Capítulo 2

Sequência de Números Reais

Aula 2: Sequências de Números Reais

Meta

Apresentar os conceitos, propriedades e resultados de limites de sequências de números reais.

Objetivos

Ao final desta aula o aluno deverá saber decidir se uma sequência, formada por números reais, converge. Neste caso, se possível, encontrar o limite da sequência. Além disso, o aluno deve utilizar corretamente alguns resultados de extrema relevância, como, por exemplo, os Teoremas do Sanduíche e da Monotonicidade nas atividades propostas no decorrer da aula.

Pré-requisitos

Aula 1, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

2.1 Introdução

Olá, nesta aula, convidamos ao caro aluno a mergulhar no estudo das sequências de números reais. A partir deste momento, estamos interessados em saber se elementos reais, em uma quantidade enumerável, estão tão próximos de um número real quanto almejarmos. Estes elementos denotarão o que denominamos sequência e a esta proximidade daremos o nome de convergência da sequência. Vamos provar que a convergência ocorre em alguns casos, mostrando algumas condições necessárias e outras suficientes para que este fato seja consumado. Em Matemática a ferramenta de convergência de uma sequência, descrita em palavras acima, serve também para que possamos obter informações sobre o valor ao qual uma sequência converge, a partir das características dos termos desta sequência. Ao aluno interessado em aplicações, esta aula traz conteúdos que têm aplicações diretas em Equações Diferenciais Ordinárias e Parcias (ver [2]). Estabeleceremos, também nesta aula a idéia de quando uma sequência de números reais possue uma quantidade infinita de termos tão grandes quanto quisermos ou tão pequenos como for desejado. Ao aluno interessado em prossegir estudando Matemática, além da graduação, garantimos que esta aula estará no cotidiano dos alunos que escolherem o belo caminho da Análise Matemática.

2.2 Limite de Sequência

Definição 2.1 (Sequência)**.** Uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $x(n) = x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, é denominada uma sequência de números reias. Neste caso, a imagem x_n de um dado número $n \in \mathbb{N}$ é chamada n-ésimo termo da sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denotaremos esta sequência por: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n) (quando não houver possibilidade de confusão).

Obs 2.1. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. Observe a diferença entre a imagem da sequência e a própria sequência. Vejamos um exemplo. Considere a sequência $(x_n) = (0, 0, ..., 0, ...)$. esta difere de sua imagem, a qual é dada através do conjunto $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{0\}$.

Obs 2.2. Observe que, por igualdade de funções, duas sequências $(x_n), (y_n)$ são iguais se $x_n = y_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Duas sequências podem ter a mesma imagem, mas serem distintas. De fato, considere as sequências $(x_n) = (1, 2, 1, 2, ...)$ e $(y_n) = (2, 1, 2, 1, ...)$. Estas sequências são distintas, pois $x_1 = 1$ e $y_1 = 2$ são diferentes. Por outro lado, $x(\mathbb{N}) = y(\mathbb{N}) = \{1, 2\}$.

Definição 2.2. Uma sequência (x_n) é dita limitada inferiormente (respectivamente limitada superiormente) se o conjunto imagem $x(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto limitado inferiormente (respectivamente limitado superiormente).

Obs 2.3. Usando a definição 1.9, podemos concluir que uma sequência (x_n) é limitada inferiormente (respectivamente limitada superiormente) se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $\exists\ d \in \mathbb{R} : x_n \leq d, \forall\ n \in \mathbb{N}$).

Exemplo 2.1. Pelo exemplo 1.5, a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferior e superiormente.

Exemplo 2.2. A sequência $x = (2^n)$ é uma sequência limitada inferiormente, mas não superiormente. Com efeito, por indução, $2 \leq 2^n, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Portanto, x é limitada inferiormente por 2. Usando a Desigualdade de Bernoulli (ver lista de exercícios resolvidos de números reais), obtemos: $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n1 = 1 + n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $2^n \geq 1 + n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.2, dado $c \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < m$. Portanto, $c < 1 + m \leq 2^m$. Dessa forma x é ilimitada superiormente.

Definição 2.3 (Sequência Limitada)**.** Dizemos que uma sequência é limitada se esta é limitada inferior e superiormente.

Obs 2.4. A observação 2.3 nos diz que uma sequência é limitada se existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq x_n \leq d, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\exists\ M = \max\{|c|, |d|\} \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

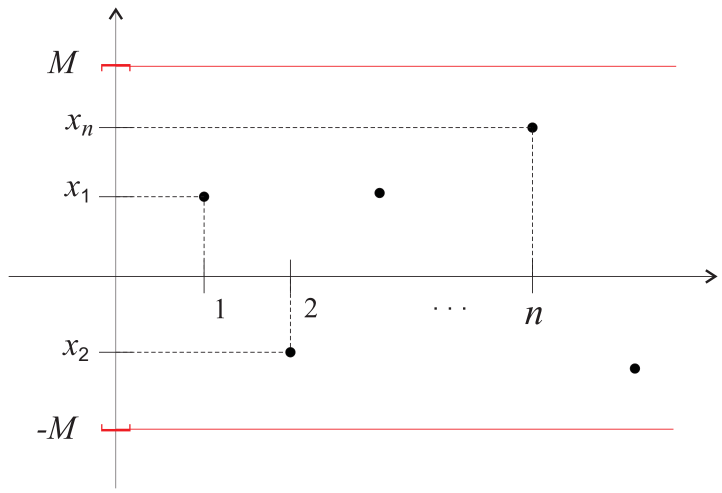

Figura 2.1: Sequência limitada

Exemplo 2.3. A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Por outro lado, a sequência (2^n) é ilimitada.

Definição 2.4 (Subsequência)**.** Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Uma restrição $y = x|_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$ de x, onde $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ é um conjunto infinito, é denominada subsequência de x. Denotaremos a subsequência y por: $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, ou (x_{n_k}) (caso não haja possibilidide de confusão).

Exemplo 2.4. $(2n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 4, 6, ..., 2n, ...)$ é uma subsequência da sequência $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, ..., n, ...)$. Por outro lado $(3, 1, 2, ...)$ não é uma subsequência desta mesma sequência.

Definição 2.5 (Limite de Sequência)**.** Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que o limite de x_n é $x \in \mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Neste caso, escreveremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ou $\lim x_n = x$, ou $x_n \to x$. É comum dizermos, nestas condições, que x_n tende para x.

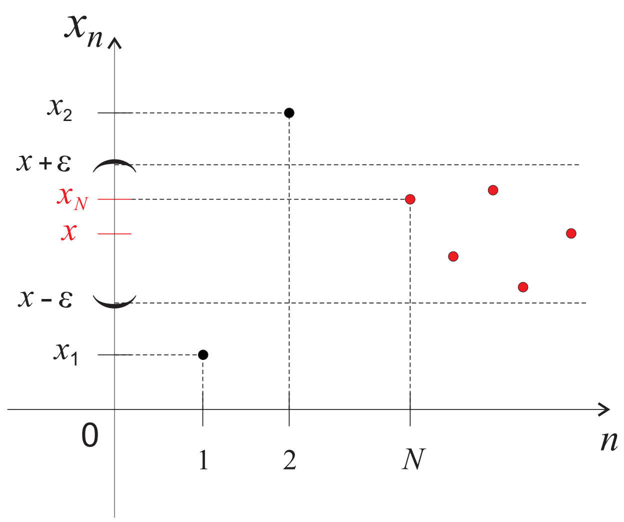

Figura 2.2: $\lim x_n = x$

Obs 2.5. O número N encontrado depende, somente, do ε dado. Ou seja, $N = N(\varepsilon)$.

Obs 2.6. Usando a observação 1.11, temos que: $\lim x_n = x \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $|x_n - x| < \varepsilon$.

Obs 2.7. Segue diretamente da definição 2.5 que: $\lim x_n = x \Leftrightarrow \lim(x_n - x) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - x| = 0$.

Obs 2.8. Observe que: $\lim x_n = x \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que todos x_n's $\in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, exceto, possivelmente, $x_0, x_1, ..., x_{N-1}$.

Definição 2.6 (Sequência Convergente)**.** Se $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$, então dizemos que (x_n) é uma sequência convergente e converge para x. Caso contrário, (x_n) é dita divergente.

