AULA 4

Equações de primeira ordem: Equações lineares Equações homogêneas, Equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut

META:

Descrever alguns métodos de resolução de Equações Diferenciais de primeira ordem.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar E.D.O. lineares, homogêneas, de Bernoulli, de Ricatti e de Clairaut.

Resolver EDO's de primeira ordem que sejam dos tipos acima descritos.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, diferenciais e diferenciação de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}^2$. Além dos conhecimentos da aula anterior, aulas 1 e 2.

4.1 Introdução

Caros alunos nessa quarta aula continuaremos expondo alguns métodos de resolução para E.D.O. de primeira ordem.

4.2 Equações lineares

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{4.20}$$

onde $a_1(x) \neq 0$ para todo ponto do seu domínio é dita **equação linear de primeira ordem**. Quando $g(x) \equiv 0$ dizemos que a equação (4.20) é linear homogênea. Podemos escrever (4.20) da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \tag{4.21}$$

onde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}, f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$.

Sejam $P(x), f(x)$ funções contínuas. A seguir descrevemos um método de resolução para esse tipo de E.D.O.. Este método se baseará no que aprendemos na seção 3.4. Escrevamos a E.D.O. (4.21) da seguinte forma

$$dy + (P(x)y - f(x))dx = 0. \tag{4.22}$$

Observe que (4.22) não é uma equação exata, pois $\frac{\partial M}{\partial y} = P(x)$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$. No entanto, $((\partial M/\partial y) - (\partial N/\partial x))/N = P(x)$. Portanto, pelo que expomos na seção 3.4, segue que o fator integrante para a E.D.O. linear (4.22) é $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e, consequentemente, ela será equivalente a E.D.O. exata

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}(P(x)y - f(x))dx = 0.$$

Assim, resolvendo esta última E.D.O. chegamos a solução de (4.22) ou de (4.21).

Não precisamos memorizar fórmulas para resolvermos a E.D.O. linear (4.22). Abaixo descrevemos passo a passo o método de resolução para esta E.D.O..

Método de resolução

1)Coloque a E.D.O. linear no formato de (4.21).

2)Calcule o fator integrante $\mu(x)$, o qual é dado por $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

3)Multiplique (4.21) pela função $\mu(x)$. Assim obtemos

$$e^{\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = e^{\int P(x)dx} f(x) \tag{4.23}$$

ou equivalentemente

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}(P(x)y - f(x))dx = 0.$$

Observe que no caso das E.D.O.'s lineares sempre existirá um fator integrante μ, veja Observação 7.1.

4)Considere a equação (4.23), onde $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = e^{\int P(x)dx} f(x).$$

Observe que essa equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx}) = e^{\int P(x)dx} f(x). \tag{4.24}$$

5)Integre ambos os lados da equação (4.24) com respeito à x. Integrando, obtemos $ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + c, c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + c\right].$$

Observação 4.1. 1) Não é necessário colocarmos a constante de integração no cálculo da função $\mu(x)$ (uma vez $\mu(x)$ é a solução da equação separável $d\mu/dx = P(x)\mu$), quando encontramos a expressão de μ. O resultado não se altera se acrescentarmos tal constante à expressão de μ.
2)A equação (4.24) será exata mesmo quando $f(x) \equiv 0$, pois $\mu(x)$ não depende de $f(x)$. Nesse caso, a solução será

$$y(x) = ce^{-\int P(x)dx}.$$

Exemplo 4.1. Encontre uma solução para o P.V.I.

$$2y' + y = \frac{1}{1+x^2},\ y(2) = 3.$$

Colocando a E.D.O. na forma (4.21), obtemos

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2(1+x^2)}. \tag{4.25}$$

Assim, $P(x) = \frac{1}{2}$ e o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int 1/2\, dx} = e^{x/2}$.
Multiplicando o fator integrante na equação (4.25), temos

$$e^{x/2}y' + \frac{e^{x/2}}{2}y = \frac{e^{x/2}}{2(1+x^2)} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{x/2}y) = \frac{e^{x/2}}{2(1+x^2)}.$$

Logo, integrando ambos os lados da igualdade, temos

$$\int_2^x \frac{d}{ds}(e^{s/2}y(s))ds = \int_2^x \frac{e^{s/2}}{2(1+s^2)}ds \Leftrightarrow e^{x/2}y(x) - 3e = \int_2^x \frac{e^{s/2}}{2(1+s^2)}ds.$$

Daí

$$y(x) = e^{-x/2}\left(3e + \int_2^x \frac{e^{s/2}}{2(1+s^2)}ds\right).$$

4.3 Equações Homogêneas

Definição 4.1. Se uma função f satisfaz

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para algum $n \in \mathbb{R}$, então dizemos que f é uma função homogênea de grau n.

Exemplo 4.2. 1) A função $f(x,y) = x^2 + 5xy - 4y^2$ é uma função homogênea de grau 2, pois $f(tx,ty) = (tx)^2 + 5(tx)(ty) - 4(ty)^2 = t^2(x^2 + 5xy - 4y^2)$.

2) Provamos de forma análoga ao exemplo anterior que a função $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/3}$ é uma função homogênea de grau 2/3.

3) Pelo que expomos, não é difícil ver que a função $f(x,y) = x + y + lnx$ não é homogênea.

Observação 4.2. Observe que se $f(x,y)$ for uma função homogênea de grau n temos que $f(x,y) = f(x \cdot 1, \frac{y}{x} \cdot x) = x^n f(1, \frac{y}{x})$ ou analogamente, $f(x,y) = f(\frac{x}{y}y, y) = y^n f(\frac{x}{y}, 1)$.

Definição 4.2. Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é chamada **equação homogênea** se ambas as funções M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

Método de resolução

Uma equação diferencial homogênea

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

pode ser resolvida através de uma transformação algébrica, a saber, $y = ux$ ou $x = vy$, a qual transformará a equação homogênea em uma equação separável. De fato, considere a equação diferencial homogênea de grau n

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{4.26}$$

Seja $y = ux$, onde $u = u(x)$, então $dy = udx + xdu$. Assim, substituindo essa expressão de dy em (4.26) e a transformação $y = ux$, obtemos

$$\begin{aligned} M(x,ux)dx + N(x,ux)[udx + xdu] &= 0 \\ x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)[udx + xdu] &= 0 \\ (x^n M(1,u) + x^n uN(1,u))dx + x^{n+1}N(1,u)du &= 0 \end{aligned}$$

Dividindo essa última equação por x^n, temos

$$(M(1,u) + uN(1,u))dx + xN(1,u)du = 0.$$

De onde obtemos a E.D.O. separável

$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)}.$$

Não sei se você notou mas para chegarmos a essa expressão usamos fortemente a observação dada acima.

Se considerarmos a outra transformação $x = vy$, analogamente ao caso anterior, chegaremos a uma E.D.O. separável.

Exemplo 4.3. Resolva a E.D.O.

$$(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0, x > 0, y > 0.$$

É fácil ver que a E.D.O. dada é homogênea de grau 1. Considere a transformação $y = ux$. Substituindo na E.D.O. dada, obtemos

$$\begin{aligned} (2\sqrt{ux^2} - ux)dx - x(udx + xdu) &= 0 \\ (2\sqrt{u} - 2u)dx + xdu &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte equação separável

$$-\frac{dx}{x} = \frac{du}{2(\sqrt{u} - u)}.$$

Para resolvermos essa equação separável, façamos a mudança de coordenadas $t = u^{1/2}$, assim $dt = \frac{1}{2u^{1/2}}du$. Logo, obtemos o seguinte resultado

$$-ln|x| = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u^{1/2}} + ln\left|\frac{u^{1/2}}{1-u^{1/2}}\right|\right]$$

e voltando para as variáveis originais, obtemos que a solução da E.D.O. é dada implicitamente pela equação

$$-ln|x| = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{(y/x)^{1/2}} + ln\left|\frac{(y/x)^{1/2}}{1-(y/x)^{1/2}}\right|\right].$$

Observação 4.3. 1)Aconselhamos o uso da transformação $x = vy$ sempre que a função $M(x, y)$, presente na E.D.O. dada, for mais simples.

2) Algumas vezes necessitaremos aplicar uma substituição de variáveis antes ou depois de aplicar a transformação $y = ux$ ou $x = vy$ a fim de simplificarmos as expressões no decorrer do cálculo.

3) Uma E.D.O. homogênea pode sempre ser expressa na forma alternativa

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

De fato, considere a E.D.O. homogênea de grau n

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{x^n M(1, y/x)}{x^n N(1, y/x)} = -\frac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)} = F(y/x).$$

Exemplo 4.4. Resolva o P.V.I.

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x},\ \ y(1) = 1.$$

Observe que podemos escrever a E.D.O. da seguinte maneira

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}.$$

Assim, fazendo $y = ux$, obtemos

$$\frac{du}{dx}x + u = u + e^{u}.$$

Separando as variáveis e integrando, temos

$$-e^{-u} = ln|x| + c \Leftrightarrow -e^{-y/x} = ln|x| + c.$$

Como a condição inicial é $y(1) = 1$ temos $-e^{-1} = ln1 + c \Rightarrow c = -1/e$.

Um outra redução às equações separáveis

Uma E.D.O. da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

onde as variáveis x, y aparecem na forma polinomial $ax + by + c$ com a, b, c constantes pode sempre ser reduzida a uma equação separável por meio da substituição $u = ax + by + c, b \neq 0$.

Exemplo 4.5. Resolva

$$y' = (-2x + y)^2 - 7.$$

Observe que essa E.D.O. está no formato dito acima. Logo, se fizermos $u = -2x+y$, segue que $du/dx = -2+dy/dx$ e, substituindo na E.D.O. original, obtemos

$$\frac{du}{dx} = u^2 - 9,$$

a qual é uma E.D.O. separável que é resolvida por frações parcias (encorajamos o leitor a resolvê-la!). Resolvendo a E.D.O. e voltando para as variáveis originais, temos

$$y(x) = \frac{(-2x+3)ce^{6x} + (2x+3)}{1 - ce^{6x}}.$$

4.4 Equação de Bernoulli, Equação de Riccati e Equação de Clairaut

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, n \in \mathbb{R}$$

é chamada de **equação de Bernoulli**. A equação de Bernoulli para $n = 0$ ou $n = 1$ é uma equação linear e nós já sabemos como resolvê-la. Porém se $n \neq 0$ ou $n \neq 1$, fazemos a substituição $u = y^{1-n}$ para tornar a equação de Bernoulli uma equação linear e daí segue a resolução de uma equação linear.

Exemplo 4.6. Resolva

$$y' + 3xy = xy^3.$$

Vê-se que a equação dada é uma equação de Benoulli não linear. Dessa maneira, façamos a substituição $u = y^{-2}$. Assim, $du/dx = -2u^{3/2}dy/dx$. Substituindo na equação obtemos

$$-\frac{u'}{2u^{3/2}} + 3xu^{-1/2} = xu^{-3/2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u' + 3xu = x,$$

a qual é uma equação linear nas variáveis u e x. Resolvendo esta E.D.O. linear, obtemos

$$u(x) = e^{3x^2} \int -2xe^{-3x^2} dx + ce^{3x^2}.$$

Assim,

$$y(x) = \left(e^{3x^2}\int -2xe^{-3x^2}dx + ce^{3x^2}\right)^{-1/2}.$$

Definição 4.3. Uma E.D.O. de primeira ordem na forma

$$\frac{dy}{dx} + b_2(x)y^2 + b_1(x)y + b_0(x) = 0, \tag{4.27}$$

onde b_0, b_1 e b_2 são funções contínuas num intervalo I e $b_2(x) \neq 0$, para todo $x \in I$ chama-se **Equação de Riccati**.

Resolvendo uma Equação de Riccati

Para se resolver uma equação de Riccati é necessário conhecermos uma solução particular, $y_1(x)$, dessa equação. De posse dessa solução particular, $y_1(x)$, faça

1) Uma mudança de variável $y = y_1 + 1/z$ a fim de reduzir a equação (4.27) à uma equação linear nas variáveis x e z.

2)Resolva a E.D.O. linear obtida.

3) Retorne as variáveis originais.

Exemplo 4.7. Resolva a equação de Riccati

$$y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1.$$

Observe que a solução $y = 1$ é solução da equação de Riccati, logo façamos a mudança de variável $y = 1+1/z$, onde $z = z(x)$. Assim, $y' = -z^{-2}z'$ e substituindo na E.D.O. dada, obtemos

$$z' + z + x = 0,$$

a qual é uma E.D.O. linear. Resolvendo esta E.D.O. linear temos

$$z(x) = -x + 1 + ce^{-x}.$$

Voltando as variáveis originais, segue que

$$\frac{1}{y(x)-1} = -x + 1 + ce^{-x}$$

que resulta em

$$y(x) = \frac{1}{-x+1+ce^{-x}} + 1.$$

Observação 4.4. Uma equação de Riccati a coeficientes constantes

$$y' + ay^2 + by + c = 0$$

possui uma solução da forma $y = c$, onde c é uma constante se e, somente se, c é raiz da equação quadrática $am^2 + bm + c = 0$.

Definição 4.4. Uma equação diferencial da forma

$$y = xy' + f(y') \tag{4.28}$$

é dita **Equação de Clairaut**.

Supondo que a função f na equação de Clairaut é diferenciável, vamos achar as soluções dessa equação. A fim de simplificarmos a notação, façamos $y' = p$ em (4.28) e derivemos a expressão resultante com respeito a x. Dessa maneira, obtemos

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0,$$

de onde resulta que ou $dp/dx = 0$ ou $x + f'(p) = 0$.
Se $dp/dx = 0$, então $p = c$, onde c é uma constante e como $p = y'$, isso implica que $y' = c$ e substituindo em (4.28) temos a solução

$$y = cx + f(c),$$

a qual representa uma família de retas não paralelas.

Se $x + f'(p) = 0$ obtemos outra solução da equação de Clairaut eliminando p entre as equações

$$x + f'(p) = 0 \text{ e } y = px + f(p). \tag{4.29}$$

É possível mostrar que a solução resultante nesse caso é a envoltória da família de retas $y = cx + f(c)$.

Exemplo 4.8. A equação de Clairaut

$$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$$

tem

$$y = cx + \frac{c^2}{2}$$

como solução. E resolvendo o sistema (4.29) para esse exemplo, temos que uma outra solução para a equação é dada por $y = -x^2/2$ (a envoltória da família de retas $y = cx + \frac{c^2}{2}$).

Observação 4.5. 1) Quando uma E.D.O. de primeira ordem não é separável, exata, linear, homogênea, de Bernoulli, de Ricatti, Clairaut, ou da forma $y' = f(x, y)$, onde x e y aparecem de forma polinomial tentamos reduzí-la a uma das formas conhecidas por meio de uma substituição. Como é o caso da E.D.O.

$$y(1 + 2xy)dx + x(1 - 2xy)dy = 0.$$

Para essa E.D.O. faça a substituição de variável $u = 2xy$ a qual reduzirá a mesma a uma equação separável.

2) Pode acontecer que uma E.D.O. de primeira ordem com variável dependente y não seja nenhuma das formas conhecidas, porém se

invertermos as variáveis, ou seja, tomar a variável x como dependente, poderemos conseguir que a E.D.O. seja de algum modelo conhecido. Como é o caso da E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y^2}.$$

Ela não é nenhum dos tipos conhecidos, ams se invertermos as variáveis, obtemos

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2,$$

a qual é linear.

4.5 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que podemos resolver muitas E.D.O.'s de primeira ordem desde que elas sejam dos tipos apresentados nessa aula e na aula anterior. Contudo, se nos depararmos com algumas E.D.O.'s que não são dos tipos estudados podemos ainda tentar reduzí-las a tais tipos por meio de uma mudança de variável. Nesse caso, a experiência e imaginação do aluno serão determinantes para a resolução dessa E.D.O..

RESUMO

..

Na aula de hoje vimos o que são E.D.O.'s de primeira ordem lineares, homogeêneas, de Bernoulli, de Riccati e de Clairaut. A saber,

- $a_1(x)y' + a_0(x) = g(x)$ **linear**;
- $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, M(tx,ty) = t^n M(x,y)$ e $N(tx,ty) = t^n N(x,y)$ **homogênea**;
- $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, n \in \mathbb{R}$ **Bernoulli**;
- $\frac{dy}{dx} + b_2(x)y^2 + b_1(x)y + b_0(x) = 0$ **Riccati**;
- $y = xy' + f(y')$ **Clairaut**

Aprendemos como resolver cada uma dessas equações. Vimos que por meio de substituição de variáveis podemos reduzir equações que não são dos tipos mencionados a esses tipos e assim aumentar o número de equações que são resolvidas analiticamente.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula veremos algumas aplicações práticas para algumas das E.D.O.'s estudadas até aqui.

ATIVIDADES

..

Atividade. 4.1. Resolva os problemas abaixo

a) $y' + x^{-1}y = x^{-2}y^4, \; y(-1) = -2$

b) $y' = \dfrac{yx}{x^2 - y^2}$

c) $3y + e^t + (3t + cosy)\frac{dy}{dt} = 0$

d) $y' = 1 + e^{y-x+3}$

e) $y' + x^{-1}y - cos(x)y^{-2} = 0, \; y(1) = 1$

f) $x^2y' + xy = 1$

g) $y(1 + 2xy)dx + x(1 - 2xy)dy = 0$ (faça a substituição $u = 2xy$ primeiro.)

Atividade. 4.2. Encontre uma solução contínua do P.V.I.

$$dy/dt + y = g(t), y(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, t > 1 & \end{cases}$$

LEITURA COMPLEMENTAR

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

SOTOMAYOR, Jorge, Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

4.6 Referências Bibliográficas

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.