Análise da Reta

Wilberclay Gonçalves Melo

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Análise da Reta

Elaboração de Conteúdo
Wilberclay Gonçalves Melo

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central Universidade Federal de Sergipe

Melo. Wilberclay Gonçalves
M528a Análise da Reta / Wilberclay Gonçalves Melo -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Matemática . 2. Análise. 3. Números reais. 4. Limites. I. Título.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Capítulo 1

Números Reais

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Wilberclay Goncalves Melo

Disciplina: Análise na Reta

Unidade I

Aula 1: Números Reais

Meta

Apresentar os conceitos de ínfimo e supremo de alguns conjuntos formados por números reais.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá saber manusear as operacões básicas com números reais, ser capaz de utilizar as propriedades elementares de módulo de um número real, e saber encontrar o ínfimo e o supremo de alguns conjuntos contituídos de números reais.

Pré-requisitos

Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

1.1 Introducão

Olá, nesta aula, convido ao caro aluno a estudar mais profundamente as operacões de adicão, subtracão, multiplicacão e divisão entre dois números reais. Mostraremos as principais propriedades herdadas de tais operacões. Para que o aluno se convenca da existência destas operacões recomendo a leitura do livro [2]. Este material não visa a construcão do conjunto dos números reais, mas o que podemos descobrir sobre este conjunto utilizando sua existência já provada em [2]. Mais a seguir, estabeleceremos a idéia de limite de uma sequência. Para isto, é importante conceituar módulo de um número real. Portanto, a você aluno, apresentaremos algumas desigualdades relevantes sobre tal definicão. Um exemplo dessas desiguladades é, a muito conhecida e utilizada, desigualdade triangular. Estudaremos também conceitos essencias para a aula 9 (Integracão) que são: supremo e ínfimo de conjuntos formados por números reais. Estas definicões são o ponto crucial desta aula. É importante que o aluno procure responder os exercícios contidos neste material. Em todas as aulas, as atividades estão dispostas no conteúdo, chamadas exercícios de fixacão, no final da aula, como exercícios propostos, e por fim damos uma lista, denominada exercícios resolvidos, para que o aluno tenha uma idéia de como as atividades desta disciplina devem ser respondidas.

1.2 A Estrutura de Corpo dos Números Reais

Propriedades 1.1 (Operacões em $\mathbb{R}$)**.** *Considere que estão estabelecidas as operações de adição e multiplicação em* $\mathbb{R}$, *isto é, existem duas funções* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *denominadas adição e multiplicação, respectivamente, definidas por:* $+(x, y) = x + y$ *e* $\cdot(x, y) = xy$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. *Tais operações satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *(Associatividade)* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *e* $x(yz) = (xy)z, \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$*;*
2. *(Comutatividade)* $x + y = y + x$ *e* $xy = yx, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$*;*
3. *(Elemento Neutro) Existem números reais* 0 *e* 1 *que satisfazem:* $0 + x = x + 0 = x$ *e* $1x = x1 = x, \forall\ x \in \mathbb{R}$. *Os números* 0 *e* 1 *são denominados elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente;*
4. *(Elemento Inverso) Dado um número real* x *existe um número denotado por* $(-x)$ *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$. *Além disso, para cada número real* $x \neq 0$ *existe um número real denotado por* x^{-1}, *tal que* $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. *Estes números são chamados elementos inversos a* x, *para a adição e para a multiplicação, respectivamente;*
5. *(Distributividade)* $(x + y)z = xz + yz,\ \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$*;*

Obs 1.1 (Definicão de Corpo)**.** Todo conjunto $C \neq \emptyset$ munido de duas operacões $+ : C \times C \to C$ e $\cdot : C \times C \to C$ com as mesmas propriedades estabelecidas em 1.1 é denomiado um corpo. Por isso, o conjunto dos númeors reais $\mathbb{R}$, munido das operacões de adicão e multiplicacão, é dito um corpo. Um outro exemplo conhecido do leitor é o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ munido da adicão e multiplicacão usuais em $\mathbb{C}$. Ou seja, $(a+bi)+(x+yi) = (a+x)+(b+y)i$ e $(a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i,\ \forall\ a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

Afirmacão 1.1 (Unicidade)**.** *Os elementos neutros e inversos da adição e multiplicação em* $\mathbb{R}$ *são únicos.*

Demonstração. Considere que existe $z \in \mathbb{R}$ que satisfaz: $xz = zx = x, \forall\ x \in \mathbb{R}$. Como $1 \in \mathbb{R}$, então: $1 = 1z =^3 z$. Com isso, o elemento neutro da multiplicacão é único. Analogamente, é possível provar que o elemento neutro da adicão é único. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, suponha que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$. Assim sendo,

$$y =^3 0 + y =^4 [(-x) + x] + y =^1 (-x) + (x + y) = (-x) + 0 =^3 (-x).$$

Portanto, o elemento inverso a x em relacão a adicão é único. Analogamente, prova-se que os elementos inversos da multiplicacão são únicos. $\square$

Definicão 1.1 (Subtracão e Divisão)**.** A operacão $- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $-(x, y) = x - y := x + (-y)$ é denominada subtracão em $\mathbb{R}$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Definimos a operacão $\div : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ divisão em $\mathbb{R}$ por: $\div(x, y) = x \div y := xy^{-1}$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, aqui $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Propriedades 1.2. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então:*

i) *(Lei do Corte) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$;*

ii) *$x0 = 0x = 0$;*

iii) *(Sem Divisores de Zero) $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$;*

iv) *(Regra de Sinais) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$ e $-[(-x)] = x$.*

Demonstração. **i)** Veja que:

$$x+y = x+z \Rightarrow (-x)+(x+y) = (-x)+(x+z) \Rightarrow^1 [(-x)+x]+y = [(-x)+x]+z \Rightarrow^4 0+y = 0+z \Rightarrow^3$$

$y = z$.
Logo, a Lei do Corte é válida.
ii) Portanto, por **i)**, concluímos que

$$x0 + 0 =^3 x0 =^3 x(0 + 0) =^5 x0 + x0 \Rightarrow 0 = x0.$$

Por comutatividade $0x = 0$.
iii) Para provar **iii)** suponha que $x \neq 0$. Assim, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que: $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Dessa forma, se $xy = 0$, temos que:

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}0 \Rightarrow^1 (x^{-1}x)y = 0 \Rightarrow^4 1y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Isto nos diz que $\mathbb{R}$ não possui divisores de zero.
iv) Finalmente, observe que:

$$xy + x(-y) =^5 x[y + (-y)] =^4 x0 = 0.$$

Com isso, $x(-y)$ é o elemento inverso de xy. Mas o elemento neutro é único (ver afirmacão 1.1). Por fim, $x(-y) = -(xy)$. As outras regras de sinais possuem provas análogas. $\square$

Obs 1.2 (Regra de Sinais)**.** Podemos concluir a partir da regra de sinais que: $1(-1) = (-1)1 = -1$, $(-1)(-1) = 1$ e $-[(-1)] = 1$. Por isso, o nome regra de sinais é dado para esta afirmacão.

1.3 A Estrutura de Corpo Ordenado dos Números Reais

Definicão 1.2 ($\mathbb{R}$ Corpo Ordenado)**.** Dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, pois existe um subconjunto $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, denomindo conjunto dos números reais positivos, tal que:

1. $x + y, xy \in \mathbb{R}_+$, se $x, y \in \mathbb{R}_+$, em palavras, a soma e o produto de números positivos é novamente um número positivo;

2. (Lei da Tricotomia) Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}_+$, ou $(-x) \in \mathbb{R}_+$ (somente uma das afirmacões é verdadeira).

Obs 1.3 (Corpo Ordenado)**.** *Em geral, um corpo C qualquer é dito ordenado se existe um subconjunto $P \subseteq C$ satisfazendo as mesmas condições que $\mathbb{R}_+$ acima. Por este fato, estabelecemos a definição* 1.2.

Definicão 1.3 (Números Negativos)**.** Chamaremos o conjunto $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : (-x) \in \mathbb{R}_+\}$ de conjunto dos números reais negativos.

Obs 1.4. Unindo a definicão 1.3 à Lei da Tricotomia (ver definicão 1.2) concluímos que: um número real ou é nulo, ou é positivo, ou é negativo, isto é, $\mathbb{R} = \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, onde esta união é disjunta.

Afirmacão 1.2. *O quadrado de um número real não-nulo é um número real positivo.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^*$. Pela Lei da Tricotomia (ver definicão 1.2), concluímos que ou $x \in \mathbb{R}^+$, ou $(-x) \in \mathbb{R}^+$. Se $x \in \mathbb{R}^+$, então: $x^2 = xx \in \mathbb{R}^+$, pela definicão 1.2. Ou seja, x^2 é positivo. Por outro lado, se $(-x) \in \mathbb{R}^+$, então: $x^2 = (-x)(-x) \in \mathbb{R}^+$, pela definicão 1.2 e regra de sinais. Portanto, x^2 é positivo. $\square$

Exemplo 1.1. 1 é um número positivo. Com efeito, como $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ e 1^2 é positivo, então o resultado segue. Por conseguinte, -1 é negativo.

Obs 1.5 (Corpo Não-Ordenado). A partir deste exemplo podemos concluir que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um exemplo de corpo que não é ordenado, pois $i^2 = -1$ é negativo.

1.4 Relacão de Ordem no Conjunto dos Números Reais

Com a existência dos números reais positivos é possível estabelecer uma relacão de ordem em $\mathbb{R}$. Esta está estabelecida na seguinte

Definicão 1.4 (Menor ou Maior). Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é menor que y, ou que y é maior que x, se $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Notacão: $x < y$ ou $y > x$.

Obs 1.6. $x < y$ ou $y > x$, se existe $p \in \mathbb{R}_+$ tal que $y - x = p$, ou seja, $y = p + x$. Observe também que: $x > 0 \Leftrightarrow x - 0 \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$. Da mesma maneira, $x < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_-$.

Exemplo 1.2. $1 > 0$, pois $1 \in \mathbb{R}_+$. Analogamente, $-1 < 0$.

A proposicão a seguir garante que é possível definir uma relacão de ordem em $\mathbb{R}$.

Proposicão 1.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, então:*

i) *(Transitividade) $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$;*

ii) *(Tricotomia) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $y < x$;*

iii) *(Monotonicidade) $x < y \Rightarrow x + z < y + z, xz < yz$, se $z > 0$ e $xz > yz$, se $z < 0$.*

Demonstração. **i)** Considere que $x < y$ e $y < z$. Assim sendo, usando a definicão 1.4, temos que $z - y > 0$ e $y - x > 0$. Então, $z - x = z - y + y - x > 0$ (ver definicão 1.2 e observacão acima). Isto prova a transitividade.
ii) Use a Lei da Tricotomia sobre $y - x \in \mathbb{R}$ para provar o segundo item. De fato, ou $y - x = 0$, ou $y - x > 0$, ou $x - y = -(y - x) > 0$. Equivalentemente, ou $y = x$, ou $x < y$, ou $y < x$. Isto prova a Tricotomia.
iii) Vamos provar a monotonicidade. Se $x < y$, então $y - x > 0$. Logo, $y + z - (x + z) =$

$y-x>0$. Portanto, $x+z<y+z$. Além disso, $z>0$, encontramos: $yz-xz=(y-x)z>0$, pela definicão 1.2, isto é, $xz<yz$. Por outro lado, se $z<0$, então: $xz-yz=(x-y)z=(y-x)(-z)>0$, pois $y-x, -z>0$. Ou seja, $xz>yz$. $\square$

Definicão 1.5 (Relacão de Ordem)**.** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é menor ou igual a y, ou que y é maior ou igual a x, se $x<y$ ou $x=y$.

Notacão: $x \leq y$ ou $y \geq x$.

Exemplo 1.3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \leq y$. Então $x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$. De fato, $x \leq \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2x \leq 2\dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2x \leq x+y \Leftrightarrow 2x-x \leq x+y-x \Leftrightarrow x \leq y$. Analogamente, prova-se que $\dfrac{x+y}{2} \leq y$.

Obs 1.7. "$\leq$" é uma relacão de ordem em $\mathbb{R}$, pois as seguintes as propriedades

a) (Reflexividade) $x \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) (Anti-simetria) $x \leq y$ e $y \leq x \Leftrightarrow x=y, x, y \in \mathbb{R}$;

c) (Transitividade) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$,

seguem diretamente da Proposicão 1.1.

Considere que o conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N}$. Defina uma funcão $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, indutivamente, por: $f(1_{\mathbb{N}})=1_{\mathbb{R}}$ e $f(n+1_{\mathbb{N}})=f(n)+1_{\mathbb{R}}$, onde $n \in \mathbb{N}$,$1_{\mathbb{N}}$ e $1_{\mathbb{R}}$ são, respectivamente, os elementos neutros das multiplicacões usual de $\mathbb{N}$ e da multiplicacão de $\mathbb{R}$ definida acima. Como $1_{\mathbb{R}}>0$, então $1_{\mathbb{R}}<1_{\mathbb{R}}+1_{\mathbb{R}}<1_{\mathbb{R}}+1_{\mathbb{R}}+1_{\mathbb{R}}<\ldots.$ Por conseguinte, $f(n)<f(m)$, se $n<m$. Ou seja f é uma funcão injetora. Portanto, $f: \mathbb{N} \to f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ é uma bijecão. Com isso, podemos identificar $f(\mathbb{N})$ com $\mathbb{N}$. Com esta identificacão garantimos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Agora, seja $n \in \mathbb{N}$. Logo, $n \in \mathbb{R}$. Dessa forma $-n \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros, já que $0 \in \mathbb{R}$. Por fim, sejam p, q números inteiros com $q \neq 0$. Assim sendo, $p, q \in \mathbb{R}$ e $p \div q = pq^{-1} \in \mathbb{R}$. Isto é, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais. Resumindo, obtemos:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

A última inclusão é própria, isto é, existe um número real que não é racional. Veremos a prova desta afirmacão no decorrer do material.

Exercícios de Fixacão

1. Prove que se $x, y \in \mathbb{R}$ então

i) $-(x+y) = (-x) + (-y)$;

ii) $\dfrac{1}{(-x)} = -\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

iii) $-\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{(-x)}{y}$.

2. Solucione as seguintes equacões, justificando cada passo apropriado:

i) $2x + 5 = 8$;

ii) $x^2 = x$;

iii) $(x-1)(x+2) = 0$.

3. Se $x \in \mathbb{R}$ satisfaz $x \cdot x = x$. Prove que $x = 0$ ou $x = 1$.

4. Se $x, y \in \mathbb{R}$ são não-nulos, mostre que $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}$.

5. Se $x, y \in \mathbb{Q}$, mostre que $x + y, x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

6. Se $0 < x < y$, mostre que $x < \sqrt{xy} < y$.

7. Se $\forall\ \varepsilon > 0$ temos que $x \leq y + \varepsilon$, mostre que $x \leq y$.

8. Prove que $[1/2(x+y)]^2 \leq 1/2(x+y)^2$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que a igualdade é válida somente quando $x = y$.

9. Se $x > 1$, mostre que $x^n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $0 < x < 1$, prove que $x^n \leq x$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

1.5 Módulo de um Número Real

Nesta secão definiremos módulo de um número real e estabeleceremos algumas propriedades. Geometricamente, o módulo de um número real é a distância deste número ao elmento neutro 0. Formalmente temos a seguinte

Definicão 1.6 (Módulo)**.** Definimos e denotamos o módulo de um número real x por:

$$|x| \;=\; \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Obs 1.8. A definicão 1.6 é equivalnente a $|x| = \max\{x, -x\}$, onde $x \in \mathbb{R}$. Por conseguinte, $|x| \geq x, -x$, $x \in \mathbb{R}$. Por monotonicidade, $-|x| \leq x \leq |x|$, onde $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $|x| \geq 0$ e $|x| = |-x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4. $|-3,5| = 3,5$ e $|3| = 3$ são exemplos de módulos.

Proposicão 1.2. *Sejam $y, \delta \in \mathbb{R}$, então são equivalentes:*

i) $|y| \leq \delta$;

ii) $-\delta \leq y \leq \delta$.

Demonstração. Observe que, por monotonicidade, chegamos asseguintes equivalências:

$$|y| \leq \delta \Leftrightarrow \max\{y, -y\} \leq \delta \Leftrightarrow y \leq \delta \text{ e } -y \leq \delta \Leftrightarrow y \leq \delta \text{ e } y \geq -\delta \Leftrightarrow -\delta \leq y \leq \delta.$$

□

Obs 1.9. A Proposicão 1.2 nos diz, implicitamente, que: $|y| > \delta \Leftrightarrow y < -\delta$ ou $y > \delta$.

Corolário 1.1. *Sejam $x, a, \delta \in \mathbb{R}$. Então são equivalentes:*

i) $|x - a| \leq \delta$;

ii) $a - \delta \leq x \leq a + \delta$.

Demonstração. Faca $y = x - a$ e aplique a Proposicão 1.2. Chegamos ao seguinte resultado: $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x - a \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$. Esta última equivalência é verdadeira por monotonicidade. □

Obs 1.10. Os resultados obtidos na Proposicão 1.2 e no Corolário 1.1 continuam verdadeiros se substituirmos $\leq$ por $<$.

Proposicão 1.3. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. As seguintes desigualdades são válidas:*

i) *(Desigualdade Triangular) $|x+y| \leq |x|+|y|$, ou em palavras, o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor ou igual a soma dos comprimentos do outros dois lados;*

ii) *(Módulo do Produto) $|xy| = |x||y|$, ou em palavras, o módulo do produto é o produto dos módulos;*

iii) *(Módulo da Divisão) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$. Prove que $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, aqui estamos usando a seguinte notação $xy^{-1} = \dfrac{x}{y}$.*

iv) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Demonstração. **i)** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Vimos que: $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Assim sendo, somando membro a membro as desigualdades acima encontramos: $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$. Usando a Proposicão 1.2, obtemos a desigualdade triangular, isto é, $|x+y| \leq |x|+|y|$.
ii) Observe, agora, que:

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0; \\ (-x)^2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Portanto, usando regra de sinais, obtemos: $|x|^2 = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$, ou seja, $(|xy| - |x||y|)(|xy| + |x||y|) = |xy|^2 - (|x||y|)^2 = 0$. Como $\mathbb{R}$ não tem divisores de zero, então, $|xy| = \pm|x||y|$. Por fim, $|xy| = |x||y|$, pois o módulo é sempre ≥ 0. Isto prova **ii)**.
iii) Primeiramente, vamos provar que $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$. De fato, usando o item **ii)**, encontramos: $|y||y^{-1}| = |yy^{-1}| = |1| = 1$. Usando a Afirmacão 1.1, concluímos que: $|y^{-1}| = |y|^{-1}$. Ou seja, $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$. Utilizando o item **ii)** novamente, obtemos: $\dfrac{|x|}{|y|} = |x|\dfrac{1}{|y|} = |x|\left|\dfrac{1}{y}\right| = \left|x\dfrac{1}{y}\right| = \left|xy^{-1}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.
iv) Veja que a primeira desigualdade em **iv)** já foi estabelecida. Para finalizar, utilize a desigualdade triangular para concluir que: $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$. Com isso,

$|x| - |y| \leq |x - y|$. Analogamente, $|y| \leq |y - x| + |x|$. Logo, $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Ou seja, $||x| - |y|| \leq |x - y|$. $\square$

Relembraremos, agora, como são definidos os intervalos em $\mathbb{R}$. Primeiramente enumeremos os intervalos que são deniminados limitados.

Definicão 1.7 (Intervalos Limitados)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Abaixo estão descritos os intervalos limitados em $\mathbb{R}$:

- (Intervalo fechado) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- (Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
- (Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
- (Intervalo aberto) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Agora, listemos os intervalos que são ditos ilimitados.

Definicão 1.8 (Intervalos Ilimitados)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Descrevemos abaixo os intervalos ilimitados em $\mathbb{R}$:

- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$;
- (Intervalo fechado à direita) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;
- (Intervalo aberto à direita) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;
- (Intervalo fechado à esquerda) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$;
- (Intervalo aberto à esquerda) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.

Obs 1.11. O intervalo [a,a]={a} é denominado intervalo degenerado. Qualquer intervalo que se escreve de maneira diferente deste é dito não-degenerado. Vimos que: $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta \Leftrightarrow x \in [a - \delta, a + \delta]$. Analogamente, $|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Exercícios de Fixacão

1. Se $x \in \mathbb{R}$, mostre que $|x| = \sqrt{x^2}$.

2. Se $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

3. Se $x < a, b < y$, mostre que $|a - b| < y - x$.

4. Encontre $x \in \mathbb{R}$ tal que:

i) $|4x - 5| \leq 13$;

ii) $|x^2 - 1| \leq 3$.

5. Encontre $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $|x + 1| + |x - 2| = 7$.

6. Encontre $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz:

i) $|x - 1| > |x + 1|$;

ii) $|x| + |x + 1| < 2$.

7. Mostre que se $x, y \in \mathbb{R}$, então:

i) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$;

ii) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

1.6 A Estrutura de Corpo Ordenado Completo de $\mathbb{R}$

Nesta secão incluiremos no trabalho a idéia de ínfimo e supremo de um conjunto. Estes conceitos são essenciais para a definicão que estabeleceremos de integral de Riemann. Assim sendo, enunciemos a seguinte

Definicão 1.9 (Limitacão Inferior e Superior)**.** Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado inferiormente (respectivamente, limitado superiormente) se existe $c \in \mathbb{R}$ (respectivamente, existe $d \in \mathbb{R}$) tal que: $c \leq x$ (respectivamente, $x \leq d$), $\forall\ x \in X$. Neste caso, c (respectivamente, d) é denominadada cota inferior (respectivamente, cota superior) de X.

Definicão 1.10 (Conjunto Limitado)**.** Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito limitado se este é limitado inferior e superiormente.

Obs 1.12. $X \subseteq \mathbb{R}$ é limitado $\Leftrightarrow$ existe $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq x \leq d$, $\forall\ x \in X$ $\Leftrightarrow$ existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq [c, d]$ $\Leftrightarrow$ existe $M = \max\{|c|, |d|\}$ tal que $X \subseteq [-M, M]$ $\Leftrightarrow$ existe $M \in \mathbb{R}$ tais que $-M \leq x \leq M$, $\forall\ x \in X$ $\Leftrightarrow$ existe $M \in \mathbb{R}$ tais que $|x| \leq M$, $\forall\ x \in X$.

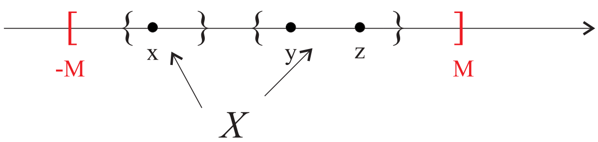

Figura 1.1: Conjunto limitado

Obs 1.13. Segue da Observacão 1.12 que qualquer subconjunto de um conjunto limitado é também um conjunto limitado.

Exemplo 1.5. $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente por 1, $\mathbb{R}_-$ é limitado superiormente por 0 e $X = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado inferior e superiormente, respectivamente, por 0 e 1. Os intervalos (a, b), $[a, b]$,$(a, b]$, $[a, b)$ são conjuntos limitados por a e b.

Definicão 1.11 (Supremo)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado superiormente. O supremo do conjunto X, denotado por $\sup X$, é definido como sendo a menor das cotas superiores de X. Ou seja,

i) $\sup X$ é cota superior de X;

ii) se y é cota superior de X, então $\sup X \leq y$.

Obs 1.14. O item **ii)** pode ser substituído por uma das seguintes afirmacões equivalentes:

ii') se $y < \sup X$ então y não é cota supeior de X;

ii") dado $\varepsilon > 0$, $\sup X - \varepsilon$ não é cota superior de X.

Figura 1.2: Visualizacão do item **ii")**

O conjunto $\mathbb{R}$ é dito um corpo ordenado completo, pois cada $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente possui supremo. Portanto, está garantida a existência do supremo neste caso.

Obs 1.15 (Corpo Completo)**.** Em geral, um corpo ordenado qualquer C é dito completo se existe supremo para qualquer subconjunto não-vazio e limitado superiormente de C. O conjunto $\mathbb{Q}$ munido da adicão e multiplicacão herdadas de $\mathbb{R}$ é um corpo. O subconjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ não possui supremo em $\mathbb{Q}$ (ver exercícios da lista de exercícios propostos). Portanto, $\mathbb{Q}$ é exemplo de um corpo ordenado não-completo.

Exemplo 1.6 (Supremo de Intervalos)**.** Veja que $\sup(0,1) = 1$. De fato, é fácil ver que 1 é cota superior de $(0,1)$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \in (0,1)$ tal que $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} < 1$. Portanto, $1 - \varepsilon$ não é cota superior de $(0,1)$. Logo, $\sup(0,1) = 1$. Observe que, $\sup(0,1) = 1 \notin (0,1)$. Analogamente, $\sup(0,1] = \sup[0,1) = \sup[0,1] = 1$. Em geral, $\sup(a,b) = \sup(a,b] = \sup[a,b) = \sup[a,b] = \sup(-\infty,b) = \sup(-\infty,b] = b$, onde $a \leq b$.

Exemplo 1.7 (Supremo da Soma)**.** Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados superiormente. Seja $X+Y = \{x+y : x \in X, y \in Y\}$. Então $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$. Com efeito, existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que: $x \leq c$ e $y \leq d$, $\forall\, x \in X, y \in Y$. Portanto, $x + y \leq c + d$, $\forall\, x + y \in X + Y$. Ou seja, $X + Y$ é limitado superiormente. Analogamente, como $\sup X$ e $\sup Y$ são cotas superiores de X e Y, respectivamente, então $x + y \leq \sup X + \sup Y$, $\forall\, x + y \in X + Y$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x$ e $\sup Y - \frac{\varepsilon}{2} < y$. Somando estes dois resultados encontramos: $\sup X + \sup Y - \varepsilon < x + y \in X + Y$. Isto nos diz que $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Definicão 1.12 (Ínfimo)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio limitado inferiormente. O ínfimo de X, denotado por $\inf X$, é definido como sendo a maior das cotas inferiores. Ou seja,

i) $\inf X$ é uma cota inferior de X;

ii) se y é cota inferior de X, então $y \leq \inf X$.

Obs 1.16. O item **ii)** da definicão 1.12 pode ser substituído pelos seguintes itens equivalentes:

ii') se $\inf X < y$ então y não é cota inferior de X;

ii") dado $\varepsilon > 0$, $\inf X + \varepsilon$ não é cota inferior de X.

Figura 1.3: Vizualizacão do item **ii")**

Exemplo 1.8 (Ínfimo de Intervalos)**.** Analogamente ao que foi feito no exemplo 1.6, podemos concluir que: $\inf(a,b) = \inf(a,b] = \inf[a,b) = \inf[a,b] = \inf[a,\infty) = \inf(a,\infty) = a$, onde $a \leq b$.

Exemplo 1.9 (Ínfimo da Soma)**.** Se X, Y são não-vazios e limitados inferiormente, temos, analogamente ao exemplo 1.7, que $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.

Exemplo 1.10. Sejam X não-vazio, limitado inferiormente e $a > 0$. Seja $aX = \{ax : x \in X\}$. Então $\inf(aX) = a \inf X$. De fato, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x$, $\forall\ x \in X$. Portanto, por monotonicidade, $ac \leq ax$, $\forall\ ax \in aX$. Ou seja, aX é limitado inferiormente. Analogamente, $a \inf X \leq ax$, $\forall\ ax \in aX$, pois $\inf X$ é cota inferior de X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < \inf X + \frac{\varepsilon}{a}$. Portanto, $ax < a \inf X + \varepsilon$, com $ax \in aX$. Com isso, $\inf(aX) = a \inf X$.

Definicão 1.13 (Máximo e Mínimo de Conjuntos)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Um número $x \in X$ é denominado elemento máximo (respectivamente, elemento mínimo) de X, e escrevemos $x = \max X$ (respectivamente, $x = \min X$), se X é cota superior (respectivamente cota inferior) de X.

Obs 1.17. Note que $x \in X$.

Exemplo 1.11. $\max[0,1] = 1$ e $\min[0,1] = 0$. Observe que $(0,1)$ não possui máximo nem mínimo, porém possui supremo 1 e ínfimo 0.

Teorema 1.2. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\mathbb{N}$ *é ilimitado superiormente em* $\mathbb{R}$*;*

ii) $\inf X = 0$*, onde* $X = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Demonstração. **i)** Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, então existe $\sup \mathbb{N}$. Assim $\sup \mathbb{N} - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$. Ou seja, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\sup \mathbb{N} - 1 < n$. Dessa forma, $\sup \mathbb{N} < n + 1 \in \mathbb{N}$, absurdo, já que, $\sup \mathbb{N}$ é cota superior de $\mathbb{N}$.
ii) Observe que $0 \leq \dfrac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ou seja, 0 é cota inferior de X. Seja $y > 0$. vamos provar que y não é cota inferior de X. Usando o item **i)**, temos que $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que: $\dfrac{1}{y} < n$. Ou seja, $y > \dfrac{1}{n}$ e $\dfrac{1}{n} \in X$. Portanto, $\inf X = 0$. $\square$

Exemplo 1.12. Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ é ilimitado superiormente.

Teorema 1.3 (Teorema dos Intervalos Encaixados)**.** *Sejam* $I_n = [x_n, y_n], \forall\, n \in \mathbb{N}$*, intervalos limitados fechados em* $\mathbb{R}$*. Considere que estes estejam encaixados da seguinte maneira:*

$$... \subseteq I_{n+1} \subseteq I_n \subseteq ... \subseteq I_2 \subseteq I_1.$$

Então, $\exists\, x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Demonstração. Como $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Então, $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq y_n \leq ... \leq y_2 \leq y_1.$$

Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Então, X é limitado superiormente por y_1, pois $x_n \leq y_1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, temos que: $x = \sup X$ existe. Além disso, para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ou seja, y_n é cota superior de X, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x_n \leq x \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Isto é, $x \in I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por fim, $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. $\square$

Exemplo 1.13. É importante que os intervalos do Teorema 1.3 sejam fechados. Por exemplo, considere os intervalos $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ são encaixados, mas $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Exemplo 1.14. Considere os intervalos $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, os quais são encaixados. O Teorema 1.3 nos garante que $\exists\ x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Na verdade, $x = 0$ (verifique!).

Definicão 1.14 (Conjunto Finito)**.** Seja X um conjunto de números. Dizemos que X é finito, se $X = \emptyset$ ou $\exists\ n \in \mathbb{N}$ e uma bijecão $f : \{1, 2, ..., n\} \to X$. Caso contrário, X é dito infinito.

Exemplo 1.15. O conjunto $\{0, \sqrt{2}\}$ é finito, pois a funcão $f : \{1, 2\} \to \{0, \sqrt{2}\}$ dada por: $f(1) = 0$ e $f(2) = \sqrt{2}$, é uma bijecão.

Definicão 1.15 (Conjunto Enumerável)**.** Dizemos que um conjunto de números X é enumerável se X é finito ou $\exists$ uma bijecão $f : \mathbb{N} \to X$.

Exemplo 1.16. O conjunto dos números pares $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, ...\}$ é enumerável. Basta definir $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ por: $f(n) = 2n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Corolário 1.4. $\mathbb{R}$ *é não-enumerável.*

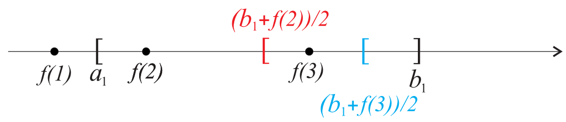

Figura 1.4: Passo 3 da iteracão descrita na demonstracão

Demonstração. Vamos provar que uma funcão $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não pode ser sobrejetiva. Como $\mathbb{R}$ é ilimitado superiormente $\exists\ a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) < a_1$. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo não-degenerado. Assim sendo, $f(1) \notin I_1$. Se $f(2) \in I_1$, então ou $f(2) \neq a_1$ ou $f(2) \neq b_1$. Considere, sem perda de generalidade, que $f(2) \neq b_1$. Ou seja, que $f(2) < b_1$. Construa $I_2 = \left[\frac{b_1+f(2)}{2}, b_1\right]$. Logo, $I_2 \subseteq I_1$ e $f(2) \notin I_2$. Se $f(2) \notin I_1$, então, defina $I_2 = I_1$. De qualquer maneira, $f(j) \notin I_j, \forall\ j = 1, 2$, e $I_2 \subseteq I_1$. Suponha que, indutivamente, estão definidos $I_1, I_2, ..., I_n$ tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n$, com $f(j) \notin I_j, \forall\ j = 1, 2, ..., n$ e $I_n = [a_n, b_n]$. Se $f(n+1) \in I_n$, logo, ou $f(n+1) \neq a_n$ ou $f(n+1) \neq b_n$. Seja $f(n+1) \neq b_n$. Isto é, $f(n+1) < b_n$. Construa $I_{n+1} = \left[\frac{b_n+f(n+1)}{2}, b_n\right]$. Dessa forma, $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $f(n+1) \notin I_{n+1}$. Se $f(n+1) \notin I_n$, então, defina $I_{n+1} = I_n$. Portanto, $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ são intervalos com $f(n) \notin I_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, $\exists\, x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Suponha, por absurdo, que $x = f(m)$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo, $x \notin I_m$. Isto é um absurdo. Com isso, $x \notin Im(f)$. Ou seja f não é sobrejetiva. Por fim, $\mathbb{R}$ é não-enumerável. $\square$

Obs 1.18 (Irracionais)**.** Como $\mathbb{R} = \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \mathbb{Q}$, com união disjunta e $\mathbb{R}$ é não-enumerável, então $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é não-enumerável, pois a união de conjuntos enumeráveis é enumerável (ver exercícios propostos). O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denominado o conjunto dos números irracionais. Portanto, existem números irracionais em $\mathbb{R}$ (mais que isto, estes formam a " maioria "), ou seja, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Corolário 1.5. *Seja I um intervalo não-degenerado. Então I é não-enumerável.*

Demonstração. Vamos provar, primeiramente, que $(-1, 1)$ é não-enumerável. Defina $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ por: $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Vê-se facilmente que f é inversível e que $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ é dada por: $g(y) = \dfrac{y}{1 - |y|}, \forall\, y \in (-1, 1)$. Como $\mathbb{R}$ é não-enumerável, então $(-1, 1)$ é não-enumerável. Agora, vamos provar que o intervlao (x, y) é não-enumerável. Seja $g : (-1, 1) \to (x, y)$ definida por: $g(z) = \dfrac{(y - x)z + x + y}{2}, \forall\, z \in (-1, 1)$. É fácil ver que, g é uma funcão bijetora. Logo, (x, y) é não-enumerável. Seja I um intervalo não-degenerado. Então, $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : (x, y) \subseteq I$. Como (x, y) é não-enumerável, então, I é não-enumerável. $\square$

Teorema 1.6 (Densidade de $\mathbb{Q}$)**.** *Todo intervalo não-degenerado contém um número racional e um número irracional.*

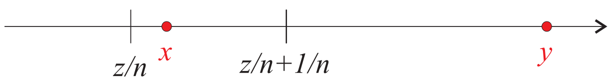

Figura 1.5: A distância de x a y é maior que $1/n$

Demonstração. Seja I um intervalo não-degenerado. Suponha que I não contém números irracionais. Assim, $I \subseteq \mathbb{Q}$. Mas, $\mathbb{Q}$ é enumerável. Portanto, I é enumerável. Mas, pelo corolário 1.5, I é não-enumerável. Assim sendo, I contém um irracional. Vamos provar que I contém um racional. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com $x < y$ e $[x, y] \subseteq I$. Pelo Teorema 1.2 $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, ou seja, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1}{y - x}$. Ou equivalentemente,

$y - x > \dfrac{1}{n}$. Observe que: $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left[\dfrac{z}{n}, \dfrac{z+1}{n}\right]$. Como $x \in \mathbb{R}$, então $\exists\ z \in \mathbb{Z}$ tal que $\dfrac{z}{n} \leq x \leq \dfrac{z+1}{n}$. Como $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $\dfrac{z}{n} < x < \dfrac{z+1}{n}$. Por outro lado, $y - x > \dfrac{1}{n}$, logo, $x < \dfrac{z+1}{n} < y$, pois $\left[\dfrac{z}{n}, \dfrac{z+1}{n}\right]$ tem comprimento $\dfrac{1}{n}$. Com isso, $\dfrac{z+1}{n} \in [x, y] \subseteq I$. Por fim, $\dfrac{z+1}{n} \in I$ e $\dfrac{z+1}{n} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Exercícios de Fixacão

1. Seja $X = \{1 - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\inf X$ e $\sup X$.

2. Mostre que $\sup\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

3. Seja $X = \{1/m - 1/n : n, m \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\inf X$ e $\sup X$.

4. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio. Mostre que $x \in \mathbb{R}$ é um limite supeiror de $X \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ e $y > x \Rightarrow y \notin X$.

5. Mostre que o corpo dos números reais é arquimediano, isto é, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $0 < x < y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nx > y$.

1.7 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar a relevância do resultado que garante a existência de números irracionais e racionais em qualquer intervalo não-degenerado, já que podemos diminuir o quanto desejarmos o comprimento do intervalo que ainda assim encontramos racional e irracional. Isto nos possibilita perguntar se é possível fazer um estudo no conjunto dos números reais de forma microscópica. Ou seja, podemos estudar o que ocorre próximo a um número real qualquer? A resposta é afirmativa e está exposta na aula 4.

1.8 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno algumas propriedades decorrentes das operacões elementares de adicão e multiplicacão com números reais. Como, por exemplo, existência de elementos neutros para estas duas operacões. Provamos também algumas desigualdades relevantes da teoria de módulo de um número real que serão utilizadas no decorrer do material. Além disso, estudamos a existência do supremo e ínfimo de um conjunto qualquer formado por números reais. Estes números são de vital importância, pois, no caso da não existência de um maior ou menor elemento em um conjunto, estes elementos os substituem, respectivamente.

1.9 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Prove que a união de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

2. Prove que o produto cartesiano de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

3. Prove que $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis.

4. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

5. Prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

6. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Prove que $|x - y| < z \Rightarrow |x| < |y| + z$.

7. Sejam $x, y > 0$. Prove que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$. Ou seja, a média geométrica nunca supera a média aritmética.

8. Sejam $x, y > 0$, racionais. Prove que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

9. Sejam $x \in \mathbb{Q}^*$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prove que $xy, x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dê exmplo de dois números x, y irracionais tais que $x + y, xy \in \mathbb{Q}$.

10. (Exemplo de Irracional) Prove que não existe racional cujo quadrado é 2.

11. Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, com $a^2 < 2 < b^2$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$ tais que $x < 1$, $x < \dfrac{2 - a^2}{2a + 1}$ e $y < \dfrac{b^2 - 2}{2b}$. Prove que $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$ e $b - y > 0$. Em seguida, considere o conjunto limitado $X = \{a > 0 : a^2 < 2\}$ e conclua que o número real $c = \sup X$ cumpre $c^2 = 2$, isto é, $c = \sqrt{2}$.

12. Prove que todo subconjunto finito $X \subseteq \mathbb{R}$ possui ínfimo e supremo.

13. Prove que ínfimo, supremo, mínimo, máximo de um conjunto, quando existem, são únicos.

14. Sejam $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios limitados. Prove que $\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y$.

15. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio limitado superiormente. Dado $a \geq 0$. Prove que aX é limitado superiormente e que $\sup(aX) = a \sup X$.

16. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados inferiormente. Prove que $X + Y$ é limitado inferiormente e que $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

17. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Seja $a < 0$. Prove que $\inf(aX) = a \sup X$.

18. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}_+$. Definamos $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$. Prove que se X e Y forem limitados então XY é limitado com $\sup(XY) = \sup X \sup Y$ e $\inf(XY) = \inf X \inf Y$.

19. Sejam $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios. Suponha que X é limitado superiormente e que, para cada $y \in Y$, $\exists\, x \in X$ tal que $y \leq x$. Prove que $\sup X = \sup Y$.

20. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma funcão $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada se $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso, definimos $\sup f := \sup f(X)$ e $\inf f := \inf f(X)$. Prove que:

ii. mostre que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$;

iii. considerando as funcões $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definidas por: $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, mostre que $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

1.10 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Sejam $0 < x < y$ números reais. Prove que $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Demonstração. Vamos provar, primeiramente, a seguinte afirmacão: seja $x > 0$ um número real. Então $x^{-1} > 0$. Com efeito, vimos que $1 = xx^{-1}$. Portanto, $x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$. Então, $x^{-1} > 0$ (ver definicão 1.2). Agora, provemos o **Ex**1. Se $0 < x < y$, então $x^{-1}, y^{-1} > 0$. Por monotonicidade e comutatividade, obtemos: $0 < x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1})$. Consequentemente, $0 < y^{-1} < x^{-1}$. □

Ex2. (Desigualdade de Bernoulli) Prove que $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall\, x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $X = \{n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx\}$. Vamos provar por inducão que $X = \mathbb{N}$. Note que $1 \in X$. De fato, $(1+x)^1 \geq 1+1x$. Suponha que, $n \in X$. Ou seja, $(1+x)^n \geq 1+nx$. Portanto, $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+x^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$, onde a primeira desigualdade é verdadeira porque $1+x \geq 0$. Isto mostra que, $n+1 \in X$. Por inducão, $X = \mathbb{N}$. Ou seja, $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Ex3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Seja $a < 0$. Prove que aX é limitado, que $\sup(aX) = a \inf X$.

Demonstração. De fato, existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq x \leq d$, $\forall\, x \in X$. Portanto, por monotonicidade (ver Teorema 1.1), $ad \leq ax \leq ac$, $\forall\, ax \in aX$, pois $a < 0$. Ou seja, aX é limitado. Analogamente, $ax \leq a \inf X$, $\forall\, ax \in aX$, pois $\inf X$ é cota inferior de X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < \inf X - \frac{\varepsilon}{a}$ (veja que $-\frac{\varepsilon}{a} > 0$). Portanto, $a \inf X - \varepsilon < ax$, com $ax \in aX$. Com isso, $\sup(aX) = a \inf X$. □

Ex4. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma funcão $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada se $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso, definimos $\sup f := \sup f(X)$. Prove que:

i. a soma $f+g : X \to \mathbb{R}$ de duas funcões limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma funcão limitada;

Demonstração. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funcões limitadas. Assim, $f(X), g(X) \subseteq \mathbb{R}$ são conjuntos limitados. Logo, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq f(x) \leq b$ e $c \leq g(x) \leq d$, $\forall\, x \in X$. Portanto, $a+c \leq f(x)+g(x) \leq b+d$, $\forall\, x \in X$. Isto nos diz que $f(X)+g(X)$ é limitado. Por definicão, $f+g$ é uma funcão limitada. □

ii. Mostre que $(f+g)(X) \subseteq f(X)+g(X)$. Conclua que $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$;

Demonstração. Seja $a \in (f+g)(X)$. Assim, $a \in (f+g)(X) \Rightarrow a = (f+g)(x) = f(x)+g(x) \in f(X)+g(X), x \in X$. Logo, $a \in f(X)+g(X)$. Ou seja, $(f+g)(X) \subseteq f(X)+g(X)$. Usando os Exercícios Propostos, concluímos que: $\sup(f+g) := \sup(f+g)(X) \leq \sup f(X) + \sup g(X) =: \sup f + \sup g$. Analogamente, $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$. □

Ex5. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados tais que $x \leq y$, $\forall\, x \in X, y \in Y$. Prove que $\sup X \leq \inf Y$. Além disso, prove que $\sup X = \inf Y \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \in X, y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Demonstração. A definicão 1.11 nos permite concluir que $\sup X \leq y, \; \forall \; y \in Y$. Utilizando a definicão 1.12, concluímos que: $\sup X \leq \inf Y$. Vamos, agora, provar a equivalência enunciada.

$\Rightarrow$) Suponha que $\sup X = \inf Y$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos que existem $x \in X, y \in Y$ tais que $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x$ e $y < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2}$. Com isso, $y - x < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2} - \sup X + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Suponha, por contraposicão, que $\sup X < \inf Y$. Seja $\varepsilon = \inf Y - \sup X > 0$. Lembre que, $x \leq \sup X$ e $\inf Y \leq y, \; \forall \; x \in X, y \in Y$. Daí, $y - x \geq \inf Y - \sup X = \varepsilon, \; \forall \; x \in X, y \in Y$. Isto conclui a prova. $\square$

Auto-Avaliacão

Sou capaz de utilizar as propriedades das operacões elementares, do módulo e encontrar ínfimo e supremo de conjuntos limitados em $\mathbb{R}$?

Próxima Aula

Caro aluno, utilizaremos os conceitos e resultados obtidos sobre módulo e ordem em $\mathbb{R}$ para na aula seguinte definirmos sequências de números reais.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Ferreira, J., *A Construção dos Números*, Primeira Edicão, Rio de Janeiro, SBM, 2010. 133p.

[3] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edicão, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[4] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edicão, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Goncalves Melo