Capítulo 4

Topologia em $\mathbb{R}$

Aula 4: Topologia em $\mathbb{R}$

Meta

Apresentar o que são pontos interior, aderente, de acumulação e de fronteira, e quais conjuntos são compactos.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar quais conjuntos são abertos, quais são fechados e quais são compactos em $\mathbb{R}$.

Pré-requisitos

Aula 3, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

4.1 Introdução

Oi, nesta aula, discutiremos a topologia do conjunto dos números reais. Neste momento, é bom que você aluno, tenha a mente aberta para os novos conceitos que surgem agora. Encontraremos, no decorrer desta aula, conceitos que parecem contraditórios, mas têm sentido pleno em Matemática. Por exemplo, é comum do nosso cotidiano afirmar que uma porta ou está aberta ou está fechada, todavia não é possível encontrar alguma porta aberta e fechada ao mesmo tempo. Em Topologia, é fato, que existem conjuntos que qualificamos como aberto e fechado simultaneamente. Parece ser absurdo este fato, porém é perfeitamente provável na ciência Matemática. Os conteúdos encontrados, nesta aula, são provados e exemplificados, na maioria dos casos, com os resultados estabelecidos na aula 2. Por fim, convidamos você aluno a viajar na ciência da abstração.

4.2 Conjuntos Abertos em $\mathbb{R}$

Definição 4.1 (Ponto Interior)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto interior a X, e escrevemos $x \in \text{int}X$, se $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X$. O conjunto $\text{int}X = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto interior a } X\}$ é chamado conjunto interior de X.

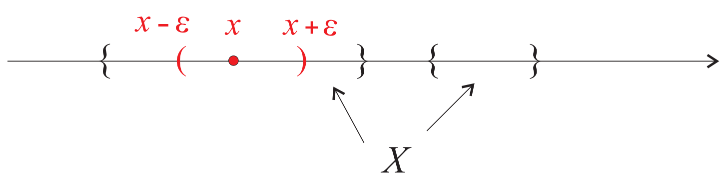

Figura 4.1: $x \in \text{int}X$

Obs 4.1. O número real positivo ε depende somente de x, isto é, $\varepsilon = \varepsilon(x)$.

Obs 4.2. Observe que $\text{int}X \subseteq X$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. De fato, considere $X \neq \emptyset$ e seja $x \in \text{int}X$, então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X$. Portanto, $x \in X$. Ou seja, $\text{int}X \subseteq X$. Agora, seja $X = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in \text{int}\emptyset$. Dessa forma, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \emptyset$. Absurdo!. Por fim, $\text{int}\emptyset = \emptyset \subseteq \emptyset$.

Obs 4.3. Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\text{int}X \subseteq \text{int}Y$. Com efeito, dado $x \in \text{int}X$, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X$. Por outro lado $X \subseteq Y$. Consequentemente, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq Y$. Portanto, $x \in \text{int}Y$. Ou seja $\text{int}X \subseteq \text{int}Y$.

Exemplo 4.1. Seja $x \in (a,b)$. Note que $x \in \text{int}(a,b)$. De fato, seja $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{x-a}{2}, \dfrac{b-x}{2}\right\} > 0$. Logo, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$. Analogamente, prova-se que qualquer ponto de (a,∞), $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ é ponto interior.

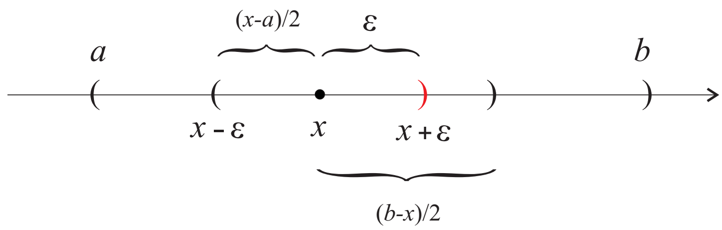

Figura 4.2: $x \in \text{int}(a,b)$, considerando $\varepsilon = (x-a)/2$.

Exemplo 4.2. O ponto a não é interior a $[a,b]$, pois $\forall\ \varepsilon > 0$ temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subseteq [a,b]$. De fato, pelo Teorema 1.6, existe $x \in (a-\varepsilon, a) \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ racional. Com isso, $x < a$. Isto é $x \notin [a,b]$. Isto nos diz que $a \notin \text{int}\ [a,b]$. Analogamente, prova-se que $b \notin \text{int}\ [a,b]$. Como $(a,b) \subseteq [a,b]$, então $(a,b) = \text{int}(a,b) \subseteq \text{int}\ [a,b] \subseteq [a,b]$. Mas, $a, b \notin \text{int}\ [a,b]$. Portanto, $(a,b) \subseteq \text{int}\ [a,b] \subseteq (a,b)$. Ou seja, $\text{int}\ [a,b] = (a,b)$. Analogamente, $\text{int}\ [a,\infty) = (a,\infty)$, $\text{int}\ (-\infty,b] = (-\infty,b)$.

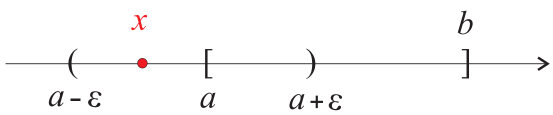

Figura 4.3: $a \notin \text{int}[a,b]$

Exemplo 4.3 (Interior de $\mathbb{Q}$)**.** $\text{int}\mathbb{Q} = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que existe $x \in \text{int}\mathbb{Q}$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$. Mas, usando o Teorema 1.6, existe irracionais em $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Então, $\text{int}\mathbb{Q} = \emptyset$. Analogamente, $\text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$

Definição 4.2 (Conjunto Aberto)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto X é dito aberto em $\mathbb{R}$ se $\text{int}X = X$.

Obs 4.4. Como $\text{int}X \subseteq X$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$, então para provar que um conjunto X é aberto basta provar que $X \subseteq \text{int}X$. Ou seja, que todo ponto do conjunto é interior a este.

Exemplo 4.4. Vimos no exemplo 4.1 que (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ e $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ são exemplos de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$. O conjunto $\emptyset$ é aberto, pois $\emptyset \subseteq \text{int}\emptyset \subseteq \emptyset$.

Exemplo 4.5. O exemplo 4.2 nos garante que os conjuntos $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ não são abertos.

Exemplo 4.6. int$X$ é aberto, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $x \in$ int$X$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X$. Com isso, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) =int(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq$ int$X$ (ver observação 4.3). Ou seja, $x \in$ int(int$X$). Dessa forma, int$X \subseteq$ int(int$X$). Isto é, int$X$ é aberto.

Teorema 4.1 (União e Interseção de Abertos)**.** *As seguintes afirmações são válidas:*

i) *A interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto;*

ii) *A união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração. **i)** Sejam X_1 e X_2 conjuntos abertos. Vamos provar que $X_1 \cap X_2$ é um conjunto aberto. Seja $x \in X_1 \cap X_2$, então $x \in X_1$ e $x \in X_2$. Portanto, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subseteq X_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subseteq X_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$. Dessa forma, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1), (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$. Consequentemente, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_1, X_2$. Assim, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_1 \cap X_2$. Isto nos diz que $x \in$ int$(X_1 \cap X_2)$. Ou seja, $X_1 \cap X_2$ é aberto. A prova do caso geral segue por indução sobre a quantidade de abertos.
ii) Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família qualquer de abertos. Vamos provar que $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é aberto. Seja $x \in X$. Portanto, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in X_{\lambda_0}$. Como X_{λ_0} é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X_{\lambda_0} \subseteq X$. Assim, $x \in$ int$X$. Ou seja, X é aberto. $\square$

Obs 4.5. Não podemos afirmar que a interseção qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Por exemplo, seja $X_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Sabemos que X_n é aberto, para cada $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $\cap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \{0\}$. Porém, $\{0\}$ não é aberto. Suponha, por absurdo, que int$\{0\} = \{0\}$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) \subseteq \{0\}$. Mas, usando o Teorema 1.6, existe um irracional em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Daí, $(-\varepsilon, \varepsilon) \nsubseteq \{0\}$. Logo, $\{0\}$ não é aberto.

Exercícios de Fixação

1. Mostre que $\mathbb{Z}$ não é aberto.

2. Mostre que $\mathcal{C}\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{N}\}$ é aberto.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $Y = \cup A$, onde $A \subseteq X$ é aberto. Mostre que Y é aberto. Mostre que, $x \in Y \Leftrightarrow x \in$ int$X$.

4.3 Conjuntos Fechados em $\mathbb{R}$

Definição 4.3 (Ponto Aderente)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente a X se existe uma sequência $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$.

Exemplo 4.7. Todo ponto $x \in X$ é ponto aderente a X. De fato, considere a sequência constante $x_n = x \in X$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (ver exemplo 2.5). Assim sendo, $\lim x_n = x$. Portanto, x é aderente a X. 0 é aderente a $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, pois $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 4.8. O ponto a é aderente a (a, b). Com efeito, a sequência $\left(a + \frac{1}{n}\right)$ para n sufisientemente grande está contida em (a, b) e $\lim \left(a + \frac{1}{n}\right) = a$. Analogamente, b é aderente a (a, b). Analogamente, prova-se que a e b são aderentes a $(a, b]$, $[a, b), [a, b], (a, \infty), [a, \infty)$, $(-\infty, b), (-\infty, b]$. Observe que, se $(x_n) \subseteq (a, b)$ é uma sequência convergente, então $a < x_n < b$, $\forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq \lim x_n \leq b$. Ou seja, se x é aderente a (a, b), então $x \in [a, b]$. Dessa forma, $b + 1$ não é aderente a (a, b). Analogamente, se x é aderente a $(a, \infty), [a, \infty)$ então $x \in [a, \infty)$. E se x é aderente a $(-\infty, b), (-\infty, b]$ então $x \in (-\infty, b]$.

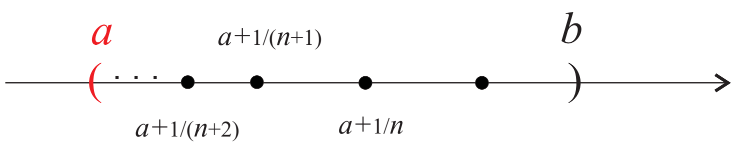

Figura 4.4: a é ponto aderente a (a, b)

Exemplo 4.9. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio, limitado inferiormente. Então, $\inf X$ é um ponto aderente de X. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $\inf X \leq x_n < \inf X + \frac{1}{n}$ (ver definição 1.12). Usando o Teorema do Sanduíche, temos que $\lim x_n = \inf X$ (ver exemplo 2.6). Ou seja, $\inf X$ é aderente a X. Analogamente, $\sup X$ é aderente a X, caso X seja não-vazio e limitado superiormente.

Definição 4.4 (Fecho)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Chamamos o conjunto $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto aderente a } X\}$ de fecho do conjunto X.

Obs 4.6. Segue da definição 4.4 que se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$. De fato, seja $x \in \overline{X}$, então existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$. Por outro lado, $X \subseteq Y$. Assim sendo, $(x_n) \subseteq Y$ tal que $\lim x_n = x$. Portanto, $x \in \overline{Y}$.

Exemplo 4.10. O exemplo 4.7 nos permite concluir que $X \subseteq \overline{X}$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$ e que $0 \in \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Exemplo 4.11. O exemplo 4.8 nos garante que $\overline{(a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{[a,b]} = [a,b]$, $\overline{(a,\infty)} = \overline{[a,\infty)} = [a,\infty)$ e que $\overline{(-\infty,b)} = \overline{(-\infty,b]} = (-\infty,b]$.

Exemplo 4.12. Se X é um conjunto não-vazio e limitado, então $\inf X, \sup X \in \overline{X}$.

Definição 4.5 (Conjunto Fechado)**.** Dizemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$ se $X = \overline{X}$.

Obs 4.7. Vimos que $X \subseteq \overline{X}$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Assim para provar que X é fechado basta mostrar que $\overline{X} \subseteq X$.

Exemplo 4.13. Os conjuntos $[a,b]$ e $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ são fechados.

Exemplo 4.14. $(a,b), (a,b], [a,b), (a,\infty), (-\infty,b)$ são exemplos de conjuntos não-fechados (ver exemplo 4.11).

Uma outra maneira de caracterizar ponto aderente está enunciada no seguinte

Teorema 4.2 (Caracterização do Fecho)**.** $x \in \overline{X} \Leftrightarrow$ *dado* $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, *tem-se que* $X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $x \in \overline{X}$. Então existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Mas, $x_N \in X$, pois $(x_n) \subseteq X$. Portanto, $x_N \in X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Ou seja, $X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$) Dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $X \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$. Isto é, $\exists\ x_n \in X \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$. Ou seja, $\exists\ (x_n) \subseteq X$, com $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$. Usando o Teorema do Sanduíche, concluímos que $\lim x_n = x$ (ver exemplo 2.6). Dessa forma, $x \in \overline{X}$. □

Exemplo 4.15 (Fecho de $\mathbb{Q}$)**.** $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. De fato, dados $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ sabemos, pelo Teorema 1.6, que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Logo, $x \in \overline{Q}, \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$. Ou seja, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Teorema 4.3. *$X \subseteq \mathbb{R}$ é fechado $\Leftrightarrow \mathcal{C}X$ é aberto. (Aqui $\mathcal{C}X = \mathbb{R} \setminus X$ é o conjunto complementar de X em $\mathbb{R}$).*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que X é fechado, isto é, $\overline{X} = X$. Vamos provar que $\mathcal{C}X$ é aberto. Seja $x \in \mathcal{C}X$. Logo, $x \notin X$. Consequentemente, $x \notin \overline{X}$. Usando o Teorema 4.2, existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$. Ou seja, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}X$. Dessa forma, $x \in \operatorname{int}(\mathcal{C}X)$. Por fim, $\mathcal{C}X \subseteq \operatorname{int}(\mathcal{C}X)$. Isto nos diz que, $\mathcal{C}X$ é aberto.
$\Leftarrow$) Agora, considere que $\mathcal{C}X$ é aberto, isto é, $\operatorname{int}(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}X$. Seja $x \in \overline{X}$. Vamos provar que $x \in X$. Utilizando o Teorema 4.2, temos que, dado $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$. Portanto, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \nsubseteq \mathcal{C}X$. Então, $x \notin \operatorname{int}(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}X$. Logo, $x \in X$. Com isso, $\overline{X} \subseteq X$. Ou seja, X é fechado. $\square$

Exemplo 4.16. Vimos que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são abertos. Logo, $\emptyset = C\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} = C\emptyset$ são fechados. Isto nos mostra que aberto e fechado não são caracterizações excludentes.

Exemplo 4.17. Vejamos como mostrar que $\mathcal{C}\overline{X} = \operatorname{int}(\mathcal{C}X)$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Usando o Teorema 4.2, temos que:

$$x \in \mathcal{C}\overline{X} \Leftrightarrow x \notin \overline{X} \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset \Leftrightarrow (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}X \Leftrightarrow x \in \operatorname{int}(\mathcal{C}X).$$

Assim sendo, pelo exemplo 4.6, $\mathcal{C}\overline{X} = \operatorname{int}(\mathcal{C}X)$ é aberto. Utilizando o Teorema 4.3, $\overline{X}$ é fechado, isto é, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Teorema 4.4. *As seguintes afirmações são válidas:*

i) *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*

ii) *A interseção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração. **i)** Sejam X_1, X_2 fechados. Então $X = X_1 \cup X_2$ é fechado. De fato, $\mathcal{C}X = \mathcal{C}(X_1 \cup X_2) = \mathcal{C}X_1 \cap \mathcal{C}X_2$. Como X_1 e X_2 são fechados, então $\mathcal{C}X_1$ e $\mathcal{C}X_2$ são abertos, pelo Teorema 4.3. Vimos no Teorema 4.1 que $\mathcal{C}X_1 \cap \mathcal{C}X_2$ é aberto. Portanto, $\mathcal{C}X$ é aberto. Novamente usando o Teorema 4.3, concluímos que X é fechado. O caso geral segue por indução sobre o número de fechados.
ii) Seja $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ uma família qualquer de conjuntos fechados. Seja $X = \cap_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$. Portanto, $\mathcal{C}X = \mathcal{C}(\cap_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma) = \cup_{\gamma \in \Gamma}(\mathcal{C}X_\gamma)$. Como cada X_γ é fechado, então, pelo Teorema 4.3, $\mathcal{C}X_\gamma$ é aberto. Usando o Teorema 4.1, concluímos que $\cup_{\gamma \in \Gamma}(\mathcal{C}X_\gamma)$ é aberto. Ou seja, $\mathcal{C}X$ é aberto. Ou equivalentemente, X é fechado, pelo Teorema 4.1. $\square$

Obs 4.8. Observe que a união qualquer de fechados não, necessariamente, é fechado. De fato, $(0,1) = \cup_{x\in(0,1)}\{x\}$. Veja que $\mathcal{C}\{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$. Logo, $\mathcal{C}\{x\}$ é aberto (ver Teorema 4.1). Então, $\{x\}$ é fechado. Porém $(0,1)$ não é fechado. Ou seja, temos uma união de fechados que não é fechado.

Vamos inserir pré-requisito para poder provar que os únicos conjuntos que são abertos e fechados em $\mathbb{R}$ são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Primeiramente, estabeleceremos a seguinte

Definição 4.6 (Cisão)**.** Dizemos que $(X|Y)$ é uma cisão do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se $A = X \cup Y$, $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$.

Obs 4.9. A cisão $(A|\emptyset)$ é denominada cisão trivial de $A \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 4.18. Seja $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $((-\infty,0)|(0,\infty))$ é uma cisão para X. De fato, $X = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, $\overline{(-\infty,0)} \cap (0,\infty) = (-\infty,0] \cap (0,\infty) = \emptyset$ e $(-\infty,0) \cap \overline{(0,\infty)} = (-\infty,0) \cap [0,\infty) = \emptyset$.

Exemplo 4.19. Seja $X = [1,3]$. $([1,2]|(2,3])$ não é uma cisão de X. Com efeito, $2 \in [1,2] \cup \overline{(2,3]}$. Ou seja $[1,2] \cup \overline{(2,3]} \neq \emptyset$. Isto mostra a afirmação.

Teorema 4.5. *Qualquer intervalo em $\mathbb{R}$ não-degenerado admite somente a cisão trivial.*

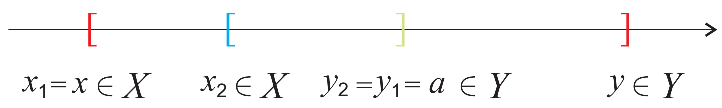

Figura 4.5: Idéia da demonstração até o passo $n = 2$

Demonstração. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não-degenerado. Suponha, por absurdo, que $(X|Y)$ é uma cisão não-trivial de I, i.e, $I = X \cup Y$, $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$ e X, Y são não-vazios. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Logo, $[x,y] \subseteq I$. Como $X \subseteq \overline{X}$ e $Y \subseteq \overline{Y}$, então $X \cap Y = \emptyset$. Dessa forma, $x \notin Y$ e $y \notin X$. Seja $a = \dfrac{x+y}{2} \in I = X \cup Y$. Se $a \in Y$, então faça $x_1 = x \in X$ e $y_1 = a \in Y$. Logo, $[x_1, y_1] \subseteq [x,y]$. Se $a \in X$, então faça $x_1 = a \in X$ e $y_1 = y \in Y$. Logo, $[x_1, y_1] \subseteq [x,y]$. De qualquer maneira $y_1 - x_1 = \dfrac{y-x}{2}$, $x_1 \in X$ e $y_1 \in Y$. Indutivamente, suponha que $I \supseteq [x,y] \supseteq [x_1,y_1] \supseteq ... \supseteq [x_n,y_n]$, $y_i - x_i = \dfrac{y-x}{2^i}$, $x_i \in X$ e $y_i \in Y$, $\forall\ i = 1,2,...,n$. Seja $a_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2} \in I = X \cup Y$. Se $a_{n+1} \in X$, então faça $x_{n+1} = a_{n+1} \in X$ e $y_{n+1} = y_n \in Y$. Logo, $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$. Se $a_{n+1} \in Y$, então faça

$x_{n+1} = x_n \in X$ e $y_{n+1} = a_{n+1} \in Y$. Logo, $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$. De qualquer maneira $y_{n+1} - x_{n+1} = \dfrac{y_n - x_n}{2} = \dfrac{y-x}{2^{n+1}}$, $x_{n+1} \in X$ e $y_{n+1} \in Y$. Consequentemente, $I \supseteq [x, y] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq ... \supseteq [x_n, y_n] \supseteq ...$, $y_n - x_n = \dfrac{y-x}{2^n}$, $x_n \in X$ e $y_n \in Y$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Usando o Teorema dos Intervalos Encaixados, $\cap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n] \neq \emptyset$. Ou seja, $\exists\, b \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n]$. Isto é, $x_n \leq b \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(b \in I)$. Mas, $(x_n), (y_n) \subseteq [x, y]$. Logo, (x_n) e (y_n) são limitadas. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência, se necessário, $\lim x_n$ e $\lim y_n$ existem. Por outro lado, $\lim y_n - \lim x_n = \lim(y_n - x_n) = \lim \dfrac{y-x}{2^n} = 0$, pois $\lim 2^n = \infty$. Portanto, $\lim x_n = \lim y_n$. Com isso, pelo Teorema do Sanduíche, $\lim x_n \leq b \leq \lim y_n = \lim x_n$. Ou seja, $b = \lim x_n = \lim y_n$. Assim sendo, $b \in \overline{X}, \overline{Y}$. Dessa forma, $b \notin X$ e $b \notin Y$, pois $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$. Logo, $b \notin I$. Absurdo! $\square$

Corolário 4.6. *$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são os únicos conjuntos que são abertos e fechados em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto aberto e fechado em $\mathbb{R}$. Vamos provar que $X = \mathbb{R}$ ou $X = \emptyset$. De fato, sabemos que $\mathbb{R} = X \cup \mathcal{C}X$. Além disso, $\overline{X} \cap \mathcal{C}X = X \cap \overline{\mathcal{C}X} = X \cap \mathcal{C}X = \emptyset$, pois X e $\mathcal{C}X$ são fechados (ver Teorema 4.3). Logo, $(X|\mathcal{C}X)$ é uma cisão de $\mathbb{R}$. Porém $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ é um intervalo não-degenerado. Assim, pelo Teorema 4.5, $(X|\mathcal{C}X)$ é uma cisão trivial. Ou seja, $X = \mathbb{R}$ ou $X = \emptyset$. $\square$

Exercícios de Fixação

1. Mostre que $\mathbb{N}$ é fechado.

2. Mostre que $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não é fechado.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $Y = \cap A$, onde $A \supseteq X$ é fechado. Então Y é fechado.

4.4 Ponto de Fronteira em $\mathbb{R}$

Definição 4.7 (Fronteira)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de X se $\forall\ \varepsilon > 0$, tem-se que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C}X \neq \emptyset$. O conjunto $\text{Fr}X = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de fronteira de } X\}$ é denominado conjunto fronteria de X em $\mathbb{R}$.

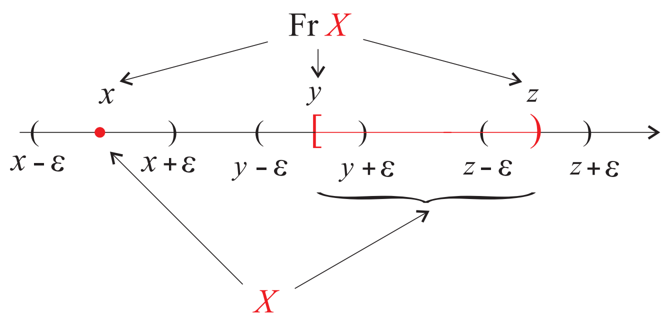

Figura 4.6: Exemplo de fronteira

Obs 4.10. Seguindo a definição 4.7, concluímos que $\text{Fr}X = \text{Fr}(\mathcal{C}X)$.

Exemplo 4.20. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, basta utilizar o Teorema 1.6. Assim, $x \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de $\mathbb{Q}$ e de $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Portanto, $\text{Fr}\mathbb{Q} = \text{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Exemplo 4.21. Usando novamente o Teorema 1.6, temos que $a, b \in \mathbb{R}$ são pontos de fronteira de (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de (a, ∞), $[a, \infty)$ e $b \in \mathbb{R}$ é ponto de fronteira de $(-\infty, b)$ e $(-\infty, b]$. Agora, se $a < x < b$, $y < a$ e $b < z$, então existem $\varepsilon = \min\{(b-x)/2, (x-a)/2\} > 0$, $\delta = (a-y)/2 > 0$ e $\lambda = (z-b)/2$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C}(a, b) = \emptyset$, $(y-\delta, y+\delta) \cap (a, b) = \emptyset$ e $(z-\lambda, z+\lambda) \cap (a, b) = \emptyset$. Portanto, $\text{Fr}(a, b) = \text{Fr}[a, b) = \text{Fr}(a, b] = \{a, b\}$. Analogamente, $\text{Fr}(a, \infty) = \text{Fr}[a, \infty) = \{a\}$ e $\text{Fr}(-\infty, b) = \text{Fr}(-\infty, b] = \{b\}$.

Vejamos uma outra maneira de caracterizar conjuntos fechados em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.1. *$X \subseteq \mathbb{R}$ é fechado $\Leftrightarrow$ $\text{Fr}X \subseteq X$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que X é fechado, isto é, $\overline{X} = X$. Seja $x \in \text{Fr}X$, daí $\forall\ \varepsilon > 0$, tem-se que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Usando o Teorema 4.2, temos que $x \in \overline{X} = X$. Daí, $\text{Fr}X \subseteq X$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, considere que Fr$X \subseteq X$. Seja $x \in \overline{X}$. Novamente utilizando o Teorema 4.2, sabemos que $\forall\ \varepsilon > 0$, tem-se $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Suponha que $x \in \mathcal{C}X$. Logo, $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathcal{C}X \neq \emptyset$. Consequentemente, $x \in$ Fr$X \subseteq X$. Ou seja, $x \in X$, mas $x \in \mathcal{C}X$. Contradição! Daí, $x \notin \mathcal{C}X$, isto é, $x \in X$. Por fim, $\overline{X} \subseteq X$. Ou seja, X é fechado. $\square$

Exemplo 4.22. Usando o exemplo 4.21 e a Proposição 4.1, vemos de uma outra maneira que $(0,1)$ não é fechado, já que $\mathrm{Fr}(0,1) = \{0,1\} \nsubseteq (0,1)$.

Uma outra maneira de verificar se um conjunto é aberto em $\mathbb{R}$ está descrita no seguinte

Exemplo 4.23. $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto $\Leftrightarrow$ $A\cap$ Fr$A = \emptyset$. De fato, usando a Proposição 4.1 e o Teorema 4.2, concluímos que: $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}A$ é fechado $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(\mathcal{C}A) \subseteq \mathcal{C}A \Leftrightarrow$ $\mathrm{Fr}A \cap A = \emptyset$.

Exercícios de Fixação

1. Encontre os seguintes conjuntos Fr$\mathbb{N}$, Fr$\mathbb{Z}$, Fr$\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, Fr$\mathbb{R}$ e Fr$\emptyset$.

4.5 Ponto de Acumulação em $\mathbb{R}$

Definição 4.8 (Ponto de Acumulação)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se $\exists\ (x_n) \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $\lim x_n = x$.

Obs 4.11. O conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x$ é ponto de acumulação de $X\}$ é denotado por X'.

Obs 4.12. Segue diretamente das definições 4.8 e 4.4 que $X' \subseteq \overline{X}$.

Exemplo 4.24. $0 \in X'$, onde $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. De fato, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right) \subseteq X \setminus \{0\}$ satisfaz: $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 4.7 (Caracterização de Ponto de Acumulação)**.** *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$. Então $x \in X' \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, tem-se que $(X \setminus \{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $x \in X'$. Então existe $(x_n) \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $\lim x_n = x$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, mas $x_N \in X \setminus \{x\}$. Logo, $(X \setminus \{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$) Seja $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, tem-se que $(X \setminus \{x\}) \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$. Ou seja, $\exists\ x_n \in (X \setminus \{x\}) \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$. Isto é, $(x_n) \subseteq X \setminus \{x\}$ e $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$. Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim x_n = x$ (ver exemplo 2.6). Portanto, $x \in X'$. $\square$

Exemplo 4.25. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números interiros. Dado $z \in \mathbb{Z}$, temos que $z \notin \mathbb{Z}'$. Com efeito, $(\mathbb{Z} \setminus \{z\}) \cap (z - 1, z + 1) = \emptyset$. Assim, o Teorema 4.7 confirma a afirmação.

Obs 4.13. Observe que $x \in \overline{X \setminus \{x\}} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, tem-se que $(X \setminus \{x\}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in X'$. Ou seja, $x \in \overline{X \setminus \{x\}} \Leftrightarrow x \in X'$. Basta usar os Teoramas 4.2 e 4.7.

Exemplo 4.26. Usando a Observação 4.13, temos que $0 \in [0, 1)'$, pois, $0 \in \overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Definição 4.9 (Ponto Isolado)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in X$ é um ponto isolado de X, se este não é ponto de acumulação de X.

Obs 4.14. Note que para que x seja ponto isolado de X é necessário que $x \in X$.

Obs 4.15. Veja que x é ponto isolado de $X \Leftrightarrow$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}$.

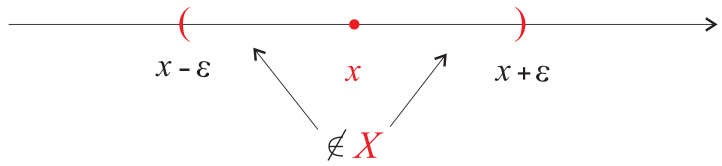

Figura 4.7: Ponto isolado

Exemplo 4.27. Vimos que qualquer ponto de $\mathbb{Z}$ é ponto isolado de $\mathbb{Z}$.

Definição 4.10 (Conjunto Discreto)**.** Dizemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto discreto se todos os seus pontos são isolados.

Exemplo 4.28. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é discreto.

Exemplo 4.29. $[0, 1)$ não é discreto, já que $0 \in [0, 1)'$.

Teorema 4.8 (Teorema de Bolzano)**.** *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado e infinito. Então $X' \neq \emptyset$.*

Demonstração. Como X é infinito, então existe uma injeção $f : \mathbb{N} \to X$ (ver livro [3]). Logo, $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N}) \subseteq X$ é uma bijeção. Como $\mathbb{N}$ é enumerável, então $f(\mathbb{N})$ também é. Ou seja, X possui o subconjunto $f(\mathbb{N})$, o qual é enumerável. Digamos que $f(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Considere que estes elementos são dois a dois distintos. Com isso, $(x_n) \subseteq X$. Como X é limitado, então (x_n) é uma sequência limitada. Passando a uma subseqência, se necessário, (x_n) é uma sequência convergente (ver Teorema de Bolzano-Weierstrass), digamos $\lim x_n = x$. Se um, e somente um, dos termos da sequência (x_n) é igual a x, então exclua este termo da sequência para obter $(x_n) \subseteq (X \setminus \{x\})$, com $\lim x_n = x$. Logo $x \in X'$. Ou seja, $X' \neq \emptyset$. $\square$

Exercícios de Fixação

1. Encontre os conjuntos $\mathbb{N}'$, $(a, b)'$, $(-\infty, c]'$, onde $a < b$.

2. Quais dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ são discretos.

4.6 Conjuntos Compactos em $\mathbb{R}$

Definição 4.11 (Conjuntos Compactos)**.** Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto em $\mathbb{R}$ se X é fechado e limitado.

Exemplo 4.30. Vimos que $[a, b]$ é fechado e limitado. Logo, $[a, b]$ é compacto em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.31. Os intervalos $(a, b), [a, b), (a, b]$ são limitaodos, mas não são fechados. Assim, $(a, b), [a, b), (a, b]$ não são compactos.

Exemplo 4.32. Veja que $\mathcal{C}\mathbb{Z} = \cup_{z\in\mathbb{Z}}(z - 1, z + 1)$. Logo $\mathcal{C}\mathbb{Z}$ é aberto, pelo Teorema 4.1. Assim, usando o Teorema 4.3, $\mathbb{Z}$ é fechado. Mas, $\mathbb{Z}$ não é limitado, pois $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ é ilimitado (ver Teorema 1.2). Dessa forma, $\mathbb{Z}$ não é compacto.

O próximo Teorema nos mostra uma maneira equivalente de definir conjuntos compactos em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.9 (Caracterização de Compacto)**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto $\Leftrightarrow$ toda sequência em X possui uma subsequência que converge para um $x \in X$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja X compacto. Seja $(x_n) \subseteq X$. Como X é limitado, então (x_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência $(x_{n_k}) \subseteq X$ convergente. Digamos, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Como X é fechado, então $x \in \overline{X} = X$.
$\Leftarrow$) Faremos a prova por contraposição. Suponha que X não é compacto. Assim, X é ilimitado ou não-fechado. Considere que X é ilimitado. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que: $n < |x_n|$. Portanto, toda subsequência de (x_n) é ilimitada. Usando o Teorema 2.3, toda subsequência de (x_n) é divergente. Agora, se X não é fechado então existe $x \in \overline{X}$ tal que $x \notin X$. Ou seja, $(x_n) \subseteq X$ tal que $\lim x_n = x \notin X$. Dessa forma, toda subsequência de (x_n) converge para $x \notin X$ (ver Teorema 2.2). $\square$

Exemplo 4.33. Se Y é compacto, então $X = \{x + y : x, y \in Y\}$ é compacto. De fato, Seja $(z_n) \subseteq X$. Então existem $(x_n), (y_n) \subseteq Y$ tal que $z_n = x_n + y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como Y é compacto, então, usando o Teorema 4.9, temos que existem $(x_{n_k}), (y_{n_k}) \subseteq Y$ subsequências de $(x_n), (y_n)$, respectivamente, tais que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in Y$ e $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in Y$. Seja $z_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Logo (z_{n_k}) é subsequência de (z_n) e $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}) = x + y \in X$. Utilizando o Teorema 4.9, temos que X é compacto.

Vejamos uma generalização do Teorema dos Intervalos Encaixados.

Teorema 4.10 (Teorema de Cantor)**.** *Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável de compactos em $\mathbb{R}$ não-vazios. Se*

$$... \subseteq X_n \subseteq ... \subseteq X_2 \subseteq X_1.$$

Então $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$.

Demonstração. Como $X_n \neq \emptyset$, então existe $x_n \in X_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disso, $X_n \subseteq X_1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos uma sequência (x_n) contida no compacto X_1. Com o Teorema 4.9, concluímos que existe $(x_{n'})_{n'\in\mathbb{N}'}$ subsequência de (x_n) tal que $\lim\limits_{n'\in\mathbb{N}'} x_{n'} = x \in X_1$. Como $\mathbb{N}'$ é infinito, então dado $n \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n_0 > n$. Consequentemente, $n' + n_0 > n_0 > n$, $\forall\ n' \in \mathbb{N}'$, por conseguinte, $X_{n'+n_0} \subseteq X_{n_0} \subseteq X_n$, $\forall\ n' \in \mathbb{N}'$. Mas, $\lim\limits_{n'\in\mathbb{N}'} x_{n'+n_0} = x$ (ver Proposição 2.1) e $(x_{n'+n_0})_{n'\in\mathbb{N}'} \subseteq X_{n'+n_0} \subseteq X_n$. Porém X_n é fechado, assim, $x \in \overline{X_n} = X_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$. $\square$

Obs 4.16. Se a famíla não for formada por compactos o Teorema 4.10 é falso. Por exemplo, vimos que a família $\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é formada por conjuntos limitados, mas não-fechados. Além disso, $\cap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$. Outro exemplo é a famíla $([n, \infty))_{n\in\mathbb{N}}$, a qual é formada por conjuntos fechados ilimitados que satisfaz $\cap_{n\in\mathbb{N}}[n, \infty) = \emptyset$. (note que $\mathcal{C}([n, \infty)) = (-\infty, n)$ é aberto).

Definição 4.12 (Cobertura)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ é dita uma cobertura de X se $X \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. A cobertura é dita cobertura aberta de X se cada X_λ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$. Se Λ é um conjunto finito, dizemos que $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura finita de X.

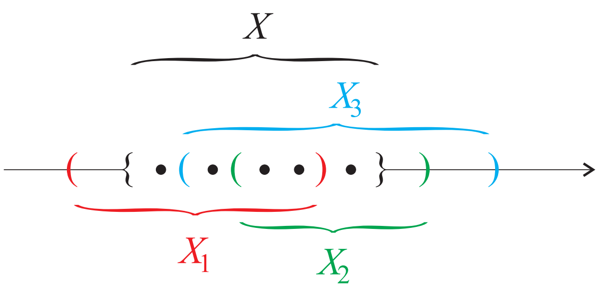

Figura 4.8: $(X_\lambda)_{\lambda=1,2,3}$ é uma cobertura para o conjunto X

Definição 4.13 (Subcobertura)**.** Seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura de $X \subseteq \mathbb{R}$. Se $\Lambda' \subseteq \Lambda$, então dizemos que $(X_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ é um subcobertura de $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ se $(X_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ é uma cobertura de X.

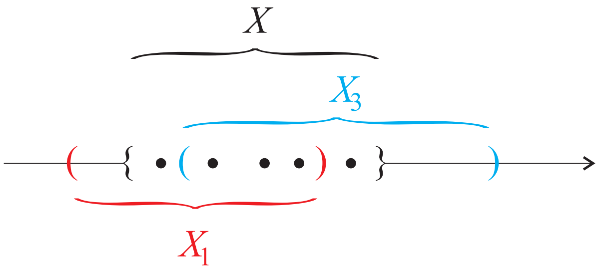

Figura 4.9: $(X_\lambda)_{\lambda=1,3}$ é uma subcobertura da cobertura exposta na Figura anterior

Exemplo 4.34. A família $\left(\left(\dfrac{1}{n}, 2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $(0,1]$, pois $\left(\dfrac{1}{n}, 2\right)$ é aberto $\forall\ n \in \mathbb{N}$, e $(0,1] \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{1}{n}, 2\right)$.

Exemplo 4.35. Seja $X_1 = (0, 2/3)$, $X_2 = (1/3, 9/10)$ e $X_3 = (1/4, 1)$. Então $(X_n)_{n\in\{1,2,3\}}$ é uma cobertura aberta de $X = [1/5, 3/4]$, pois $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = (0,1)$. $(X_n)_{n\in\{1,2\}}$ é uma subcobertura de $(X_n)_{n\in\{1,2,3\}}$, já que $X_1 \cup X_2 = (0, 9/10)$.

Figura 4.10: Exemplo numérico de cobertura

Exercícios de Fixação

1. O conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é compacto?

2. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto não-vazio. Mostre que $\inf X, \sup X \in X$.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto não-vazio. Seja $b \in \mathbb{R}$. Prove que existe $a \in X$ tal que $|b - a| = \sup\{|b - x| : x \in X\}$.

4. $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Seja $Y \subseteq X$ um conjunto fechado. Mostre que Y é compacto.

5. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos compactos disjuntos e não-vazios. Mostre que existem $a \in X$ e $b \in Y$ tais que $0 < |a - b| = \inf\{|x - y| : x \in X, y \in Y\}$.

6. Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ fechados disjuntos tais que $\inf\{|x - y| : x \in X, y \in Y\} = 0$.

4.7 Leitura Complementar

A definição 4.11 não é verdadeira em geral, pois existe uma teoria matemática sobre certos conjuntos denominados de Espaços Topológicos, na qual $\mathbb{R}$ é um exemplo, onde conjunto compacto não é definido como sendo um conjunto fechado e limitado. Esta definição está formalmente colocada no próximo Teorema. Então por que definimos compacto em $\mathbb{R}$ como conjunto fechado e limitado? A resposta para esta pergunta é porque em $\mathbb{R}$ a definição 4.11 é equivalente a definição mais geral relatada acima e mais simples de ser aplicada. Vejamos o Teorema de Borel-Lebesgue que simplifica a nossa conversa.

Teorema 4.11 (Teorema de Borel-Lebesgue)**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto $\Leftrightarrow$ toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Primeiramente vamos provar a ida deste Teorema para o compacto $X = [a, b]$. Seja (X_λ) uma conbertura de $[a, b]$, isto é, X_λ é aberto, $\forall\ \lambda$, e $[a, b] \subseteq \cup X_\lambda$. Suponha, por absurdo, que (X_λ) não possui subcobertura finita. Observe que, $[a, b] = \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \cup \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. Com isso, em um destes dois intervalos, descritos na união, (X_λ) não possui subcobertura finita. Denote este intervalo por $[x_1, y_1]$. Note que, de qualquer forma $y_1 - x_1 = \dfrac{b-a}{2}$. Aplique este mesmo processo a $[x_1, y_1]$. Dessa forma, obtemos, indutivamente, $... \subseteq [x_n, y_n] \subseteq ... \subseteq [x_1, y_1] \subseteq [a, b]$ e $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 4.10, existe $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n]$. Por conseguinte, $x \in [a, b] \subseteq \cup X_\lambda$. Assim sendo, $\exists\ \lambda'$ tal que $x \in X_{\lambda'}$. Como $X_{\lambda'}$ é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X_{\lambda'}$. Seja $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Com isso, $[x-\delta, x+\delta] \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X_{\lambda'}$. Agora, seja $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n' > \log_2(\frac{\delta}{b-a})$ (ver Teorema 1.2). Ou seja, $y_{n'} - x_{n'} = \dfrac{b-a}{2^{n'}} < \delta$. Dessa forma, $x \in [x_{n'}, y_{n'}] \subseteq [x-\delta, x+\delta] \subseteq X_{\lambda'}$. Assim, $(X_{\lambda'})$ é uma subcobertura de (X_λ) formada por somente um elemento (pois $[x_{n'}, y_{n'}] \subseteq [a, b] \subseteq \cup X_\lambda$). Isto contradiz a suposição. Portanto, $[a, b]$ é compacto. Para o caso geral, seja X um conjunto compacto, o qual possui uma cobertura (X_λ). Como X é limitado, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq [a, b]$. Consequentemente, $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \subseteq X \cup \mathcal{C}X \subseteq (\cup X_\lambda) \cup \mathcal{C}X$, pois $X \subseteq \cup X_\lambda$. Como X é fechado, então pelo Teorema 4.3, $\mathcal{C}X$ é aberto. Por conseguinte, $(X_\lambda, \mathcal{C}X)$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$. Pelo que foi feito acima, $X \subseteq [a, b] \subseteq X_{\lambda_1} \cup ... \cup X_{\lambda_m} \cup \mathcal{C}X$. Por outro lado $X \cap \mathcal{C}X = \emptyset$. Assim, $X \subseteq X_{\lambda_1} \cup ... \cup X_{\lambda_m}$. Ou seja $(X_{\lambda_i})_{i\in\{1,2,...,m\}}$ é uma subcobertura finita de (X_λ).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $Y \subseteq X$ um conjunto que não contém pontos de acumulação em

X, i.e, $x \in X \Rightarrow x \notin Y'$. Vamos provar que Y é finito. Como $x \notin Y'$ para $x \in X$, então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (Y \setminus \{x\}) = \emptyset$. Ou seja, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap Y = \emptyset$, se $x \notin Y$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap Y = \{x\}$, se $x \in Y$. Note que, $X \subseteq \cup_{x\in X}(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Daí, por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \subseteq \cup_{i=1}^{n}(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. Interseptando com Y, temos que $Y = Y \cap X \subseteq \cup_{i=1}^{n}[(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)\cap Y] \subseteq \cup_{i=1}^{m}\{x_i\}$, onde $m \leq n$ é natural. Isto nos garante que Y é finito. Portanto, acabamos de provar que se $Y \subseteq X$ é infinito então Y contém ponto de acumulação em X. Agora, vamos provar que X é compacto. Pelo Teorema 4.9, basta provar que toda sequência em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X. Assim sendo, seja (x_n) uma sequência em X. Seja $Y = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Se Y é finito, então infinitos termos desta sequência são iguais. Estes termos forma uma subsequência constante, logo, X é compacto. Então, considere que Y é infinito. Portanto, existe $x \in Y'$ tal que $x \in X$ (ver Teroema 4.8). Dessa forma, existe $x_{n_1} \in (x-1, x+1) \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Suponha, por indução, que estão definidos $n_1 < n_2 < ... < n_k$ tais que $x_{n_i} \in \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right) \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall\ i = 1, 2, ..., k$. Como $x \in Y'$, então existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1}$ e $x_{n_{k+1}} \in \left(x - \frac{1}{k+1}, x + \frac{1}{k+1}\right) \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Logo, $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ e $x_{n_k} \in \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right) \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$ (ver exemplo 2.6). Ou seja, X é compacto. $\square$

Exemplo 4.36. Vimos no exemplo 4.34 que $((1/n, 2))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $(0,1]$. Esta cobertura não possui subcobertura finita. De fato, suponha, por absurdo, que $(0,1] \subseteq (1/n_1, 2) \cup ... \cup (1/n_k, 2)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < ... < n_k$. Logo, $(0,1] \subseteq (1/n_1, 2) \cup ... \cup (1/n_k, 2) = (1/n_k, 2)$. Mas isto é um absurdo, pois $\frac{1}{n_k+1} \in (0,1]$ e $\frac{1}{n_k+1} \notin (1/n_k, 2)$. Consequentemente, usando o Teorema de Borel-Lebesgue, temos que $(0,1]$ não é compacto em $\mathbb{R}$.

Exercícios de Fixação

1. Exiba uma cobertura aberta do intervalo $(1,2]$ que não possui subcobertura finita. Conclua que $(1,2]$ não é compacto.

2. Exiba uma cobertura aberta de $\mathbb{N}$ que não possua subcobertura finita. Conclua que $\mathbb{N}$ não é compacto.

3. Exiba uma cobertura aberta de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ que não possua subcobertura finita. Conclua que $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não é compacto.

4. Prove usando o Teorema 4.11 que se $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, onde Y é fechado e X é compacto, então Y é compacto.

4.8 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é relevante ter em mente o quanto Topologia é essencial em Matemática. Uma demonstração deste fato está ilustrada nas aulas seguintes. De fato, pesquise de que maneira é possível desenvolver as aulas seguintes sem utilizar os conceitos topológicos discutidos nesta aula. Portanto, é importante você estudar em outras referências como os conceitos apresentados em Topologia de $\mathbb{R}$ podem ser estendidos para outros espaços denominados Espaços Topológicos (ver [4]).

4.9 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, como verificar se um determinado conjunto, formado por números reais, é aberto, fechado ou compacto, utilizando os conceitos encontrados em teoria elementar de conjuntos, intervalos e principalmente, nos dois últimos casos, a idéia de sequência estabelecida na aula 2. Além disso, fizemos uma ligação entre estes conteúdos e estabelecemos caracterizações que nos possibilitam uma visão mais privilegiada de como se comportam os pontos pertencentes a estes conjuntos.

4.10 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Prove que $\text{int}(X \cup Y) \supseteq \text{int}X \cup \text{ int}Y$, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Sejam $X = (0, 1]$ e $Y = [1, 2)$. Mostre que $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}X \cup \text{ int}Y$.

2. Prove que $\overline{X} = X \cup \text{Fr}X$.

3. Mostre que $\text{Fr}\mathbb{Z} = \text{Fr}\mathbb{N} = \emptyset$.

4. Prove que $\overline{X} \cap \overline{Y} \supseteq \overline{X \cap Y}$, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ tais que $\overline{X} \cap \overline{Y} \neq \overline{X \cap Y}$.

5. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $A = X \cup Y$ é uma cisão, prove que X e Y são abertos.

6. Prove que $\overline{X} = X \cup X'$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Conclua que X é fechado $\Leftrightarrow X \supseteq X'$.

7. Prove que X' é um conjunto fechado, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$.

8. Prove que a união finita e a interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

9. Sejam X, Y conjuntos não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $a \in X$ e $b \in Y$ tais que $|a - b| \leq |x - y|$, $\forall\ x \in X, y \in Y$.

10. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto X fechado e ilimitado e Y não-fechado e limitado, cujos pontos são todos isolados.

11. Seja X um conjunto compacto. Prove que os seguintes conjuntos também são compactos:

i) $\{x - y : x, y \in X\}$;

ii) $\{xy : x, y \in X\}$;

iii) $\{x/y : x, y \in X\}$, se $0 \notin X$.

12. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Se $y \neq 0$, prove que $yX = \{yx : x \in X\}$ é aberto.

13. Sejam X, Y conjuntos abertos. Prove que $X + Y$ e $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ são abertos.

14. Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ e Y é fechado, então $\overline{X} \subseteq Y$.

15. Sejam X, Y conjuntos fechados disjuntos tais que $I = X \cup Y$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado. Prove que $X = \emptyset$ ou e $Y = \emptyset$.

16. Um conjunto X é aberto $\Leftrightarrow X \cap \overline{Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$, $\forall\ Y \subseteq \mathbb{R}$.

17. Sejam X compacto e Y aberto tais que $X \subseteq Y$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in X$, $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in Y$.

18. (Teorema de Lindelöf) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.

4.11 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Prove que $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}X \cap$ int Y, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a seguinte inclusão: $\text{int}(X \cap Y) \subseteq \text{int}X \cap$ int Y. De fato, seja $z \in \text{int}(X \cap Y)$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq X \cap Y$. Como $X \cap Y \subseteq X, Y$, então $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq X$ e $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq Y$. Dessa forma, $z \in \text{int}X$ e $z \in \text{int}Y$. Consequentemente, $z \in \text{int}X \cap \text{int}Y$. Logo, a inclusão $\text{int}(X \cap Y) \subseteq \text{int}X \cap$ int Y está provada. A inclusão recíproca, $\text{int}(X \cap Y) \supseteq \text{int}X \cap$ int Y, é provada de maneira análoga. Ou seja, considere $a \in \text{int}X \cap$ int Y. Logo, $a \in \text{int}X$ e $a \in$ int Y. Assim, existem $\varepsilon_x, \varepsilon_y > 0$ tais que $(a - \varepsilon_x, a + \varepsilon_x) \subseteq X$ e $(a - \varepsilon_y, a + \varepsilon_y) \subseteq Y$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} > 0$. Desta maneira, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (a - \varepsilon_x, a + \varepsilon_x) \subseteq X$ e $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (a - \varepsilon_y, a + \varepsilon_y) \subseteq Y$. Por conseguinte, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq X \cap Y$. Ou seja, $a \in \text{int}(X \cap Y)$. Por fim, $\text{int}(X \cap Y) \supseteq \text{int}X \cap$ int Y. As duas inclusões provadas resultam na igualdade desejada. $\square$

Ex2. Prove que se $\text{Fr}X = \emptyset$, então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $\text{Fr}X = \emptyset$, então $X \cap \text{Fr}X = X \cap \emptyset = \emptyset$. Logo, pelo exemplo 4.23, X é aberto. Por outro lado, $\text{Fr}X = \emptyset \subseteq X$. Portanto, com a Proposição 4.1, X é fechado. Consequentemente, X é aberto e fechado. Usando o Corolário 4.6, concluímos que $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$. $\square$

Ex3. Prove que $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$, $\forall\ X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. Usando o exemplo 4.17, temos que: $\mathcal{C}(\overline{X} \cup \overline{Y}) = \mathcal{C}\overline{X} \cap \mathcal{C}\overline{Y} = \text{int}(\mathcal{C}X) \cap \text{int}(\mathcal{C}Y) = \text{int}(\mathcal{C}X \cap \mathcal{C}Y) = \text{int}(\mathcal{C}(X \cup Y)) = \mathcal{C}(\overline{X \cup Y})$. Ou equivalentemente, $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$. $\square$

Ex4. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e $A = X \cup Y$ é uma cisão, prove que X e Y são fechados.

Demonstração. Seja A um conjunto fechado. Seja $(X|Y)$ uma cisão de A. Ou seja, $A = X \cup Y$, $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$. Vamos provar que X é fechado. Seja $x \in \overline{X}$, então existe $(x_n) \subseteq X \subseteq A$ tal que $\lim x_n = x$. Mas A é fechado, assim $x \in \overline{A} = A = X \cup Y$. Ou seja, $x \in X$ ou $x \in Y$. Por outro lado, $\overline{X} \cap Y = \emptyset$, isto é, $x \notin Y$, pois $x \in \overline{X}$. Com isso, $x \in X$. Isto nos diz que $\overline{X} \subseteq X$. Portanto, X é fechado. Analogamente, prova-se que Y é fechado. □

Ex5. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Seja $y \in \mathbb{R}$. Prove que o conjunto $y + X = \{y + x : x \in X\}$ é aberto.

Demonstração. Sejam X, um conjunto aberto, e $a \in y + X$. Então, existe $x \in X$ tal que $a = y + x$. Como $x \in X$ e X é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X$. Vamos provar que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq y + X$. Considere que $z \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Logo, $a - \varepsilon < z < a + \varepsilon$. Como $a = y + x$, então $y + x - \varepsilon < z < y + x + \varepsilon$. Assim sendo, $x - \varepsilon < z - y < x + \varepsilon$. Daí, $z - y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X$. Ou seja, $z - y \in X$. Logo, existe $c \in X$ tal que $z - y = c$. Isto nos diz que, $z = y + c \in y + X$. Dessa forma, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq y + X$. Por fim, $a \in \text{int}(y + X)$. Portanto, $y + X \subseteq \text{int}(y + X)$. Isto é, $y + X$ é aberto. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de determinar, se um subconjunto de $\mathbb{R}$ é aberto, fechado ou compacto?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estenderemos os resultados mais relevantes estudados na aula 2 sobre limites de sequências para uma função real qualquer sobre um conjunto formado por números reais, o qual não necessariamente é o conjunto dos números naturais.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[4] Munkres, J. R., *Topology*, Second Edition, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 2000. 552p.

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo