i) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.3 Forma Canônica de Jordan

Caro aluno, nesta seção, mostraremos como encontrar a Forma Canônica de Jordan de uma matriz utilizando os polinômios característico e mínimo desta.

10.3.1 Definição de Forma Canônica de Jordan e Exemplos

Definição 10.2 (Bloco de Jordan)**.** Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Seja λ um autovalor de A. A matriz quadrada de ordem r, onde $r \leq n$,

$$J_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

é chamada bloco de Jordan de A associado ao autovalor λ.

Teorema 10.2 (Forma Canônica de Jordan)**.** *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ autovalores distintos de A. Sejam*

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot (x-\lambda_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (x-\lambda_r)^{m_r} \text{ e } m_A(x) = (x-\lambda_1)^{l_1} \cdot (x-\lambda_2)^{l_2} \cdot ... \cdot (x-\lambda_r)^{l_r}$$

os polinômios característico e mínimo de A, respectivamente. Então existe uma matriz diagonal por blocos J, semelhante a A, chamada Forma Canônica de Jordan de A, onde na diagonal estão os blocos de Jordan de A, tal que

i) *existe pelo menos um bloco de Jordan $J_A(\lambda_i)$ de ordem l_i, todos os outros têm ordem* *menor ou igual a l_i;*

ii) *A soma das ordens dos blocos de Jordan $J_A(\lambda_i)$ é m_i;*

iii) *A quantidade dos blocos de Jordan $J_A(\lambda_i)$ é a multiplicidade geométrica de λ_i, isto é, $\dim\ker(A - \lambda_i I)$;*

iv) *A quantidade dos blocos de Jordan $J(\lambda_i)$ de uma ordem qualquer é unicamente determinda por A.*

Exemplo 10.4. Seja

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vimos no exemplo 9.4, que os polinômios característico e mínimo de A são dados por

$$p_A(x) = (x+1)^2(x-3) \text{ e } m_A(x) = (x+1)^2(x-3).$$

Asim, a diagonal da forma de Jordan é constituída dos números -1, -1 e 3. Como o expoente do termo $(x+1)^2$ no polinômio mínimo é 2, então o primeiro (e único) bloco de Jordan associado ao autovalor -1 de A é de ordem 2 (ver Teorema 10.2) e é dado por

$$J_A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, como o expoente do termo $(x-3)$ é 1 então o primeiro (e único) bloco de Jordan associado ao autovalotr 3 é de ordem 1 (ver Teorema 10.2) e é dado por

$$J_A(3) = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a Forma canônica de Jordan para A é

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 10.5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

No exemplo 9.5, vimos que os polinômios característico e mínimo de A são dados por

$$p_A(x) = (x-1)^3 \text{ e } m_A(x) = (x-1)^2.$$

Portanto, 1 é autovalor de A com multipliciade algébrica 3. Portanto a diagonal da Forma canônica de Jordan é constituída de três elementos iguais a 1. Note que o expoente do termo $(x-1)^2$ no polinômio mínimo é 2, então o primeiro bloco de Jordan associado ao autovalor 1 de A é de ordem 2 (ver Teorema 10.2) e tem a seguinte representação

$$J_A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O outro bloco de Jordan de A associado ao autovalor 1 deve ter ordem menor ou igual a 2 (ver Teorema 10.2). Mas, não pode acontecer de ser 2, caso contrário, a ordem da matriz Forma Canônica de Jordan de A, J, seria 4. Isto é um absurdo (a matriz J tem ordem 3). Portanto, este último bloco tem ordem 1. Por fim, a Forma canônica de Jordan para A é

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 10.6. Seja

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifique que os polinômios característico e mínimo de A são dados por

$$p_A(x) = (x+1)^5(x+4) \text{ e } m_A(x) = (x+1)^3(x+4).$$

Portanto, -4 e -1 são autovalores de A, este último com multipliciade algébrica 5. Portanto a diagonal da Forma canônica de Jordan J de A é constituída de cinco elementos iguais a -1 e um igual a -4. Olhe que o termo do polinômio mínimo $(x+4)$ tem expoente 1. Daí, só existe um (por que?) bloco de Jordan associado ao autovalor -4 de ordem 1. Por outro lado, veja que o expoente do termo $(x+1)^3$ no polinômio mínimo é 3, então o primeiro bloco de Jordan associado ao autovalor -1 de A é de ordem 3 (ver Teorema 10.2) e tem a seguinte representação

$$J_A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Existem duas possibilidades para os outros blocos associados ao autovalor -1, já que estes devem ter ordem menor ou igual a 3 (ver Teorema 10.2). Logo, podemos encontrar mais dois blocos de ordem 1, ou seja,

$$J_A(-1) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \text{ e } J_A(-1) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

ou podemos encontrar mais um bloco de dimensão dois, isto é,

$$J_A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, as possíveis Formas Canônicas de Jordan para A são

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Mas,

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como existem duas linhas nulas no final destas congruências, então

$$\dim \ker(A + I) = 2.$$

Logo, só existem dois blocos de Jordan associados ao autovalor -1 (ver Teorema 10.2). Com isso, a Forma Canônica de Jordan é dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

pois a outra Forma possível tem três blocos de Jordan para o autovalor -1.

Exemplo 10.7. Seja A uma matriz tal que os polinômios característico e mínimo são

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-5)^2 \text{ e } m_A(x) = (x-2)(x-5).$$

Assim sendo, o termo $(x-2)$ tem expoente 1 no polinômio mínimo, então o primeiro bloco de Jordan associado ao autovalor 2 tem ordem 1 (ver Teorema 10.2). Como os outros blocos de Jordan associados a este mesmo autovalor tem ordem menor ou igual a 1 (ver Teorema 10.2), logo, temos três (ver Teorema 10.2) blocos associados ao autovalor 2 de ordem 1, ou seja, três blocos da forma

$$J_A(2) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, obtemos três blocos de Jordam idênticos associados ao autovalor 5, isto é,

$$J_A(5) = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

Com isso, a única Forma de Jordan possível para A é

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obs 10.1. Note que a ordem de uma matriz é o grau do seu polinôimo característico e não o grau do polinômio mínimo.

Exercícios de Fixação

1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine a forma canônica de A.

2. Seja A uma matriz de ordem 5 com entradas reais, polinômios característico e mínimo $p_A(x) = (x-2)^3(x+7)^2$ e $m_A(x) = (x-2)^3(x+7)$, respectivamente. Determine a Forma Canônica de Jordan de A.

3. Seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômios característico $p_T(x) = (x-2)^5$ e mínimo $m_T(x) = (x-2)^2$ Determine as possíveis Formas Canônicas de Jordan para T e a $\dim V$.

4. Seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico $p_T(x) = (x-2)^5$. Determine as possíveis Formas Canônicas de Jordan para T e a $\dim V$. Em cada caso, determine o polinômio mínimo de T.

5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontre A^{10} usando a Forma Canônica de Jordan.

10.4 Conclusão

Concluímos nosso curso aprendendo como encontrar a forma canônica de Jordan de um operador linear através do conhecimento de seus polinômios mínimo e característico.

10.5 Exercícios Propostos

1. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Se o polinômio característico de T é dado por $p_T(x) = (x-4)^2(x+2)^4$, então quais as possibilidades para $\dim\ker(T-4I)$ e $\dim\ker(T+2I)$?

2. Seja $T : V \to V$ linear com autovalores distintos λ_1 e λ_2, onde V é um espaço vetorial com dimensão finita 6. Se $\dim\ker(T-\lambda_1 I) = 3$ e $\dim\ker(T-\lambda_2 I) = 1$, quais as possibilidades para os polinômios característico e mínimo de T?

3. Seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico $p_T(x) = (x+2)^4(x-1)^2$. Determine as possíveis Formas Canônicas de Jordan para T e encontre a $\dim V$.

4. Para as transformações lineares definidas pelas matrizes abaixo encontre o polinômio característico, o polinômio mínimo bases para W_i (ver Teorema 10.1) e a decomposição da matriz que representa T na base associada aos $W_i's$.

i) $$\begin{pmatrix} 14 & 8 & -1 & -6 & 2 \\ -12 & -4 & 2 & 8 & -1 \\ 8 & -2 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

ii) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

iii) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.