Exemplo 2.5 (Limite da Constante)**.** Considre a sequência constante (x_n). Isto é, $x_n = c$ =constante, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, temos que $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, $\forall\ n \geq 1$. Neste caso, $N = 1 \in \mathbb{N}$. Dessa forma, toda sequência $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ constante é convergente e converge para c.

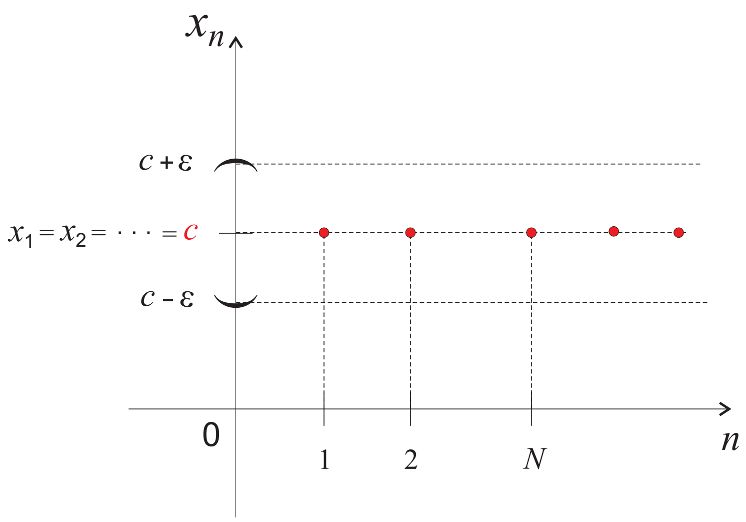

Figura 2.3: $\lim c = c$ =constante

Exemplo 2.6. Considere a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Afirmamos que $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 1.2, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\varepsilon} < N$. Portanto, $\forall\ n \geq N$, obtemos: $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$.

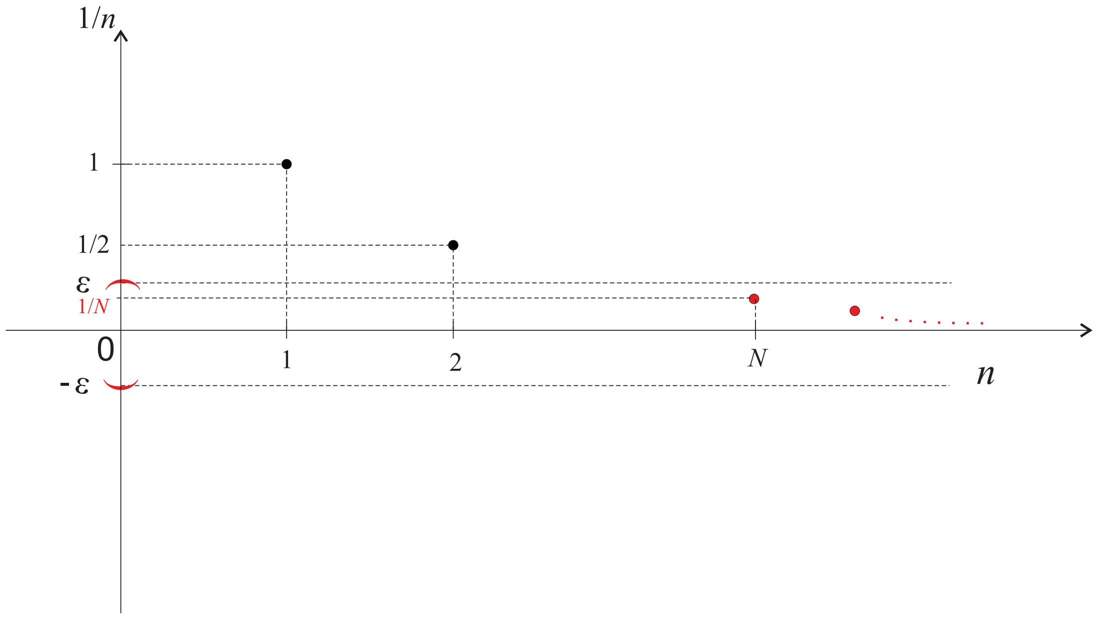

Figura 2.4: $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

No decorrer da seção daremos exemplos de sequências divergentes.

Teorema 2.1 (Unicidade de Limite)**.** *O limite de uma sequência convergente é único.*

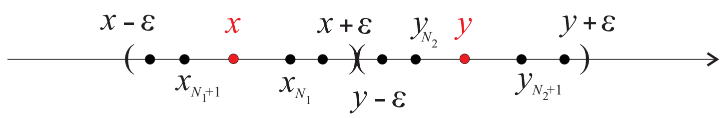

Figura 2.5: Idéia da demonstração

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente. Suponha, por absurdo, que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, com $x \neq y$. Sem perda de generalidade, considere que $x < y$. Seja $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2} > 0$. Assim, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que: $\forall\ n \geq N_1$, tem-se

$$x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

e $\forall\ n \geq N_2$, conclui-se

$$x_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

Seja $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Então, $\forall\ n \geq N_0 \geq N_1, N_2$, tem-se $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Por outro lado, $x + \varepsilon = x + \dfrac{y-x}{2} = \dfrac{y+x}{2} = y - \dfrac{y-x}{2} = y - \varepsilon$. Portanto, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon) = \emptyset$. Isto é um absurdo. Dessa forma, o limite é único. $\square$

Teorema 2.2. *Seja (x_n) uma sequência convergente, com $\lim x_n = x$. Então, toda subsequência de (x_n) é convergente e converge para x.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos provar que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} x_n = x$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Como $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ é infinito, então $\exists\ N' \in \mathbb{N}'$ tal que $N' > N$ (ver exercícios propostos em números reais). Portanto, $\forall\ n' \geq N' > N$, com $n' \in \mathbb{N}'$, tem-se $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Ou seja, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} x_n = x$. $\square$

Obs 2.9. O Teorema 2.2 nos dá condições para provar que uma determinada sequência diverge. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.7. A sequência $(1, 3, 1, 3, ...)$ é divergente porque possui as subsequências $(1, 1, ..., 1, ...)$ e $(3, 3, ..., 3)$ constantes, além disso estas convergem para os valores distintos 1 e 3, respectivamente (ver exemplo 2.5). Pelo Teorema 2.2, a sequência $(1, 3, 1, 3, ...)$ diverge.

Proposição 2.1. *Sejam (x_n) uma sequência e $p \in \mathbb{N}$. Então $\lim x_n = x \Leftrightarrow \lim x_{n+p} = x$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Observe que (x_{n+p}) é uma subsequência de (x_n). Logo, se $\lim x_n = x$, então, usando o Teorema 2.2, $\lim x_{n+p} = x$.
$\Leftarrow$) Suponha que $\lim x_{n+p} = x$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N' \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N'$, tem-se $x_{n+p} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Seja $N = N' + p \in \mathbb{N}$. Com isso, $\forall\ n \geq N$, tem-se que $n \geq N' + p$. Ou seja, $n - p \geq N'$. Portanto, $x_n = x_{(n-p)+p} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Isto nos diz que, $\lim x_n = x$. $\square$

Teorema 2.3 (Teorema da Divergência)**.** *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, com $\lim x_n = x$. Seja $\varepsilon = 1 > 0$. Assim, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \in (x-1, x+1)$. Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $-d < x - 1$ e $x + 1 < d$. Assim sendo, $x_n \in (-d, d)$, $\forall\ n \geq N$. Ou seja, $|x_n| < d$, $\forall\ n \geq N$. Seja $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, d\}$. Dessa forma, $|x_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Por fim, (x_n) é limitada. $\square$

Obs 2.10. A recíproca do Teorema 2.3 é falsa. De fato, considere a sequência $(1, 3, 1, 3, ...)$ limitada, a qual é divergente, basta rever o exemplo 2.7.

Exemplo 2.8. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Veja que esta sequência é ilimitada, pois $x(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ é ilimitado pelo Teorema 1.2. Logo, usando o Teorema 2.3, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Vejamos que condições devemos acrescentar a uma sequência para que a recíproca do Teorema 2.3 seja válida.

Definição 2.7 (Sequência Não-decrescente)**.** Dizemos que uma sequência (x_n) é não-decrescente (respectivamente crescente) se $x_n \leq x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_n < x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$).

Definição 2.8 (Sequência Não-crescente)**.** Uma sequência (x_n) é dita não-crescente (respectivamente decrescente) se $x_{n+1} \leq x_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_{n+1} < x_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$).

Definição 2.9 (Sequência Monótona)**.** Uma sequência é dita monótona se satisfaz uma das propriedades estabelecidas nas definições 2.7 e 2.8.

Exemplo 2.9. A sequência $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita monótona crescente e não-decrescente. A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente e não-crescente. $(1, 1, ..., 1, ...)$ é monótona não-decrescente e não-crescente. Já a sequência $(1, 3, 1, 3, ...)$ não é monótona.

A definição de monotonicidade de sequência é o ingrediente a ser acrescentado para obter a recíproca do Teorema 2.3. Isto está formalmente enunciado no seguinte

Teorema 2.4 (Teorema da Monotonicidade)**.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja $x = (x_n)$ uma sequência monótona não-crescente limitada. Como x é limitada então, pela definição 2.3, $x(\mathbb{N})$ é limitado. Pela completeza de $\mathbb{R}$, existe $y = \inf x(\mathbb{N})$. Vamos provar que $\lim x_n = y$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N < y + \varepsilon$ (ver definição 1.12). Como x é uma sequência não-crescente, logo, $\forall\ n \geq N$, temos que $y - \varepsilon < y \leq x_n \leq x_N < y + \varepsilon$. Ou seja, $x_n \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, $\forall\ n \geq N$. Portanto, $\lim x_n = y$. Isto prova o resultado. $\square$

Obs 2.11. Na prova do Teorema 2.4, pode considerar que a sequência é monótona não-decrescente, e com isso, prova-se, analogamente, que $y = \sup x(\mathbb{N})$.

Exemplo 2.10. A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ monótona decrescente, então, usando o Teorema 2.4, temos que $\lim \dfrac{1}{n} = \inf \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$ (ver exemplo 1.5). Veja que, esta é outra maneira de verificar a convergência desta sequência (ver exemplo 2.6).

Para o próximo Teorema precisaremos da seguinte

Definição 2.10. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que x_n é destacado da sequência (x_n) se $x_p \leq x_n$, $\forall\, p > n$.

Exemplo 2.11. Considere a sequência $(x_n) = (1, 2, 7, 4, 7, 2, 2, ..., 2, ...)$. Veja que $x_1 = 1$ não é destacado, pois $2 = x_2 > x_1 = 1$. Mas, $x_3 = 7$ é destacado porque todo termo da sequência a partir deste termo é menor ou igual a 7.

Teorema 2.5 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $x = (x_n)$ uma sequência limitada. Seja $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \text{ é destacado}\} \subseteq \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ é enumerável, então $D(x)$ também é. Suponha que $D(x)$ é infinito. Daí, $D(x) = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$. Considere a subsequência $x' = (x_n)_{n \in D(x)}$ de x. Como x é uma sequência limitada, então x' também é. Observe que para todo $n \in D(x)$, ou seja, x_n é destacado, pode-se concluir que: $x_{n+1} \leq x_n$ (basta utilizar a definição 2.10). Assim x' é uma sequência monótona não-crescente. Pelo Teorema 2.4, concluímos que x' é convergente. Agora, se $D(x)$ é finito, então, $D(x) = \{N_1, N_2, ..., N_k\}$. Seja $n_1 > \max\{N_1, N_2, ..., N_k\}$ natural. Logo, $n_1 \notin D(x)$. Ou seja, x_{n_1} não é destacado. Dessa forma, $\exists\, n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$ (ver definição 2.10). Por outro lado, $n_2 > n_1 > N_i$, $\forall\, i = 1, 2, ..., k$. Analogamente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} < x_{n_3}$. Portanto, indutivamente, $x'' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uma subsequência de x tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < ... < x_{n_j} < ...$, onde $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_j < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Ou seja, x'' é uma sequência monótona crescente. Pelo mesmo motivo que x', x'' é limitada. Por fim, x'' é uma subsequência de x convergente, pelo Teorema 2.4. □

Exercícios de Fixação

1. A sequência (x_n) é definida pelas seguintes fórmulas para o n-ésimo termo. Escreva os primeiros 5 termos nestes casos:

i) $x_n = 1 + (-1)^n$;

ii) $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;

iii) $x_n = \dfrac{1}{n^2 + 2}$.

2. Os primeiros termos de uma sequência (x_n) são dados abaixo. Assumindo que os outros termos estabelecem a mesma lei estabelecida por estes termos, encontre a fórmula para o n-ésimo termo x_n.

i) $5, 7, 9, ...;$

ii) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...;$

iii) $1, 4, 9, 16, ...$

3. Liste os primeiros 5 termos das seguintes sequências definidas indutivamente.

i) $x_1 = 1, x_{n+1} = 3x_n + 1;$

ii) $x_1 = 2, x_{n+1} = 1/2(x_n + 2/x_n);$

iii) $x_1 = 3, x_2 = 5, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}.$

4. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim \dfrac{x}{n} = 0$.

5. Usando a definição de limites, mostre os seguintes limites:

i) $\lim \dfrac{n}{n^2+1} = 0;$

ii) $\lim \dfrac{3n+1}{2n+5} = \dfrac{3}{2};$

iii) $\lim \dfrac{2n}{n+1} = 2.$

6. Seja $x_1 = 8$, $x_{n+1} = (1/2)x_n + 2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é monótona e limitada. Encontre seu limite.

7. Seja $x_1 > 1$, $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é monótona e limitada. Encontre seu limite.

8. Seja $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é monótona e limitada. Encontre seu limite.

9. Seja $x_1 = \sqrt{p}$, $x_{n+1} = \sqrt{p + x_n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é monótona e limitada. Encontre seu limite. **Sugestão**: Um limite superior é $1 + 2\sqrt{p}$.

10. Seja (x_n) uma sequência limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $a_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ e $b_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Prove que (a_n) e (b_n) são sequências monótonas e limitadas. Prove que, se $\lim a_n = \lim b_n$ então (x_n) é convergente. $\lim a_n$ e $\lim b_n$ são chamados limites superior e inferior de (x_n), respectivamente.

11. Dê um exemplo de uma sequência ilimitada que tem uma subsequência convergente.

12. Mostre que as seguintes sequências são divergentes:

i) $(1 - (-1)^n + 1/n)$;

ii) $(\text{sen}(n\pi/4))$.

13. Suponha que cada subsequência de uma sequência (x_n) tem uma subsequência que converge para 0. Mostre que $\lim x_n = 0$.

14. Suponha que $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e que $\lim(-1)^n x_n$ existe. Mostre que (x_n) converge.

15. Mostre que se (x_n) é uma sequência ilimitada, então existe uma subsequência de (x_n) que converge para 0.

2.3 Propriedades de Limites de Sequências

Teorema 2.6. *Seja (x_n) uma sequência convergente. Se $\lim x_n < x$, então $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $x_n < x$.*

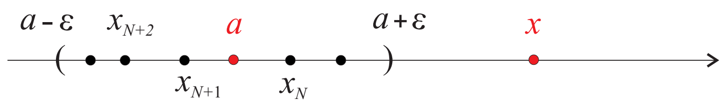

Figura 2.6: Idéia da demonstração

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado $0 < \varepsilon < x - a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (a - x + a, a + x - a) = (2a - x, x)$, pois $x - a > 0$. Ou seja, $x_n < x$, $\forall\, n \geq N$. □

Obs 2.12. Em alguns textos, diz-se " para n suficientemente grande"quando se escreve " $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$". Assim, o Teorema 2.6 pode ser reescrito da seguinte maneira: Seja (x_n) uma sequência convergente. Se $\lim x_n < x$, então para n suficientemente grande, tem-se $x_n < x$.

Obs 2.13. A afirmação, Seja (x_n) uma sequência convergente. Se $\lim x_n > x$, então $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $x_n > x$, pode ser provada de maneira análoga a do Teorema 2.6.

Corolário 2.7 (Permanência de Sinal). *Seja* (x_n) *uma sequência convergente. Se* $\lim x_n < 0$ *(respectivamente* $\lim x_n > 0$*), então* $\exists\ N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n \geq N$*, tem-se* $x_n < 0$ *(respectivamente* $x_n > 0$*).*

Demonstração. Use o Teorema 2.6 e a observação 2.13 com $x = 0$. $\square$

Corolário 2.8. *Sejam* $(x_n), (y_n)$ *sequências convergentes. Suponha que,* $\exists\ N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n \geq N$*, tenha-se* $x_n \leq y_n$*. Então,* $\lim x_n \leq \lim y_n$*.*

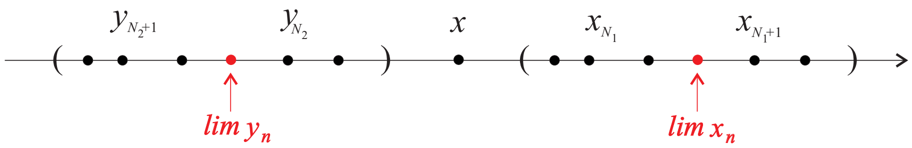

Figura 2.7: Idéia da demonstração

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\lim x_n > \lim y_n$. Usando o Teorema 1.6, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que: $\lim x_n > x > \lim y_n$. O Teorema 2.6 e a observação 2.13, nos garante que existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall\ n \geq N_1, \text{ tem-se } x_n > x \text{ e } \forall\ n \geq N_2, \text{ tem-se } y_n < x.$$

Seja $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Assim sendo, $\forall\ n \geq N_3$, tem-se $x_n > x > y_n$. Por hipótese, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \leq y_n$. Agora, considere $N_0 = \max\{N, N_3\}$. Portanto, $\forall\ n \geq N_0$, tem-se $x_n > y_n$ e $x_n \leq y_n$. Isto é um absurdo. Então, $\lim x_n \leq \lim y_n$. $\square$

Exemplo 2.12. Sejam $(x_n) = (0)$ e $(y_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$. Vimos que $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Mesmo sendo, $x_n = 0 < \dfrac{1}{n} = y_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Ou seja, no corolário 2.8, não podemos afirmar que $x_n < y_n \Rightarrow \lim x_n < \lim y_n$.

Obs 2.14. Se $x_n \leq x$ para todo n suficientemente grande, então $\lim x_n \leq x$. Basta, no corolário 2.8, assumir $y_n = x$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.9 (Teorema do Sanduíche)**.** *Sejam* $(x_n), (y_n)$ *sequências convergentes, com* $\lim x_n = \lim y_n = z$*. Se* $\exists\ N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n \geq N$*, tenha-se* $x_n \leq z_n \leq y_n$*. Então,* (z_n) *é uma sequência convergente e* $\lim z_n = z$*.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, vamos provar que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N_0$, tem-se $z_n \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. Mas, como $\lim x_n = \lim y_n = z$, então existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall\ n \geq N_1,\ \text{tem-se } x_n \in (z-\varepsilon, z+\varepsilon) \text{ e } \forall\ n \geq N_2,\ \text{tem-se } y_n \in (z-\varepsilon, z+\varepsilon).$$

Ou seja,

$$\forall\ n \geq N_1,\ \text{tem-se } z-\varepsilon < x_n < z+\varepsilon \text{ e } \forall\ n \geq N_2,\ \text{tem-se } z-\varepsilon < y_n < z+\varepsilon.$$

Seja $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Logo, $\forall\ n \geq N_3$, tem-se $z-\varepsilon < x_n < z+\varepsilon$ e $z-\varepsilon < y_n < z+\varepsilon$. Por outro lado, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \leq z_n \leq y_n$. Considere $N_0 = \max\{N, N_3\}$. Com isso, $\forall\ n \geq N_0$, tem-se $z-\varepsilon < x_n < z+\varepsilon, z-\varepsilon < y_n < z+\varepsilon$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$. Desa forma, $\forall\ n \geq N_0$, tem-se $z-\varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < z+\varepsilon$. Ou seja, $\forall\ n \geq N_0$, tem-se $z-\varepsilon < z_n < z+\varepsilon$. Isto nos diz que: $\forall\ n \geq N_0$, tem-se $z_n \in (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$. Por fim, (z_n) é convergente e $\lim z_n = z$. $\square$

Exemplo 2.13. Observe que $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então, utilizando o Teorema 5.4, temos que $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, pois $\lim \frac{1}{n} = \lim -\frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 2.14. Olhe que $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, portanto, usando o Teorema 5.4, obtemos que $\lim \frac{1}{2^n} = 0$, pois $\lim \frac{1}{n} = \lim 0 = 0$.

Teorema 2.10. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *uma sequência convergente e uma sequência limitada, respectivamente, onde* $\lim x_n = 0$*. Então* $(x_n y_n)$ *é convergente e* $\lim x_n y_n = 0$*.*

Demonstração. Como (y_n) é uma sequência limitada, então existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $|y_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Se $M = 0$, então $|y_n| \leq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $y_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim $(x_n y_n) = (0)$, a qual converge para 0. Considere, então, que $M > 0$. Como $\lim x_n = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. Com isso, $\forall\ n \geq N$ tem-se $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$. Portanto $(x_n y_n)$ é uma sequência convergente e $\lim x_n y_n = 0$. $\square$

Obs 2.15. A hipótese de (y_n) ser limitada não pode ser retirada do Teorema 2.10. Vejamos um exemplo que comprovam esta afirmação. Sejam $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = (n)$. Vimos que $\lim x_n = 0$ (ver exemplo 2.6) e que (y_n) não é limitada. Observe que $(x_n y_n) = (1)$. Logo, $\lim x_n y_n = 1 \neq 0$.

Exemplo 2.15. Sejam $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = (\cos(n\pi/2))$. Note que (y_n) é limitada, pois $|\cos(n\pi/2)| \leq 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. Logo, usando o Teorema 2.10, concluímos que $\lim \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n} = 0$. É importante ressaltar que (y_n) não é convergente, pois possui duas subsequências constante que convergem para valores distintos (ver exemplo 2.7).

Exercícios de Fixação

1. Mostre que $\lim \dfrac{\cos(2n)}{1+n} = 0$.

2. Mostre que $\lim \dfrac{\cos^2(n)}{2^n} = 0$. Use que $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$.

3. Mostre que $\lim \dfrac{e^{\cos(n)}}{n} = 0$ (ver definição 10.2). Use que e^x é crescente (ver definição 10.2).

2.4 Operações com Limites de Sequências

Teorema 2.11 (Operações com Limites)**.** *Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

i) $(x_n + y_n)$ *converge e* $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$*;*

ii) $(x_n y_n)$ *converge e* $\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$*;*

iii) $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ *converge e* $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$*, se* $\lim y_n \neq 0$.

Demonstração. Considere que $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$.
i) Dado $\varepsilon > 0$, exitem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall\ n \geq N_1,\ \text{tem-se } x_n \in \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ e } \forall\ n \geq N_2,\ \text{tem-se } y_n \in \left(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então $\forall\, n \geq N$, tem-se $x - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x + \frac{\varepsilon}{2}$ e $y - \frac{\varepsilon}{2} < y_n < y + \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, somando estes resultados, obtemos $\forall\, n \geq N$, que, $x+y-\varepsilon < x_n+y_n < x+y+\varepsilon$. Ou seja, $\forall\, n \geq N$, tem-se, $x_n+y_n \in (x+y-\varepsilon, x+y+\varepsilon)$. Isto nos diz que (x_n+y_n) converge e $\lim(x_n + y_n) = x + y = \lim x_n + \lim y_n$.

ii) Note que:

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x y_n + x y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim y_n = y$, então (y_n) é uma sequência limitada (ver Teorema 2.3). Por outro lado, $\lim(x_n - x) = 0$, $\lim(y_n - y) = 0$ e (x) é limitada (constante). Logo, pelo Teorema 2.10 e por **i**), temos que $\lim(x_n y_n - xy) = 0$. Ou seja, $\lim x_n y_n = xy = \lim x_n \cdot \lim y_n$.

iii) Primeiramente, vamos provar que $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$, onde $y \neq 0$. Considere $y > 0$. Seja $\varepsilon = \frac{y}{2} > 0$. Como $\lim y_n = y$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N_1$, tem-se $y_n \in (y - \frac{y}{2}, y + \frac{y}{2})$. Assim sendo, $\forall\, n \geq N_1$, tem-se $0 < \frac{y}{2} = y - \frac{y}{2} < y_n$. Portanto, $\frac{1}{y_n} < \frac{2}{y}$., $\forall\, n \geq N_1$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N_2$, tem-se $|y_n - y| < \frac{y^2\varepsilon}{2}$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Com isso, $\forall\, n \geq N$, tem-se

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y y_n}\right| = \frac{|y - y_n|}{y y_n} < \frac{2y^2\varepsilon}{2y^2} = \varepsilon.$$

Isto nos permite concluir que $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$. Analogamente, o resultado é válido para $y < 0$. Usando o item **ii**), obtemos: $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ converge e $\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim \left(x_n \frac{1}{y_n}\right) = \lim x_n \cdot \lim \frac{1}{y_n} = x\frac{1}{y} = \frac{x}{y} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$, se $y = \lim y_n \neq 0$. □

Obs 2.16. Note que o item **i)** do Teorema 2.11 pode ser generalizado para uma quantidade finita qualquer de parcelas, basta utilizar indução. O mesmo podemos afirmar sobre a multiplicação.

Obs 2.17. Observe que o item **ii)** do Teorema 2.11, nos garante que se (x_n) é convergente então, (cx_n) é convergente e $\lim cx_n = \lim c \cdot \lim x_n = c \lim x_n$ (ver exemplo 2.5).

Obs 2.18. Veja que usando o Teorema 2.11 podemos garantir que, se (x_n) e (y_n) são convergentes, então $(x_n - y_n)$ é convergente e $\lim(x_n - y_n) = \lim[x_n + (-y_n)] = \lim x_n + \lim(-1 \cdot y_n) = \lim x_n + (-1) \lim y_n = \lim x_n - \lim y_n$.

Obs 2.19. Observe que a hipótese de (x_n) ser convergente no Teorema 2.11 não pode ser retirada. Por exemplo, seja $(x_n) = (n)$ e $(y_n) = (1)$. Como $(x_n) = (n)$ é ilimitada, então esta sequência é divergente (ver Teorem 2.3). Porém, $\lim(x_n + y_n) = \lim(n + 1)$. Mas, $(n + 1)$, pelo mesmo motivo que (n), é divergente.

Exemplo 2.16. Usando o Teorema 2.11, podemos concluir que: $\lim \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = \lim 1 + \lim \dfrac{2}{n} = \lim 1 + 2 \lim \dfrac{1}{n} = 1 + 2 \cdot 0 = 1$, pois $(1), (2)$ e $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ são sequências convergentes (ver exemplos 2.5 e 2.6).

Exemplo 2.17. Note que, usando o Teorema 2.11, concluímos que $\lim \dfrac{n+5}{1-n} = \lim \dfrac{1 + \frac{5}{n}}{\frac{1}{n} - 1} = -1$ (ver exemplo 2.6). Ou seja, a sequência $\left(\dfrac{n+5}{1-n}\right)$ é uma sequência convergente que converge para -1.

Vejamos alguns exemplos de limites de sequências importantes. Primeiramente, a

Proposição 2.2 (Teste da Razão)**.** *Seja* $(x_n) \subseteq \mathbb{R}_+$. *Se* $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x < 1$, *então* $\lim x_n = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.6, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a < 1$. Usando o Teorema 2.6, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $0 < \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < a < 1$. Portanto, por monotonicidade $0 < x_{n+1} < ax_n < x_n$, $\forall\ n \geq N$. Dessa forma, $0 < x_{n+1} < x_n < x_N$, $\forall\ n \geq N$. Ou seja, (x_n) é monótona e limitada, $\forall\ n \geq N$. Isto nos diz que (x_n) converge (ver Proposição 2.1), digamos que $\lim x_n = y$. Com isso, $0 \leq \lim x_{n+1} \leq a \lim x_n \leq \lim x_n$. Portanto, $0 \leq y \leq ay \leq y$. Ou seja, $y(a - 1) = 0$. Como $a < 1$, então $\lim x_n = y = 0$. $\square$

Obs 2.20. $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ nada pode ser afirmado sobre a convergência da sequência (x_n). Por exemplo, se $x_n = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \dfrac{1}{1} = 1$. Sabemos que esta sequência é convergente (ver exemplo 2.5). Por outro lado, seja $x_n = n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim, $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \dfrac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$ (ver exemplo 2.6). Mas, (n) é uma sequência divergente (ver Teorema 2.3).

Exemplo 2.18. Veja que $\lim \dfrac{n^m}{c^n} = \lim \dfrac{c^n}{n!} = \lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $c > 1$. Vamos utilizar o Teste da razão para verificar estes limites. Seja $x_n = \dfrac{n^m}{c^n}$, então: $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \dfrac{(n+1)^m}{c^{n+1}} \cdot \dfrac{c^n}{n^m} = \lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m}{c} = \dfrac{1^m}{c} = \dfrac{1}{c} < 1$. Portanto, $\lim x_n = 0$. Ou seja, $\lim \dfrac{n^m}{c^n} = 0$. Seja $y_n = \dfrac{c^n}{n!}$. Assim sendo, $\lim \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{c^n} = \lim \dfrac{c}{(n+1)} = c \lim \dfrac{1}{(n+1)} = c \cdot 0 = 0 < 1$. (ver Teorema 2.2). Com isso, $\lim y_n = 0$. Isto é, $\lim \dfrac{c^n}{n!} = 0$. Por fim, seja $z_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Logo, $\lim \dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \lim \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} = \lim \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e} < 1$, onde e é o número de Euller e $e \approx 2,71$.

Exemplo 2.19. Considere a sequência (x^n), com $0 < x < 1$. Assim, $\lim \dfrac{x^{n+1}}{x^n} = \lim x = x < 1$. Utilizando a Proposição 2.2, concluímos que $\lim x^n = 0$, se $0 < x < 1$.

Proposição 2.3 (Teste da Razão). *Seja* $(x_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ *uma sequência. Se* $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x > 1$, *então* (x_n) *é ilimitada.*

Demonstração. Suponha que $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x > 1$. Defina $y_n = 1/x_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \dfrac{1/x_{n+1}}{1/x_n} = \dfrac{1}{\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}} = 1/x < 1$. Pela Proposição 2.2, $\lim \dfrac{1}{x_n} = \lim y_n = 0$. Logo, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, tem-se $\dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{A}$. Consequentemente, $x_N > A$. Ou seja, (x_n) é ilimitada. $\square$

Obs 2.21. Observe que podemos concluir na Proposição 2.3 que (x_n) é divergente, basta utilizar a contrapositiva do Teorema 2.3.

Exemplo 2.20. Considere a sequência (x^n), onde $x > 1$. Com isso, $\lim \dfrac{x^{n+1}}{x^n} = \lim x = x > 1$. Pela Proposição 2.3, (x^n) é ilimitada. Consequentemente, (x^n) é divergente.

Exercícios de Fixação

1. Dê um exemplo de duas sequências divergentes (x_n) e (y_n) tais que $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ sejam convergentes.

2. Mostre que se (x_n) e $(x_n + y_n)$ são sequências convergentes, então (y_n) é convergente.

3. Encontre o limite das seguintes sequências:

i) $((2 + 1/n)^2)$;

ii) $\left(\dfrac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}\right)$;

iii) $\left(\dfrac{n + 1}{n\sqrt{n}}\right)$.

4. Seja $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) e $(\sqrt{n}x_n)$ convergem e encontre seus limites.

5. Discuta a convergência das seguintes sequências, onde $0 < x < 1$ e $y > 1$.

i) $(n^2 x^n)$;

ii) $\left(\dfrac{y^n}{n!}\right)$;

iii) $\left(\dfrac{y^n}{n^2}\right)$.

6. (Teste da Raiz) Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\lim \sqrt[n]{x_n} = x < 1$. Mostre que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $0 < y < 1$ e $0 < x_n < y^n$, $\forall\, n \geq N$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim x_n = 0$.

7. O teste da raiz acima é inconclusivo no caso do limite acima ser 1.

i) Dê exemplo de uma sequência de números reais positivos (x_n) convergente tal que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$;

ii) Dê exemplo de uma sequência de números reais positivos (x_n) divergente tal que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

2.5 Limites Infinitos de Sequências Reais

Definição 2.11 (Limites Infinitos)**.** Dizemos que uma sequência (x_n) "tende a"$+\infty$ ou ∞ (respectivamente "tende a"$-\infty$), e escrevemos $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = \infty$ (respectivamente $\lim x_n = -\infty$), quando dado $A > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall$ $n \geq N$, tem-se $x_n > A$ (respectivamente $x_n < -A$).

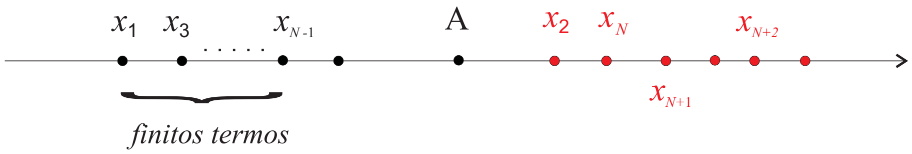

Figura 2.8: $\lim x_n = \infty$

Obs 2.22. As notações $+\infty, \infty, -\infty$ não são números reais. Na verdade estas servem para expressar a idéia estabelecida na definição acima.

Obs 2.23. O número natural N encontrado na definição 2.11 depende somente do número real $A > 0$ dado, isto é, $N = N(A)$.

Obs 2.24. Observe que a definição 2.11 nos garante que $\lim x_n = \infty \Leftrightarrow \lim(-x_n) = -\infty$.

Exemplo 2.21. $\lim n = \lim 2^n = \infty$. De fato, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > A$ (ver Teorema 1.2). Logo, $\forall$ $n \geq N$, tem-se $n \geq N > A$. Portanto, $\lim n = \infty$. Pela Desigualdade de Bernoulli, $2^n \geq 1 + n$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. Com isso, dado $B > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > B - 1$. Dessa forma, $\forall$ $n \geq N$, tem-se $2^n \geq n + 1 \geq N + 1 > B$. Ou seja, $\lim 2^n = \infty$.

Exemplo 2.22. $\lim[n + (-1)^n n] \neq \infty$. Suponha, por absurdo, que $\lim[n + (-1)^n n] = \infty$. Assim sendo, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall$ $n \geq N$, tem-se $n + (-1)^n n > A$. Faça, $n = 2N + 1$. Daí, $2N + 1 + (-1)^{2N+1}(2N + 1) > A$. Ou seja, $0 = 2N + 1 - (2N + 1) > A$. Isto é um absurdo, pois $A > 0$.

Obs 2.25. Seja $\lim x_n = \infty$. Portanto, dado $A \in \mathbb{R}$, $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$, tem-se $x_n > |A| \geq A$. Ou seja (x_n) é uma sequência ilimitada superiormente. Resumindo, se $\lim x_n = \infty$, então (x_n) é uma sequência ilimitada superiormente. O exemplo 2.22 mostra que a recíproca desta afirmação é falsa, já que $(n+(-1)^n n) = (0, 4, 0, 8, 0, ...)$ é uma sequência ilimitada superiormente e $\lim[n + (-1)^n n] \neq \infty$. Analogamente, se $\lim x_n = -\infty$, então (x_n) é uma sequência ilimitada inferiormente.

Vejamos que condições devemos acrescentar para que esta recíproca seja verdadeira.

Proposição 2.4. *As seguintes afirmações são válidas:*

i) *Se* (x_n) *é uma sequência ilimitada (superiormente) e não-decrescente, então* $\lim x_n = \infty$*;*

ii) *Se* (x_n) *é uma sequência ilimitada (inferiormente) e não-crescente, então* $\lim x_n = -\infty$*.*

Demonstração. **i)** Se (x_n) é uma sequência ilimitada (superiormente), então dado $A > 0$, existe $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > A$. Se (x_n) é uma sequência não-decrescente, então $\forall\ n \geq N$, tem-se que $x_n \geq x_N$. Com isso, $\forall\ n \geq N$, tem-se que $x_n \geq x_N > A$. Ou seja, $\lim x_n = \infty$. O item **ii)** é análogo. □

Proposição 2.5. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *duas sequências tais que* $x_n \leq y_n$*,* $\forall\ n \in \mathbb{N}$*. Então:*

i) $\lim x_n = \infty \Rightarrow \lim y_n = \infty$;

ii) $\lim y_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$.

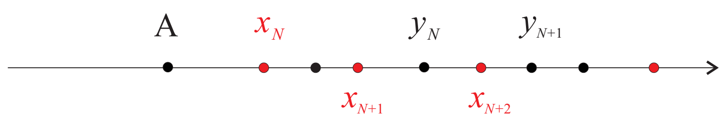

Figura 2.9: item **i)**

Demonstração. **i)** Dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n > A$. Como $x_n \leq y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então $\forall\ n \geq N$, tem-se $y_n \geq x_n > A$. Portanto, $\lim y_n = \infty$.
ii) $\lim y_n = -\infty$, então $\lim(-y_n) = \infty$. Como $-y_n \leq -x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então pelo item **i)**, temos que $\lim(-x_n) = \infty$. Ou seja $\lim x_n = -\infty$. □

Exemplo 2.23. Veja que $\lim[n + (-1)^n] = \lim 2n = \infty$. De fato, $n - 1 \leq n + (-1)^n$ e $n \leq 2n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, usando a Proposição 2.5 e o fato que $\lim(n-1) = \lim n = \infty$, temos o resultado.

2.6 Operações com Limites Infinitos

Teorema 2.12 (Operações com Limites Infinitos)**.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) *Se* $\lim x_n = \infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então* $\lim(x_n + y_n) = \infty$*;*

ii) *Se* $\lim x_n = \infty$ *e* $y_n \geq y > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim(x_n y_n) = \infty$*;*

iii) *Se* $x_n \geq x > 0$ *e* $\lim y_n = 0$*, com* $y_n > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$*;*

iv) *Se* (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = \infty$*, então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$*.*

Demonstração. **i)** Se (y_n) é limitada inferiormente, então $\exists\ b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Agora, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n > A - b$ (se $A - b < 0$ este resultado é óbvio). Por conseguinte, $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n + y_n > A - b + b = A$. Ou seja, $\lim(x_n + y_n) = \infty$.
ii) Dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n > \dfrac{A}{y} > 0$. Portanto, $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n y_n > \dfrac{A}{y} y = A > 0$. Dessa forma, $\lim(x_n y_n) = \infty$.
iii) Seja $A > 0$. Como $\lim y_n = 0$, com $y_n > 0$, então $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $y_n = |y_n| = |y_n - 0| < \dfrac{x}{A}$. Dessa forma, $\forall\ n \geq N$, tem-se $\dfrac{x_n}{y_n} > x\dfrac{A}{x} = A$. Consequentemente, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$.
iv) Se (x_n) é limitada então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq |x_n| \leq a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Se $a = 0$, então $x_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Daí, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim 0 = 0$. Considere, então, que $a > 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $y_n > \dfrac{a}{\varepsilon} > 0$. Com isso, $\forall\ n \geq N$, tem-se $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - 0\right| = \left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| = \dfrac{|x_n|}{y_n} < \dfrac{\varepsilon}{a} a = \varepsilon$. Isto nos diz que $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$. $\square$

Exemplo 2.24. Vimos que $\lim 2^n = \infty$ e que a sequência $(1/n)$ é limitada inferiormente por 0. Assim sendo, utilizando o Teorema 2.12, obtemos: $\lim \left[\dfrac{2^n n + 1}{n}\right] = \lim \left[2^n + \dfrac{1}{n}\right] = \infty$.

Corolário 2.13. *Seja* (y_n) *uma sequência. Então,* $\lim y_n = 0 \Leftrightarrow \lim \dfrac{1}{y_n} = \infty$*.*

Demonstração. Use os itens **iii)** e **iv)** do Teorema 2.12, com $x_n = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 2.25. Como $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, então, com o Corolário 2.13, concluímos que $\lim \dfrac{n}{(-1)^n} = \infty$.

Obs 2.26. No Teorema 2.12 item **i)** vamos retirar a hipótese de (y_n) ser uma sequência limitada inferiormente. Vejamos o que é possível acontecer. Escolha, primeramente, as sequências $(x_n) = ([n + (-1)^n])$ e $(y_n) = (-n)$. Vimos, no exemplo 2.23, que $\lim x_n = \infty$. Mas, (y_n) é ilimitada inferiormente. Além disso, $\lim(x_n + y_n) = \lim(-1)^n$, o qual não existe, pois a sequência $(-1)^n = (-1, 1, -1, 1, ...)$ possui duas subsequências constantes iguais a 1 e -1 (ver Teorema 2.2). Com isso, $\lim(x_n + y_n)$ não existe. Agora, considere as sequências $(x_n) = (2n)$ e $(y_n) = (-n)$. Pelo exemplo 2.23, temos que $\lim x_n = \infty$. Dessa maneira, $\lim(x_n + y_n) = \lim(2n - n) = \lim n = \infty$. Por fim, seja $x \in \mathbb{R}$. Considere as sequências $(x_n) = (n+x)$ e $(y_n) = (-n)$. Logo, $\lim x_n = \infty$. Por outro lado, $\lim(x_n+y_n) = \lim(n+x-n) = \lim x = x$. Resumindo, $\lim(x_n + y_n)$ pode não existir, ser ∞, ou qualquer número real desejado. Por isto a expressão, $\infty - \infty$ é chamada indeterminação. Outras indeterminações são: ∞^0, $1^\infty, 0^0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. As hipóteses colocadas em cada item do Teorema 2.12 são essenciais para não haver estes tipos de indeterminações.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que se $\lim x_n = \pm\infty$, então existe uma subsequência que tende a $\pm\infty$.

2. Dê exemplos de sequências (x_n), (y_n) tais que $\lim x_n = \pm\infty$ e $\lim y_n = \pm\infty$, com $y_n \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ satisfazendo:

i) (x_n/y_n) é convergente;

ii) $\lim x_n/y_n = \pm\infty$.

3. Discuta a convergência ou divergência das seguintes sequências:

i) $(\sqrt{n^2 + 2})$;

ii) $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 2}\right)$;

iii) $(\cos\sqrt{n})$.

4. Mostre que se $\lim x_n/n = x > 0$, então $\lim x_n = \infty$.

2.7 Sequência de Cauchy

Definição 2.12 (Sequência de Cauchy)**.** Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m, n \geq N$, tem-se $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

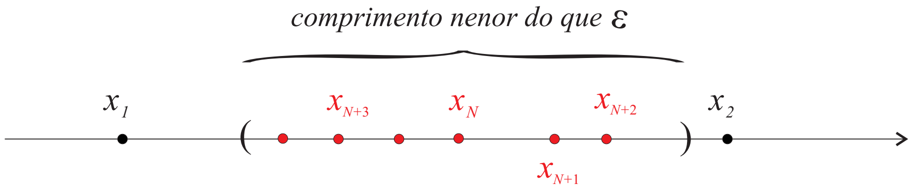

Figura 2.10: Sequência de Cauchy

Obs 2.27. O número natural N depende somente de ε. Ou seja, $N = N(\varepsilon)$.

Obs 2.28. A definição 2.12 nos garante que os termos da sequência (x_n) estão próximos para n suficientemente grande. Enquanto que, na definição 2.6 os termos da sequência ficam próximos de seu limite quando n é suficientemente grande.

Exemplo 2.26. A sequência (n) não é uma sequência de Cauchy. De fato, $\exists\ \varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ tal que $\forall\ N \in \mathbb{N}$, temos que $|(N+1) - N| = |1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

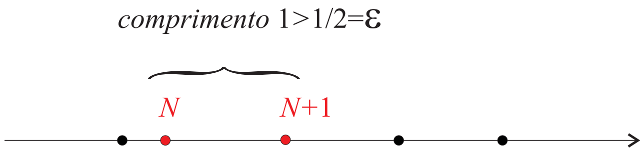

Figura 2.11: (n) não é uma sequência de Cachy

Exemplo 2.27. A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{2}{\varepsilon}$ (ver Teorema 1.2). Logo, $\forall\ n, m \geq N$, tem-se que: $\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right| \leq \left|\dfrac{1}{n}\right| + \left|\dfrac{1}{m}\right| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N} = \dfrac{2}{N} < \varepsilon$.

Teorema 2.14. *Toda sequência convergente é de Cauchy em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de números reais convergente, com $\lim x_n = x$. Vamos provar que (x_n) é de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dessa forma, $\forall\ n, m \geq N$, tem-se $|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto, (x_n) é de Cauchy. □

Lema 2.1. *Toda sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$ *é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $\varepsilon = 1 > 0$. Assim, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \in (x_N - 1, x_N + 1)$. Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $-d < x_N - 1$ e $x_N + 1 < d$. Assim sendo, $x_n \in (-d, d)$, $\forall\ n \geq N$. Ou seja, $|x_n| < d$, $\forall\ n \geq N$. Seja $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, d\}$. Dessa forma, $|x_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Por fim, (x_n) é limitada. □

Obs 2.29. A recíproca do Lema 2.1 é falsa. A sequência $((-1)^n)$ é limitada, porque $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $((-1)^n)$ não é uma sequência de Cauchy. Com efeito, existe $\varepsilon = 2 > 0$ tal que $\forall\ N \in \mathbb{N}$, encontram-se $2N, 2N+1 \geq N$ de forma que $|(-1)^{2N} - (-1)^{2N+1}| = |1 + 1| = 2 = \varepsilon$.

Lema 2.2. *Seja* (x_n) *uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$*. Se* (x_n) *possui uma subsequência que converge para* x*. Então* (x_n) *é convergente e* $\lim x_n = x$.

Demonstração. Se (x_n) é de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n, m \geq N$, tem-se $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Assim sendo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n_k \geq n_0$, tem-se que $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_{k'} = \max\{N, n_0\}$. Dessa forma, $\forall\ n \geq n_{k'}$, tem-se que $|x_n - x| = |x_n - x_{n_{k'}}| + |x_{n_{k'}} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ou seja, $\lim x_n = x$. □

Teorema 2.15. *Toda sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$ *é convergente.*

Demonstração. Seja $x = (x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim, x é limitada (ver Teorema 2.1). Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass x possui uma subsequência convergente $x' = (x_{n'})$. Pelo Lema 2.2, x é convergente e converge para o mesmo limite de x'. □

Exercícios de Fixação

1. Mostre, através da definição, que as seguintes sequências são sequências de Cauchy:

i) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$;

ii) $\left(1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{n!}\right)$.

2. Mostre, através da definição, que as seguintes sequências não são sequências de Cauchy:

i) $\left(n+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;

ii) $(\ln n)$ (ver definição 10.1).

3. Mostre diretamente da definição que se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy então (x_n+y_n) são sequências de Cauchy.

4. Mostre $(\sqrt{n})$ satisfaz $\lim|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=0$, mas $(\sqrt{n})$ não é uma sequência de Cauchy.

5. Seja $p\in\mathbb{N}$ fixo. Dê exemplo de uma sequência (x_n) que não é de Cauchy, mas satisfaz $\lim|x_{n+p}-x_n|=0$.

6. Se $0<r<1$ e $|x_{n+1}-x_n|<r^n$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é de Cauchy.

2.8 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é possível concluir que uma quantidade infinita dos termos de uma sequência convergente estão o quão próximos do valor de convergência quanto desejarmos. Este fato ressalta um importante papel da convergência de uma sequência de números reais em Análise na Reta, pois isto nos dá informações importantes se trabalharmos em uma região próxima ao limite da sequência. Nesta localidade, podemos utilizar as principais características dos termos existentes da sequência para resolver algum problema que envolva o valor de convergência.

2.9 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, como descobrir se uma sequência é convergente utilizando resultados como, por exemplo, o Teorema 2.15. Porém, este Teorema não informa o valor de convergência da sequência. Portanto acrescentamos à aula alguns outros resultados, tais como os Teoremas da Monotonicidade e do Sanduíche, os quais, sob algumas hipóteses, nos dizem quem é o limite da sequência. Além disso, aumentamos nossa lista de exemplos de sequências convergentes estabelecendo as propriedades inerentes a sequência de números reais. Discutimos, também, algumas sequências divergentes que possuem um comportamento próprio. Este tipo de comportamento está descrito como limite infinito.

2.10 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Se $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = x$, prove que $\lim x_n = x$.

2. Se $\lim x_n = x$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$, prove que $\lim y_n = x$.

3. Seja $x \neq 0$. Se $\lim \dfrac{x_n}{x} = 1$ prove que $\lim x_n = x$.

4. Seja $y \neq 0$. Se $\lim x_n = x$ e $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = y$, prove que $\lim y_n = \dfrac{x}{y}$.

5. Se $\lim x_n = x \neq 0$ e $\lim x_n y_n = y$, prove que $\lim y_n = \dfrac{y}{x}$.

6. Seja $x_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Se $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x > 1$, prove que $\lim x_n = \infty$. Mostre que $\lim \dfrac{n^n}{n!} = \infty$.

7. Seja (x_n) uma sequência monótona. Suponha que (x_n) possua uma subsequência convergente. Prove que (x_n) é convergente.

8. Sejam $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$. Se $x < y$, prove que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$.

9. Se $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon, \forall\ n \in \mathbb{N}$, prove que $|x - y| \geq \varepsilon$.

10. Seja (x_n) uma sequência limitada. Suponha que $\lim x_n \neq x$. Prove que existe uma subsequência de (x_n) que converge para um número distinto de x.

11. Dados x, y números positivos, defina indutivamente as sequências (x_n) e (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{xy}$ e $y_1 = \frac{x+y}{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Prove que (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

12. Prove que, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim \sqrt[n+m]{n} = 1$.

13. Dado $x > 0$, defina indutivamente a sequência (x_n) pondo $x_1 = \frac{1}{x}$ e $x_{n+1} = \frac{1}{x + x_n}$. Considere o número a, raiz positiva da equação $y^2 + xy - 1 = 0$, único número positivo tal que $a = \frac{1}{x+a}$. Prove que

$$x_2 < x_4 < ... < x_{2n} < ... < a < ... < x_{2n-1} < ... < x_3 < x_1.$$

e que $\lim x_n = x$. O número a pode ser considerado como a soma da fração contínua

$$\cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + ...}}}}.$$

14. Dado $y > 0$, defina indutivamente a sequência (y_n), pondo $y_1 = y$ e $y_{n+1} = y + \frac{1}{y_n}$. Mostre que $\lim y_n = x + a$, onde a é como no exercício anterior.

15. Defina a sequência (y_n) indutivamente, pondo $y_1 = y_2 = 1$ e $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Escreva $x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$ e prove que $\lim x_n = a$, onde a é o único número positivo tal que $a = \frac{1}{1+a}$. O termo y_n chama-se o n-ésimo número de Fibonacci e $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro da Geometria Clássica.

16. Se $\lim x_n = \infty$ e $x \in \mathbb{R}$, prove que $\lim \left[\sqrt{\log(x_n + x)} - \sqrt{\log x_n}\right] = 0$.

2.11 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Uma sequência (x_n) diz-se periódica quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência periódica convergente é constante.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência periódica. Suponha que (x_n) não é constante. Ou seja, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $x_m \neq x_n$. Como (x_n) é periódica, prova-se, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que as subsequências $x_{n_k} = x_{n+kp} = x_n$ e $x_{m_k} = x_{m+kp}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, são constantes. Observe que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_n$ e $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x_m$. Usando o Teorema 2.2 e o fato que $x_m \neq x_n$, concluímos que (x_n) é divergente. $\square$

Ex2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n \in [0,1]$. Se $\lim x_n = \lim y_n = x$, prove que $\lim[t_n x_n + (1 - t_n)y_n] = x$.

Demonstração. Observe que $t_n x_n + (1 - t_n)y_n = t_n x_n + y_n - t_n y_n = y_n + t_n(x_n - y_n)$. Como $\lim x_n = \lim y_n = x$, então $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = x - x = 0$. Como $t_n \in [0,1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, obtemos que (t_n) é uma sequência limitada. Utilizando o Teorema 2.10, concluímos que $(t_n(x_n - y_n))$ é convergente e $\lim[t_n(x_n - y_n)] = 0$. Dessa forma, $\lim[t_n x_n + (1 - t_n)y_n] = \lim[y_n + t_n(x_n - y_n)] = \lim y_n + \lim[t_n(x_n - y_n)] = x$. $\square$

Ex3. Se $\lim x_n = x$, prove que $\lim |x_n| = |x|$. Prove ou contra-exemplifique a recíproca desta afirmação.

Demonstração. Pela Proposição 1.3, temos que $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$. Assim sendo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $|x_n - x| < \varepsilon$, pois $\lim x_n = x$. Portanto, $\forall\, n \geq N$, tem-se $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$. Ou seja, $\lim |x_n| = |x|$. A recíproca não é verdadeira para $x \neq 0$. Por exemplo, considere a sequência $((-1)^n)$. É claro que, $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1 = |1|$. Por outro lado, $\lim(-1)^n$ não existe, pois $(1,1,1,...)$ e $(-1,-1,-1,...)$ são subsequências de $((-1)^n)$ que convergem para os valores distintos 1 e -1, respectivamente, (ver Teorema 2.2). $\square$

Ex4. Seja (x_n) uma sequência monótona. Suponha que (x_n) possua uma subsequência convergente. Prove que (x_n) é convergente.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que se (x_n) é uma sequência monótona e possui uma subsequência limitada, então (x_n) é limitada. Com efeito, considere que (x_n) é monótona não-decrescente. Observe que, neste caso, x_1 é cota inferior de (x_n). Seja $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}'}$ tal subsequência. Assim, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n'} \leq M$, $\forall\, n' \in \mathbb{N}'$. Por outro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n \leq n'$. Portanto, $x_n \leq x_{n'} \leq M$. Ou seja (x_n) é limitada. Em particular, se (x_n) possui uma subsequência convergente, esta é limitada (ver Teorema 2.3). Pelo que foi feito acima, (x_n) é monótona e limitada. Pelo Teorema 2.4, (x_n) é convergente. $\square$

Ex5. Seja (x_n) uma sequência limitada. Suponha que $\lim x_n \neq x$. Prove que existe uma subsequência de (x_n) que converge para um número distinto de x.

Demonstração. Como $\lim x_n \neq x$, então $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_k \geq k$, com $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$. Podemos considerar que $n_1 < n_2 < ... < n_k < ....$ Como (x_n) é limitada, então (x_{n_k}) também é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (x_{n_k}) possui uma subsequência convergente. Portanto, passando a uma subsequência, se necessário, (x_{n_k}) é convergente. Digamos $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Dessa forma, $\lim\limits_{k\to\infty}[x_{n_k} - x] = y - x$, logo, $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k} - x| = |y - x|$. Por fim, $|y - x| = \lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon > 0$. Com isso, $y \neq x$. $\square$

Ex6. Dado $x > 0$, defina indutivamente a sequência (x_n) pondo $x_1 = \sqrt{x}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...}}}}$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que (x_n) é monótona crescente. Usaremos indução sobre n. Veja que $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x + x_1} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x + \sqrt{x}} \Leftrightarrow x < x + \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x}$. Como $x > 0$, então a última desigualdade faz sentido e é verdadeira. Suponha que $x_n < x_{n+1}$. Portanto, $x_{n+1} = \sqrt{x + x_n} < \sqrt{x + x_{n+1}} = x_{n+2}$. Assim sendo, $x_n < x_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Agora, seja a a única raiz positiva da equação $y^2 - y - x = 0$. Consequentemente, $a^2 - a - x = 0$, ou seja, $a^2 = x + a$, isto é, $a = \sqrt{x + a}$. Além disso, $a > 0$. Vamos provar, por indução sobre n, que $x_n < a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. De fato, quando $n = 1$, temos: $x_1 = \sqrt{x} < \sqrt{x + a} = a$. Considere que $x_n < a$. Assim, $x_{n+1} = \sqrt{x + x_n} < \sqrt{x + a} = a$. Portanto, $x_n < a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com isso, (x_n) é monótona crescente e limitada (por x_1 e a). Dessa forma, utilizando o Teorema 2.4, concluímos que (x_n) é convergente. Digamos que $\lim x_n = y$. Como $x_{n+1}^2 = x + x_n$, então $y^2 = x + y$, isto é, $y = \sqrt{x + y}$. Finalmente, $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...}}}$ $\square$

Ex7. Mostre que $\lim \dfrac{\log(n+1)}{\log n} = 1$ (ver definição 10.1).

Demonstração. Veja que $\lim \dfrac{\log(n+1)}{\log n} = 1 \Leftrightarrow \lim \left[\dfrac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \lim \left[\dfrac{\log(n+1) - \log n}{\log n}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim \dfrac{\log(\frac{n+1}{n})}{\log n} = 0 \Leftrightarrow \lim \dfrac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log n} = 0$. Verifique que, $\lim \log(1+\frac{1}{n}) = 0$ e $\lim \log n = \infty$ (ver teorema 10.1). O resultado segue. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de determinar se uma sequência, constituída de números reais, é convergente?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, utilizaremos a definição de sequência de números reais para acrescentar ao nosso material a idéia de somar todos os elementos de uma sequência qualquer. Ou seja, criaremos uma soma com uma quantidade infinita de parcelas.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Boyce, W. E., DiPrima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Seventh Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc, 2001. 745p.

[3] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[4] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo