Capítulo 3

Série de Números Reais

Aula 3: Séries de Números Reais

Meta

Apresentar e demonstrar os Testes de Convergência que determinam a convergência ou divergência de algumas séries.

Objetivos

Ao final desta aula o aluno deverá ser capaz de identificar se uma série converge, converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge.

Pré-requisitos

Aula 2, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

3.1 Introdução

Olá, nesta aula, apresentamos a você, caro aluno, a possibilidade de somarmos uma quantidade enumerável e infinita de números reais. A esta soma daremos o nome série. A primeira pergunta que surge é: O resultado desta soma é um número real? A resposta é negativa. Uma soma infinita de números reais não é um número real. Mas, algumas séries podem estar tão próximas a um número real quanto desejarmos. Estas são de interesse especial. Nosso estudo inicial é definir e exemplificá-las. Em seguida, apresentaremos testes que identificam estas séries. Porém, como todo teste, tem sua possibilidade de falha. Assim sendo, a única maneira de você conhecer qual teste será conclusivo é a experiência. Por isso, recomendo a resolução dos exercícios listados nesta aula para um melhor poder de observação do aluno. Por fim, questionamos se é possível comutar as parcelas de uma soma infinita. Veremos que isto ocorre somente com algumas condições.

3.2 Definição, Exemplos e Convergência de Séries

Definição 3.1 (Série)**.** Seja (x_n) uma sequência de números reais. A soma infinita dos termos de (x_n), denotada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$, é denominada uma série de números reais. Neste caso, x_n é chamado n-ésimo termo ou termo geral da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Obs 3.1. Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ simplesmente por $\sum x_n$.

Exemplo 3.1. As somas $\displaystyle\sum \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$, $\sum(-1)^n = -1+1-1+...+(-1)^n+...$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ são exemplos de séries de números reais. No decorrer da teoria daremos mais exemplos de séries.

Definição 3.2 (Somas Parciais)**.** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série. Defina a sequência (s_n) pondo $s_1 = x_1$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $\forall\ n > 1$ natural. Chamamos s_n de n-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e a sequência (s_n) é chamada sequência das somas parciais, ou simplesmente somas parciais, da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplo 3.2. As n-ésimas somas parciais das séries $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ são respectivamente, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $t_n = -1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$ e $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.

Definição 3.3 (Convergência de Séries)**.** Dizemos que uma série $\sum x_n$ é convergente se a sequência de somas parciais (s_n) é convergente. Neste caso, $\sum x_n = x$, onde $x = \lim s_n$ é chamado a soma desta série. Caso contrário, dizemos que $\sum x_n$ é divergente.

Obs 3.2. Veja que $x = \lim s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$. Assim sendo, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Exemplo 3.3. Vimos que a n-ésima soma parcial da série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ é dada por $u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$. Por outro lado, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Com isso, $u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Consequentemente, $\lim u_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Ou seja, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$ é uma série convergente.

Exemplo 3.4. $t_n = -1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$ é a n-ésima soma parcial da série $\sum (-1)^n$. Assim, $(t_{2n}) = (0, 0, ..., 0, ...)$ e $(t_{2n-1}) = (-1, -1, ..., -1, ...)$. Logo, (t_n) é divergente (ver Teorema 2.2). Portanto, $\sum (-1)^n$ é divergente.

Teorema 3.1. $\sum x_n$ *converge* $\Rightarrow \lim x_n = 0$

Demonstração. Suponha que $\sum x_n = x$. Seja (s_n) a sequência de somas parciais desta série. Assim, $\lim s_n = x$ (ver definição 3.3). Usando o Teorema 2.2, concluímos que $\lim s_{n+1} = x$. Portanto, $\lim(s_{n+1} - s_n) = \lim s_{n+1} - \lim s_n = x - x = 0$. Mas, $s_{n+1} - s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} - (x_1 + x_2 + ... + x_n) = x_{n+1}$. Consequentemente, utilizando a Proposição 2.1, chegamos a $\lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim(s_{n+1} - s_n) = 0$. □

Obs 3.3. Veremos no exemplo 10.11 que a série $\sum \frac{1}{n}$ é divergente, mas $\lim \frac{1}{n} = 0$. Portanto, a recíproca do Teorema 3.1 não é verdadeira.

Obs 3.4. A contrapositiva do Teorema 3.1 nos diz que $\lim x_n \neq 0 \Rightarrow \sum x_n$ diverge. Esta contrapositiva tem aplicação direta em exemplos. Veja exemplo a seguir.

Exemplo 3.5. A série $\sum \frac{n+1}{n}$ é uma série divergente, pois $\lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ (ver contrapositiva do Teorema 3.1).

Exemplo 3.6. A série $\sum \frac{n^2}{3n^2+2}$ é divergente, porque $\lim \frac{n^2}{3n^2+2} = \lim \frac{1}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0$. (ver Teorema 3.1).

Exemplo 3.7 (Série Geométrica)**.** Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Chamamos a série $\sum ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ de série geométrica com razão r. Vamos provar que $\sum ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. De fato, se $|r| = 1$, então $r = \pm 1$. Logo, $\sum ar^{n-1} = \sum a$ ou $\sum ar^{n-1} = \sum a(-1)^{n-1}$, as quais divergem pelo Teorema 3.1. Considere então que $|r| \neq 1$. Seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ a n-ésima soma parcial de série $\sum ar^{n-1}$. Com isso, $rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$. Portanto, $s_n - rs_n = a - ar^n$. Consequentemente, $(1-r)s_n = a(1-r^n)$. Por fim, $s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (pois $|r| \neq 1$). Se $|r| < 1$, então $\lim |r|^n = 0$ (ver Proposição 2.2). Ou equivalentemente, $\lim r^n = 0$. Assim sendo, $\lim s_n = \lim \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$. Se $|r| > 1$, então $\lim r^n$ não existe (ver Proposição 2.2). Daí, (s_n) é divergente. Ou seja, $\sum ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ converge se $|r| < 1$ e $\sum ar^{n-1}$ diverge se $|r| \geq 1$.

Exemplo 3.8. A série $\sum \frac{23}{100}(1/100)^{n-1}$ é uma série geométrica de raio $1/100 < 1$. Logo a série $\sum \frac{23}{100}(1/100)^{n-1} = \frac{23}{1 - 1/100} = 23/99$ converge. Assim, $5,2323... = 5 + 0,2323... = 5 + 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + ... = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + ... + \frac{23}{100^{n-1}} + ... = 5 + \sum \frac{23}{100}(1/100)^{n-1} = 5 + 23/99 = \frac{518}{99}$.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que a convergência da série não é afetada se mudarmos um número finito de termos. Neste caso, a soma não necessariamente é a mesma.

2. Utilizando frações parciais mostre que:

i) $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$;

ii) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3. Utilizando série geométrica, expresse os números $0,7373...$ e $0,222...$ como um número racional.

4. Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma:

i) $\sum 6(0,9)^{n-1}$;

ii) $\sum \frac{(-\pi)^n}{3^{n+1}}$.

3.3 Operações com Séries

Teorema 3.2 (Operações com Séries)**.** *Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries convergentes e $k \in \mathbb{R}$, então:*

i) $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$;

ii) $\sum kx_n = k \sum x_n$.

Demonstração. Considere que $\sum x_n = x$ e $\sum y_n = y$. Sejam (s_n) e (t_n) as sequências das somas parciais para as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente, então $\lim s_n = x$ e $\lim t_n = y$.
i) Assim sendo, com o Teorema 2.11, concluímos que $\lim(s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = x + y$, mas $s_n + t_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + y_1 + y_2 + ... + y_n = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_n + y_n)$ é a n-ésima soma parcial da série $\sum(x_n + y_n)$. Logo, $\sum(x_n + y_n)$ converge para $x + y$. Ou seja, $\sum(x_n + y_n) = x + y = \sum x_n + \sum y_n$.
ii) Analogamente, $\lim ks_n = k \lim s_n = kx$ (ver Teorema 2.11). Por outro lado, $ks_n = k(x_1 + x_2 + ... + x_n) = kx_1 + kx_2 + ... + kx_n$ é a n-ésima soma parcial para a série $\sum kx_n$. Portanto, $\sum kx_n$ converge para kx. Isto é, $\sum kx_n = kx = k \sum x_n$. $\square$

Obs 3.5. Considere que $\sum x_n = x$ e $\sum y_n = y$. Daí, $\sum(x_n - y_n) = \sum[x_n + (-y_n)] = \sum x_n + \sum(-y_n) = \sum x_n - \sum y_n$.

Exemplo 3.9. Olhe que $\sum \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum \left[\frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right] = \sum \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right] = \sum \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \sum \frac{1}{6^{n-1}}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{4}{5}$.

Obs 3.6. Observe que se $\sum x_n$ é divergente, então $\sum kx_n$ é divergente, onde $k \neq 0$. Suponha, por absurdo, que $\sum kx_n$ é convergente, então, pelo Teorema 3.2, $1/k \sum kx_n$ é convergente e $1/k \sum kx_n = \sum(1/k)kx_n = \sum x_n$. Portanto, $\sum x_n$ é convergente. Absurdo, pois, $\sum x_n$ é divergente! Logo, $\sum kx_n$ é divergente.

Exemplo 3.10. As séries $\sum \frac{4}{n} = \sum 4\frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{5n} = \sum \frac{1}{5}\frac{1}{n}$ e $\sum \frac{-1}{n} = \sum(-1)\frac{1}{n}$ são divergentes (ver exemplo 10.11).

Obs 3.7. Note que se $\sum x_n$ é convergente e $\sum y_n$ é divergente, então $\sum[x_n+y_n]$ é divergente. Suponha, por absurdo, que $\sum[x_n+y_n]$ é convergente, então, pelo Teorema 3.2, $\sum[(x_n+y_n) - x_n]$ é convergente e $\sum[(x_n + y_n) - x_n] = \sum y_n$. Portanto, $\sum y_n$ é convergente. Absurdo, pois, $\sum y_n$ é divergente! Logo, $\sum[x_n + y_n]$ é divergente.

Exemplo 3.11. A série $\sum \frac{3^n+n}{n3^n}$ é divergente, pois $\sum \frac{3^n+n}{n3^n} = \sum \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}\right]$, $\sum \frac{1}{n}$ é divergente (ver exemplo 10.11) e $\sum \frac{1}{3^n} = \sum \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente (ver exemplo 3.7).

Obs 3.8. Olhe que se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são divergentes, não podemos concluir que $\sum[x_n + y_n]$ é divergente. Por exemplo, $\sum \left[\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right] = \sum 0 = 0$ é convergente, porém as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{-1}{n}$ são divergentes (ver exemplo 10.11).

Obs 3.9. Sabemos que $\sum \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ e $\sum \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ (ver exemplo 3.7). Portanto, $\sum \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{1}{3^{n-1}} = 2\frac{3}{2} = 3$. Por outro lado, $\sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum \frac{1}{6^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$. Logo, $\sum \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \neq \frac{6}{5} = \sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}}$. Ou seja, $\sum \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{1}{3^{n-1}} \neq \sum \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3^{n-1}}$. Portanto, mesmo que $\sum x_n$ e $\sum y_n$ sejam convergentes, não é verdade que $\sum x_n y_n = \sum x_n \sum y_n$.

Obs 3.10. Veja que $\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 2$ e $\sum \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2}$. Por outro lado, $\sum \frac{1}{2^{n-1}} \div \frac{1}{3^{n-1}} = \sum \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ é divergente (ver exemplo 3.7). Portanto, mesmo que $\sum x_n$ e $\sum y_n$ sejam convergentes, não é verdade que $\sum(x_n \div y_n)$ seja convergente.

Exercícios de Fixação

1. Calcule a soma da série $\sum \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$.

2. Determine se as séries $\sum \frac{1+3^n}{2^n}$, $\sum \frac{1+3^n}{2^n}$ e $\sum \frac{1}{10n}$ convergem ou divergem. Se for convergente calcule sua soma.

3.4 Testes de Convergência para Séries

Teorema 3.3 (Teste da Comparação)**.** *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *séries tais que* $x_n, y_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. *Seja* $N \in \mathbb{N}$. *Então:*

i) $\sum y_n$ *é convergente e* $x_n \leq y_n$, $\forall\ n \geq N \Rightarrow \sum x_n$ *é convergente;*

ii) $\sum y_n$ *é divergente e* $x_n \geq y_n$, $\forall\ n \geq N \Rightarrow \sum x_n$ *é divergente.*

Demonstração. Sejam (s_n) e (t_n) as sequências das somas parciais das séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente
i) Suponha que $\sum y_n = y$ e $x_n \leq y_n$, $\forall\ n \geq N$. Logo, $\lim t_n = y$. Dessa forma, $0 \leq s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n \leq y_1 + y_2 + ... + y_n = t_n$, $\forall\ n \geq N$ $(0 \leq x_n \leq y_n)$. Mas (t_n) é convergente, logo (t_n) é limitada (ver Teorema 2.3). Ou seja, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \leq d$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com isso, $0 \leq s_n \leq t_n \leq d$, $\forall\ n \geq N$. Com isso, (s_n) é limitada. Agora, vejamos por que (s_n) é monótona. De fato, $s_{n+1} = x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, pois $x_n \geq 0$. Ou seja, (s_n) é não-decrescente. Dessa forma (s_n) é monótona e limitada. Pelo Teorema 2.4, (s_n) é convergente. Logo, $\sum x_n$ é convergente.
ii) Façamos a prova por contraposição. Suponha que $\sum x_n$ é convergente e $x_n \geq y_n$, $\forall\ n \geq N$. Assim, pelo item **i)**, $\sum y_n$ é convergente. $\square$

Exemplo 3.12. A série $\sum \dfrac{n-1}{n4^n}$ é convergente? Observe que $\dfrac{n-1}{n4^n} \leq \dfrac{1}{4^n} \Leftrightarrow 4^n n - 4^n \leq 4^n n \Leftrightarrow -4^n \leq 0$. Como $\sum \dfrac{1}{4^n} = \sum \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4^{n-1}}$ é uma série geométrica convergente (razão $1/4 < 1$). Pelo Teorema 3.3, $\sum \dfrac{n-1}{n4^n}$ é convergente.

Exemplo 3.13. Veremos no exemplo 10.11 que $\sum \dfrac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente para $p \leq 1$. Usaremos este fato para ilustrar o Teorema 3.3. A série $\sum \dfrac{1}{2n+3}$ é convergente? Veja que $\dfrac{1}{2n+3} \geq \dfrac{1}{5n} \Leftrightarrow 5n \geq 2n+3 \Leftrightarrow 3n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 1$. Como $\sum \dfrac{1}{5n}$ é divergente, então $\sum \dfrac{1}{2n+3}$ é divergente.

Teorema 3.4 (Teste da Comparação por Limites)**.** *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *séries tais que* $x_n, y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = x > 0 \Rightarrow \sum x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum y_n \text{ converge }.$$

Demonstração. Veja que $x/2 < \lim \dfrac{x_n}{y_n} = x < 2x$, pois $x > 0$. Logo, utilizando o Teorema 2.6, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x/2 < \dfrac{x_n}{y_n} < 2x$, $\forall\, n \geq N$. Como $y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então $xy_n/2 < x_n < 2xy_n$, $\forall\, n \geq N$. Se $\sum x_n$ é convergente, então, $\sum 2x_n/x$ é convergente (ver Teorema 3.2). Por conseguinte, usando o Teorema 3.3, concluímos que $\sum y_n$ também é, pois $y_n < 2x_n/x$, $\forall\, n \geq N$. Se $\sum x_n$ é divergente, então $\sum x_n/2x$ é divergente (ver observações do Teorema 3.2). Com isso, usando o fato que $x_n/2x < y_n$, $\forall\, n \geq N$, concluímos que $\sum y_n$ é divergente usando o Teorema 3.3. $\square$

Exemplo 3.14. A série $\sum \dfrac{1}{3^n - 1}$ é convergente? Considere a série geométrica convergente $\sum \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3} \sum \dfrac{1}{3^{n-1}}$ com razão $1/3 < 1$ (ver exemplo 3.7). Observe que $\lim \dfrac{1}{3^n - 1} 3^n = \lim \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3^n}} = 1 > 0$ (ver Proposição 2.2) Dessa forma, usando o Teorema 3.4, temos que $\sum \dfrac{1}{3^n - 1}$ é uma série convergente.

Exemplo 3.15. Considere a série $\sum n$. Esta série é divergente, pois $\lim n = \infty \neq 0$ (ver Teorema 3.1). Vamos verificar que a série $\sum \dfrac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^2}}$ é divergente usando o Teorema 3.4. Com efeito, $\lim \dfrac{\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^2}}}{n} = \lim \dfrac{\frac{n^2(2+\frac{3}{n})}{\sqrt{n^2(\frac{5}{n^2}+1)}}}{n} = \lim \dfrac{n^2(2 + \frac{3}{n})}{n^2\sqrt{\frac{5}{n^2} + 1}} = \lim \dfrac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{5}{n^2} + 1}} = 2 > 0.$

Consequentemente, com o Teorema 3.4, obtemos que a série $\sum \dfrac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^2}}$ é divergente.

Definição 3.4 (Série Absolutamente Convergente)**.** Uma série $\sum x_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum |x_n|$ é convergente.

Exemplo 3.16. A série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\pi}$ é uma série absolutamente convergente, pois $\sum \left| \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\pi} \right| = \sum \dfrac{1}{n^\pi}$ converge (ver exemplo 10.11).

Exemplo 3.17. A série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$ é absolutamente convergente, pois $\sum \left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} \right| = \sum \dfrac{1}{2^{n-1}}$ é uma série geométrica com razão $1/2$ (ver exemplo 3.7).

Exemplo 3.18. A série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ não é absolutamente convergente, pois $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é divergente (ver exemplo 10.11).

Definição 3.5 (Série Alternada)**.** Uma série é dita alternada se esta pode ser escrita na forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n = -x_1 + x_2 - ... + (-1)^n x_n + ...$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} y_n = y_1 - y_2 + ... + (-1)^n y_n + ...$ com $x_n, y_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.19. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + ...$ é uma série alternada.

Exemplo 3.20. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$ não é uma série alternada.

Teorema 3.5 (Teste de Leibniz)**.** *Seja* (x_n) *uma sequência decrescente tal que* $\lim x_n = 0$*. Então a série alternada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ *é convergente.*

Demonstração. Seja (s_n) a sequência formada pelas somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$. Vamos provar que (s_n) é convergente. Iremos analisar as subsequências (s_{2n}) e (s_{2n-1}) de (s_n). Como (x_n) é decrescente, então $s_{2n+2} = -x_1 + x_2 + ... + x_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} = s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} < s_{2n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $(x_{2n+1} > x_{2n+2})$. Ou seja, (s_{2n}) é decrescente. Portanto, $... < s_{2n} < ... < s_4 < s_2$. Agora, vamos estudar a subsequência (s_{2n-1}) de (s_n). Veja que $s_{2n+1} = -x_1 + x_2 + ... - x_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n} - x_{2n+1} > s_{2n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, pois $x_{2n} > x_{2n+1}$. Isto é, (s_{2n-1}) é crescente. Com isso, $s_1 < s_3 < ... < s_{2n-1} < ....$ Além disso, $s_{2n} = -x_1 + x_2 + ... - x_{2n-1} + x_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n} \geq s_{2n-1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $(x_{2n} \geq 0)$. Por fim, $s_1 < s_3 < ... < s_{2n-1} < ... < s_{2n} < ... < s_4 < s_2$. Ou seja, (s_{2n}) e (s_{2n-1}) são sequências monótonas e limitadas. Assim, usando o Teorema 2.4, concluímos que $\lim s_{2n} = x$ e $\lim s_{2n-1} = y$. Mas, $s_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n}$ e $\lim x_n = 0$. Daí, $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1} + \lim x_{2n} \Rightarrow x = y + 0 = y$ (ver Teorema 2.2). Dessa forma, $\lim s_n = x$ (ver exercícios de sequências). Isto nos diz que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ é convergente. □

Exemplo 3.21. Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Seja $x_n = 1/n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Observe que $\lim x_n = \lim \frac{1}{n} = 0$. Além disso, $(x_n) = (1/n)$ é decrescente, pois $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com efeito, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \geq n \Leftrightarrow 1 \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.5, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

Exemplo 3.22. Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$. Defina $x_n = \frac{n+1}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Com isso, $\lim x_n = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$. Dessa forma, não podemos aplicar o Teorema 3.5. A seguir veremos uma outra maneira de verificar a convergência desta série.

Teorema 3.6. *Seja $\sum x_n$ uma série. Então, se $\sum |x_n|$ converge temos que $\sum x_n$ é também convergente. Em palavras, toda série absolutamente convergente é convergente. Além disso, $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$.*

Demonstração. Sejam $t_n = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + ...$ e $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$ as n-ésimas somas parciais das séries $\sum |x_n|$ e $\sum x_n$, respectivamente. Como $\sum |x_n|$ é convergente, então (t_n) é convergente. Usando o Teorema 2.14, concluímos que (t_n) é de Cauchy. Assim sendo, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$. Dessa forma, a desigualdade triangular nos permite concluir que $|s_n - s_m| = |x_1 + x_2 + ... + x_m + x_{m+1} + ... + x_n - (x_1 + x_2 + ... + x_m)| = |x_{m+1} + ... + x_n| \leq |x_{m+1}| + ... + |x_n| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_m| + |x_{m+1}| + ... + |x_n| - (|x_1| + |x_2| + ... + |x_m|) = ||x_1| + |x_2| + ... + |x_m| + |x_{m+1}| + ... + |x_n| - (|x_1| + |x_2| + ... + |x_m|)| = |t_n - t_m|$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n, m \geq N$, tem-se que $|t_n - t_m| < \varepsilon$. Portanto, $|s_n - s_m| \leq |t_n - t_m| < \varepsilon$, $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, (s_n) é de Cauchy. Com o Teorema 2.15, obtemos que (s_n) é convergente. Por fim, $\sum x_n$ é uma série convergente. Além disso, $|s_n| = |x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = t_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $|\sum x_n| = |\lim s_n| = \lim |s_n| \leq \lim t_n = \sum |x_n|$ (ver exercícios resolvidos de sequências). Isto é, $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$ □

Obs 3.11. A recíproca do Teorema 3.6 é falsa. Por exemplo a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (ver exemplo 3.21), mas $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é divergente (ver exemplo 10.11).

Exemplo 3.23. Considere a série $\sum \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}$. Lembre que $\left|\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}\right| \leq \dfrac{\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{n^4} \leq \dfrac{1}{n^4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto, usando o Teorema 3.3, $\sum \left|\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}\right|$ é convergente, já que $\sum \dfrac{1}{n^4}$ é convergente (ver exemplo 10.11). Com isso, $\sum \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}$ é uma série absolutamente convergente. Dessa forma, pelo Teorema 3.6, concluímos que $\sum \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4}$ é uma série convergente.

Exemplo 3.24. Considere a série alternada $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. Observe que $\sum \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right| = \sum \dfrac{1}{n^3}$ é uma série convergente (ver exemplo 10.11). Logo, $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ é uma série absolutamente convergente. Utilizando o Teorema 3.6, temos que $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ é uma série convergente.

Definição 3.6 (Série Condicionalmente Convergente)**.** Dizemos que uma série $\sum x_n$ é condicionalmente convergente se $\sum x_n$ é convergente e $\sum |x_n|$ é divergente

Exemplo 3.25. Vimos que a série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente (ver exemplos 3.18 e 3.21).

Teorema 3.7 (Teste da Razão)**.** *Seja* $x_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Então:*

i) *lim* $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x < 1 \Rightarrow \sum x_n$ *é absolutamente convergente;*

ii) $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x > 1$ *ou* $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty \Rightarrow \sum x_n$ *é divergente;*

Demonstração. **i)** Suponha que $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x < 1$. Seja $x < k < 1$ (ver Teorema 1.6). Logo, $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x < k < 1$, então, utilizando o Teorema 2.6, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < k = \dfrac{k^{n+1}}{k^n}$, $\forall\, n \geq N$. Logo, $\dfrac{|x_{n+1}|}{k^{n+1}} < \dfrac{|x_n|}{k^n}$, $\forall\, n \geq N$. Dessa forma, a sequência $\left(\dfrac{|x_n|}{k^n}\right)$ é uma sequência não-crescente e $0 < ... < \dfrac{|x_{n+1}|}{k^{n+1}} < \dfrac{|x_n|}{k^n} < ... < \dfrac{|x_N|}{k^N}$. Ou seja, $\left(\dfrac{|x_n|}{k^n}\right)$ é uma sequência monótona e limitada (por 0 e $|x_N|/k^N$). Seja $M = |x_N|/k^N$. Com isso, $\dfrac{|x_n|}{k^n} \leq M$, $\forall\, n \geq N$. Ou seja, $|x_n| \leq Mk^n$, $\forall\, n \geq N$. Como $\sum Mk^n = \sum (Mk)k^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $k < 1$, temos que $\sum Mk^n$ é convergente. Por fim, pelo Teorema 3.3, concluímos que $\sum |x_n|$ é convergente, isto é, $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

ii) Considere que $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x > 1$. Com isso, pelo Teorema 2.6, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, $\forall\ n \geq N$. Portanto, $|x_{n+1}| > |x_n|$, $\forall\ n \geq N$. Consequentemente, $|x_n| \geq |x_N|$, $\forall\ n \geq N$. Afirmamos que $\lim x_n \neq 0$. Caso contrário, $\lim x_n = 0$, encontramos $0 = \lim |x_n| \geq |x_N|$. Logo $0 \leq |x_N| \leq 0$. Ou seja, $|x_N| = 0$, Assim, $x_N = 0$. Isto é um absurdo, pois $x_N \neq 0$. Logo, $\lim x_n \neq 0$. Utilizando o Teorema 3.1, concluímos que $\sum x_n$ é divergente. Analogamente, se $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, $\forall\ n \geq N$. Portanto, $\sum x_n$ é divergente, exatamente pelo mesmo motivo exibido no caso $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = x > 1$. □

Obs 3.12. Se $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$, então não podemos concluir nada sobre a convergência da série $\sum x_n$ a partir deste fato. Vejamos exemplos que garantem esta afirmação. Considere a série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergente (ver exemplo 10.11). Veja que $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\dfrac{1}{(n+1)^2} n^2\right| = \lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = \lim \left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1^2 = 1$. Por outro lado, a série $\sum \dfrac{1}{n}$ divergente (ver exemplo 10.11) satisfaz: $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\dfrac{1}{(n+1)} n\right| = \lim \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

Exemplo 3.26. Considere a série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$. Vamos utilizar o Teorema 3.7 para verificar se esta série converge ou diverge. Seja $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Note que $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\dfrac{(-1)^{n+2}(n+1)}{2^{n+1}} \dfrac{2^n}{(-1)^{n+1}n}\right| = \lim \dfrac{n+1}{2}\dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{1}{2}\dfrac{n+1}{n} = \lim \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2} < 1$. Utilizando o Teorema 3.7, concluímos que $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$ é uma série absolutamente convergente.

Exemplo 3.27. A série $\sum \dfrac{n!}{n}$ é divergente. Para isto, seja $x_n = \dfrac{n!}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim \left|\dfrac{(n+1)!}{n+1} \dfrac{n}{n!}\right| = \lim \dfrac{(n+1)n!}{n+1} \dfrac{n}{n!} = \lim n = \infty$. Portanto, usando o teorema 3.7, $\sum \dfrac{n!}{n}$ é uma série divergente.

Teorema 3.8 (Teste da Raiz)**.** *Seja* $\sum x_n$ *uma série. Então:*

i) $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x < 1 \Rightarrow \sum x_n$ *é absolutamente convergente;*

ii) $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x > 1 \Rightarrow \sum x_n$ *é divergente.*

Demonstração. **i)** Suponha que $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x < 1$. Pelo Teorema 1.6 existe $q \in \mathbb{R}$ tal que $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x < q < 1$. Com isso, usando o Teorema 2.6, concluímos que $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|x_n|} < q$, $\forall\ n \geq N$. Portanto, $|x_n| < q^n$, $\forall\ n \geq N$. Sabemos que a série geométrica $\sum q^n = \sum q q^{n-1}$ é convergente, pois tem razão $q < 1$ (ver exemplo 3.7). Com o Teorema 3.3, obtemos que $\sum |x_n|$ é convergente, isto é, $\sum x_n$ é absolutamente convergente.
ii) Agora, suponha que $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = x > 1$. Com isso, pelo Teorema 2.6, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|x_n|} > 1$, $\forall\ n \geq N$. Portanto, $|x_n| > 1$, $\forall\ n \geq N$. Se (x_n) é convergente, temos que $\lim |x_n| \geq 1 > 0$ (ver Proposição 2.1). Logo, $\lim |x_n| > 0$. Ou seja, $\lim |x_n| \neq 0$. Ou equivalentemente, $\lim x_n \neq 0$ (ver exercícios de sequências). Assim, $\sum x_n$ é divergente (ver Teorema 3.1). Se (x_n) é divergente, então utilizando o Teorema 3.1, concluímos que $\sum x_n$ é divergente. De qualquer forma, $\sum x_n$ é divergente. $\square$

Obs 3.13. Se $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ nada pode ser concluído sobre a convergência da série a partir deste fato. Vamos verificar esta afirmação dando dois exemplos. Primeiramente considere a série $\sum 1$. Veja que $\lim \sqrt[n]{|1|} = \lim 1 = 1$. Por outro lado, $\sum 1$ é divergente pelo fato que $\lim 1 = 1 \neq 0$ (ver Teorema 3.1). Agora, considere a série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$. Com isso, $\lim \sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = 1$ (ver exercícios de sequências). Mas, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ é convergente (ver exemplo 3.21). Por isso, nada podemos concluir sobre a convergência de uma série se $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = 1$. A série pode ser convergente, como também pode ser divergente.

Exemplo 3.28. Dada a série $\sum \left(\dfrac{n+4}{4n+1}\right)^n$, temos que $\lim \sqrt[n]{\left(\dfrac{n+4}{4n+1}\right)^n} = \lim \dfrac{n+4}{4n+1} = \lim \dfrac{1+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{4} < 1$. Portanto, usando o Teorema 3.8, concluímos que $\sum \left(\dfrac{n+4}{4n+1}\right)^n$ é convergente.

Exemplo 3.29. Considere a série $\sum 3^n$. Observe que $\lim \sqrt[n]{3^n} = \lim 3 = 3 > 1$. Deste modo, usando o Teorema 3.8, concluímos que $\sum 3^n$ é divergente.

Exercícios de Fixação

1. Estabeleça a convergência ou a divergência das séries $\sum 2^{-\frac{1}{n}}$, $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ e $\sum \frac{n}{2^n}$.

2. Estabeleça a convergência ou a divergência das séries $\sum \frac{[n^2(n+1)]^{-\frac{1}{2}}}{n}$, $\sum \frac{n!}{n^n}$ e $\sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

3. Discuta a convergência ou a divergência das séries $\sum \frac{2^n}{\mathrm{e}^n}$, $\sum \frac{n!}{\mathrm{e}^n}$ e $\sum \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

4. Discuta a convergência ou a divergência das séries $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$, $\sum \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)}$ e $\sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)}$.

3.5 Rearranjo de Séries

Definição 3.7 (Rearranjo)**.** Dizemos que uma série $\sum y_n$ é o rearranjo de uma série $\sum x_n$ se existe bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{f(n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.30. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, por $f(2n-1) = 2n$ e $f(2n) = 2n-1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. f é um bijeção. Seja $x_n = 1/2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Considere a série $\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ Com isso, para y_n dado por $y_{2n} = x_{f(2n)} = x_{2n-1} = 1/2^{2n-1}$ e $y_{2n-1} = x_{f(2n-1)} = x_{2n} = 1/2^{2n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum y_n = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ... = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + ...$ é o rearranjo gerado pela bijeção f.

Teorema 3.9 (Teorema do Rearranjo)**.** *Seja $\sum x_n$ uma série absolutamente convergente. Então qualquer rearranjo $\sum y_n$ converge para o mesmo valor, ou seja, $\sum y_n = \sum x_n$.*

Demonstração. Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então, pelo Teorema 3.6, $\sum x_n$ é convergente, digamos que $\sum x_n = x$. Sejam (s_n), (t_n) e (p_n) as sequências de somas parciais das séries $\sum x_n$, $\sum |x_n|$ e $\sum y_n$, respectivamente. Assim sendo, $\lim s_n = x$. Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum |x_n|$ é convergente. Portanto, (t_n) é uma sequência convergente. Pelo Teorema 2.14, (t_n) é de Cauchy. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $|s_N - x| < \varepsilon/2$ e $|t_n - t_N| < \varepsilon/2$ (ver definições 2.5 e 2.12). Ou seja, $\sum_{m=N+1}^{n} |x_m| = |x_{N+1}| + |x_{N+2}| + ... + |x_n| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| - (|x_1| + |x_2| + ... + |x_N|) = |t_n - t_N| < \varepsilon/2$. Isto é, $\sum_{m=N+1}^{n} |x_m| < \varepsilon/2$, $\forall\, n \geq N$. Como $\sum y_n$ é o rearranjo de $\sum x_n$, então existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{f(n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Deste modo, existem únicos e distintos $a_1, a_2, ..., a_N$ tais que $f(a_i) = i$, $\forall\, i = 1, 2, ..., N$. Seja $M = \max\{a_1, a_2, ..., a_N\}$. Logo, $1 \leq a_i \leq M$, $\forall\, i = 1, 2, ..., N$. Ou seja, $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subseteq \{1, 2, ..., M\}$ ($\Rightarrow N \leq M$). Assim, a soma $p_M = y_1 + y_2 + ... + y_M = x_{f(1)} + x_{f(2)} + ... + x_{f(M)}$ contém os termos $x_1, x_2, ..., x_N$, pois $\{f(a_1) = 1, f(a_2) = 2, ..., f(a_N) = N\} \subseteq \{f(1), f(2), ..., f(M)\}$. Dessa forma, $\forall\, n > M \geq N$, tem-se que $|p_n - s_N| = |y_1 + ... + y_n - (x_1 + ... + x_N)| = |x_{f(1)} + ... + x_{f(n)} - (x_1 + ... + x_N)| = |x_{f(1)} + ... + x_{f(M)} + x_{f(M+1)} + ... + x_{f(n)} - (x_1 + ... + x_N)| \leq \sum_{m=N+1}^{n} |x_m| < \varepsilon/2$. Com isso, $\forall\, n > M$, tem-se que $|p_n - x| = |p_n - s_N + s_N - x| \leq |p_n - s_N| + |s_N - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Isto nos diz que $\lim p_n = x$. Ou seja, $\sum y_n = x = \sum x_n$. □

Obs 3.14. O Teorema 3.9 nos garante que quando a série é absolutamente convergente a convergência desta série independe da ordem em que as parcelas aparecem. Ou seja, podemos comutar os termos desta série que o resultado obtido será uma série que converge para o mesmo valor que a original.

Exemplo 3.31. No exemplo 3.30, vimos que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(2n-1) = 2n$ e $f(2n) = 2n-1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, gera o rearranjo $\sum y_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} + ...$ para a série $\sum \dfrac{1}{2^n}$. Como $\sum \dfrac{1}{2^n} = \sum \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$ é absolutamente convergente, então, pelo Teorema 3.9, $\sum y_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} + ... = 1$.

Exercícios de Fixação

1. Se a série $\sum x_n$ é condicionalmente convergente, mostre que existe um rearranjo desta série cuja sequência das somas parciais tende a ∞.

2. Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, é verdade que cada rearranjo desta série é absolutamente convergente?

3.6 Leitura Complementar

Definição 3.8 (Partes Positiva e Negativa de uma Sequência)**.** Seja (x_n) uma sequência. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$ e $x_n^- = \max\{-x_n, 0\}$. Chamamos x_n^+ e x_n^- as partes positiva e negativa de x_n.

Obs 3.15. Segue diretamente da definição 3.8 $x_n^+, x_n^- \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disso, $x_n^+ + x_n^- = |x_n|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (ver definição 1.6) e $x_n^+ - x_n^- = x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.32. Considere a sequência (x_n), onde $x_n = (-1)^n$. As partes positiva e negativa de x_n são, respectivamente, $x_n^+ = \max\{1, 0\} = 1$ e $x_n^- = \max\{-1, 0\} = 0$, se n é par e $x_n^+ = \max\{-1, 0\} = 0$ e $x_n^- = \max\{-(-1), 0\} = 1$, se n é ímpar.

Usaremos a definição 3.8 para provar que se retirarmos a hipótese que $\sum |x_n|$ converge do Teorema 3.9 e continuar supondo que $\sum x_n$ converge, então podemos encontrar um rearranjo de $\sum x_n$ convergindo para qualquer número real que desejarmos. Isto está formalmente enunciado no

Teorema 3.10 (Teorema de Riemann)**.** *Seja $\sum x_n$ uma série condicionalmente convergente. Seja $y \in \mathbb{R}$ um número qualquer. Existe um rearranjo $\sum y_n$, de $\sum x_n$, tal que $\sum y_n = y$.*

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Suponha que $\sum x_n$ é condicionalmente convergente. Ou seja, $\sum x_n$ converge, mas $\sum |x_n|$ diverge. Assim sendo, $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ divergem. Com efeito, lembre que $x_n^+ - x_n^- = x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, utilizando as observações do Teorema 3.2, concluímos que se ou $\sum x_n^+$ ou $\sum x_n^-$ converge, então $\sum x_n$ diverge. Absurdo, pois $\sum x_n$ converge. Suponha, por absurdo, que $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ convergem. Como $x_n^+ + x_n^- = |x_n|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então $\sum |x_n| = \sum [x_n^+ + x_n^-] = \sum x_n^+ + \sum x_n^-$ converge. Absurdo, pois $\sum |x_n|$ diverge. Consequentemente, $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ divergem. Sejam (s_n^+) e (s_n^-) as sequências das somas parciais para as séries $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$, respectivamente. Como $x_n^+, x_n^- \geq 0$, então $s_{n+1}^+ = s_n^+ + x_{n+1}^+ \geq s_n^+$ e $s_{n+1}^- = s_n^- + x_{n+1}^- \geq s_n^-$. Logo, (s_n^+) e (s_n^-) são sequências monótonas (crescentes). Como $\sum x_n^+$ e $\sum x_n^-$ divergem, então (s_n^+) e (s_n^-) divergem (ver definição 3.3). Pelo Teorema 2.4, (s_n^+) e (s_n^-) são sequências ilimitadas. As sequências (s_n^+) e (s_n^-) são crescentes, logo limitadas inferiormente por s_1^+ e s_1^-, respectivamente. Dessa forma, (s_n^+) e (s_n^-) são ilimitadas superiormente. Vamos agora criar um algorítmo para encontrar o rearranjo de $\sum x_n$ que converge para y. Começe a somar os primeiros termos positivos da série $\sum x_n$ na ordem em que eles aparecem. Em algum momento esta soma ultrapassará y, isto ocorre já que (s_n^+) é ilimitada superiormente, ou seja, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y < s_{n_1}^+ = x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{n_1}^+$ a soma dos primeiros termos positivos da série $\sum x_n$ na ordem em que eles aparecem até x_{n_1} (ver definição 3.8), isto é, os termos $x_1^+, x_2^+, ..., x_{n_1}^+$ encontrados serão os primeiros termos do rearranjo que estamos procurando $(x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{n_1}^+ > y)$. Agora, começe a somar à soma $x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{n_1}^+$ os termos negativos de $\sum x_n$ na ordem em que eles aparecem, a partir de x_1, até que a soma seja inferior a y, isto sempre ocorre pois (s_n^-) é ilimitada superiormente, ou seja, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $y - s_{n_1}^+ > -s_{n_2}^- = -x_1^- - x_2^- - ... - x_{n_2}^-$ a soma dos termos negativos da série $\sum x_n$, a partir de x_1, na ordem em que eles aparecem (ver definição 3.8) até x_{n_2} $(x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{n_1}^+ - x_1^- - x_2^- - ... - x_{n_2}^- < y)$. Acrescente estes termos negativos aos termos positivos já encontrados para o rearranjo procurado, ou seja, $x_1^+ + x_2^+ + ... + x_{n_1}^+ - x_1^- - x_2^- - ... - x_{n_2}^-$ é a n_2-ésima soma parcial do rearranjo procurado. Repita o processo, a partir de x_{n_1}. Com este processo encontramos um rearranjo $\sum y_n$ (o qual posui os mesmos termos da série $\sum x_n$, só que com parcelas comutadas) de $\sum x_n$. Seja (t_n) a sequência das somas parciais de $\sum y_n$, então palo algorítmo criado, encontramos a seguinte desigualdade: $t_{n_{2k}} < y < t_{n_{2k-1}}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Pela escolha dos índices n_k, temos que $0 < t_{n_{2k-1}} - y \leq x_{n_{2k-1}}^+$ e $0 < y - t_{n_{2k}} \leq -x_{n_{2k}}^-$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Como $|x_n| = x_n^+ + x_n^- \geq x_n^+, x_n^- \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, e $\lim x_n = 0$ (ver Teorema 3.1), então $\lim x_n^+ = \lim x_n^- = 0$ (ver Teorema 5.4). Pelo Teorema 2.2, obtemos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_{2k-1}}^+ = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_{2k}}^- = 0$. Usando o Teorema 5.4, concluímos que $\lim\limits_{k\to\infty} (t_{n_{2k-1}} - y) = \lim\limits_{k\to\infty} (y - t_{n_{2k}}) = 0$. Ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_{2k-1}} = \lim\limits_{k\to\infty} t_{n_{2k}} = y$. Por fim, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = y$ (ver exercícios de sequências). Como $x_n^-, x_n^+ \geq 0$, então $n_{2k-1} \leq n \leq n_{2k} \Rightarrow t_{n_{2k-1}} \leq t_n \leq t_{n_{2k}}$ e $n_{2k} \leq n \leq n_{2k+1} \Rightarrow t_{n_{2k}} \leq t_n \leq t_{n_{2k+1}}$ $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\lim t_n = y$. Isto é, $\sum y_n = y$. $\square$

Exemplo 3.33. Vamos encontrar um rearranjo para a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converge para 0. Vamos utilizar o algoritmo explicado na demonstração do Teorema 3.10. Veja que $1 > 0$. Assim, o rearranjo tem como primeiro termo 1. Agora some a 1 todos os termos negativos da série até encontrar um resultado < 0, ou seja, $1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 < 0$. Estes são os 5 primeiros termos do rearranjo. Acrescente a esta soma a soma dos númeors positivos, após o 1, de forma que o resultado seja > 0. Isto é, $1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 + 1/3 > 0$. Continuando o processo encontraremos o rearranjo $1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 + 1/3 - ...$, o qual convergirá para 0, pelo Teorema 3.10.

Exercícios de Fixação

1. Encontre um rearranjo da série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converge para 1.

2. Encontre um rearranjo da série $\sum \dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$ que converge para 2.

3.7 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar que é possível indentificar, com uma grande possibilidade de acerto, qual teste deve ser utilizado para obter um resultado conclusivo. Por exemplo, quando o termo geral de uma série envolve fatoriais, produtos ou constantes elevadas a n é provável que o Teste da Razão afirme se a série converge ou diverge. Ou se o n-ésimo termo da série for da forma x_n^n, o Teste da Raiz é o melhor candidato para os Testes de Convergência. Portanto, convidamos ao aluno a resolução da maior quantidade de exercícios possível para que o aluno identifique rapidamente qual teste deve ser utilizado com uma alta probabilidade de conclusão. Ou que pelo menos você conheça quais testes que com certeza não podem ser utilizados.

3.8 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, alguns testes para verificar se uma série é convergente ou divergente. Os principais testes são: Teste da Comparação, Teste da Razão e Teste da Raiz. Além destes testes, mostramos algumas propriedades elmentares entre séries. Por exemplo, provamos que é possível somar séries convergentes, somando termo a termo as duas séries. Além disso, o resultado obtido é novamente uma série convergente.

3.9 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Dadas as séries $\sum x_n, \sum y_n$, com $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $y_n = \ln(1 + 1/n)$, mostre que $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Calcule explicitamente as n-ésimas somas parciais s_n e t_n destas séries e mostre que $\lim s_n = \lim t_n = \infty$, logo as séries dadas são divergentes.

2. Prove que a série $\sum \ln n/n^2$ é convergente.

3. Se $\sum x_n$ é convergente e $x_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum x_n y^n$, é absolutamente convergente, $\forall\ y \in [-1, 1]$ e $\sum x_n \text{sen}(ny)$, $\sum x_n \cos(ny)$ são absolutamente convergentes $\forall\ y \in \mathbb{R}$.

4. Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente e $\lim y_n = 0$, ponha $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ... + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ e prove que $\lim z_n = 0$.

5. Se $\sum x_n^2$ e $\sum y_n^2$ convergem, prove que $\sum x_n y_n$ converge absolutamente.

6. Prove: uma série $\sum x_n$ é absolutamente convergente $\Leftrightarrow$ a sequência das somas parciais (s_n) é limitada.

7. Determine se a série $\sum (\ln n/n)^n$ é convergente usando os Testes da Razão e Raiz.

8. Prove: se $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq ... \geq 0$ e $\sum x_n$ converge então $\lim n x_n = 0$.

9. Dada uma sequência de números positivos x_n com $\lim x_n = x$, prove que $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = x$.

10. Determine para quais valores de x cada uma das séries é convergente: $\sum n^n x^n$, $\sum x^n/n^n$, $\sum n! x^n$, $\sum x^n/n^2$.

11. Se uma série é condicionalmente convergente, prove que existem alterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a ∞ e $-\infty$.

12. Efetue explicitamente um rearranjo dos termos da série $\sum (-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ de omodo que sua soma se torne igual a zero.

3.10 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Use o Teste da Comparação para provar que a série $\sum 1/n^2$ é convergente, a partir da convergência de $\sum 2/n(n+1)$.

Demonstração. Como $\sum 1/n^2$ é convergente, então, pelo Teorema 3.2, $\sum 2/n^2$ é convergente. Além disso, $\dfrac{2}{n(n+1)} \le \dfrac{2}{n^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n(n+1)} \le \dfrac{1}{n^2} \Leftrightarrow n(n+1) \ge n^2 \Leftrightarrow n^2+n \ge n^2 \Leftrightarrow n \ge 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.3 $\sum 2/n(n+1)$ é convergente. $\square$

Ex2. Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum x_n^2$ converge.

Demonstração. Como $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum |x_n|$ é convergente. Usando o Teorema 3.1, concluímos que $\lim |x_n| = 0$. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \ge N$, tem-se $|x_n| < 1$ (faça $\varepsilon = 1 > 0$ na definição 2.6). Com isso, $x_n^2 = |x_n|^2 \le |x_n| \Leftrightarrow |x_n|^2 - |x_n| \le 0 \Leftrightarrow |x_n|(|x_n| - 1) \le 0$, $\forall\ n \ge N$. Mas, esta última desigualdade é satisfeita, já que $|x_n| < 1$, $\forall\ n \ge N$. Logo, utilizando o Teorema 3.3, $\sum x_n^2$ é convergente. $\square$

Ex3. Determine para quais valores de x a série $\sum n^k x^n$ é convergente.

Demonstração. Veja que $\lim \left|\dfrac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n}\right| = \lim \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k |x| = |x| \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k = |x|$. Usando o Teorema 3.7, $\sum n^k x^n$ é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $x = 1$ ou $x = -1$, encontramos as séries $\sum n^k$ ou $\sum n^k(-1)^n$. Estas séries são divergentes, pois os termos gerais destas séries são ilimitados (logo, divergentes). Dessa forma, $\sum n^k x^n$ converge absolutamente no intervalo $(-1, 1)$ e diverge para os valores de x que satisfazem $|x| \ge 1$. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de determinar, utilizando os Testes de Convergência, se uma série é convergente?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estudaremos o conjunto dos números reais com um microscópio. Isto é, procuraremos saber quais são as características de um número real quando olhamos para os números que estão tão próximos dele quanto quisermos ou for suficiente.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[4] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo