Capítulo 5

Limites de Funções Reais

Aula 5: Limites de Funções Reais

Meta

Apresentar ao aluno como verificar se o limite de uma função real existe, não existe e é infinito ou não existe e não é infinito.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar a existência de um limite e calculá-lo, se for possível.

Pré-requisitos

Aula 4, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

5.1 Introdução

Oi, nesta aula, aprenderemos como é possível estender o conceito de limite de uma sequência para limite de funções reais sobre qualquer subconjunto dos números reais. Lembre que, uma sequência, nada mais é, que uma função real definida no conjunto dos números naturais, e que, além disso, o limite de uma sequência sempre é estudado quando $n \to \infty$. A pergunta que devemos fazer é: como generalizar a condição $n \to \infty$? A resposta para esta pergunta está na aula 4. Faremos a substituição de ∞ por um ponto de acumulação do domínio da função a qual queremos estudar o limite, já que ∞ tem propriedades semelhantes a de um ponto de acumulação. Como, por exemplo, a sequência (n) tende a ∞. Com a nova definição de limite, procuraremos estabelecer resultados análogos aos encontrados na aula 2, como, por exemplo, o Teorema do Sanduíche. Como em toda generalização, podemos ir além do caso particular. Assim sendo, definimos também limites laterais que estão diretamente relacionados a pontos de acumulação laterais, os quais estão definidos e exemplificados nesta aula. Para finalizar a aula estudamos também os conceitos limites no infinito e infinito para funções reias definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$.

5.2 Limites de Funções Reais e Exemplos

Definição 5.1 (Limite de Funções)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real, onde $X \subseteq \mathbb{R}$. Seja $y \in X'$. Dizemos que $l \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a y se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que satisfaz $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$.

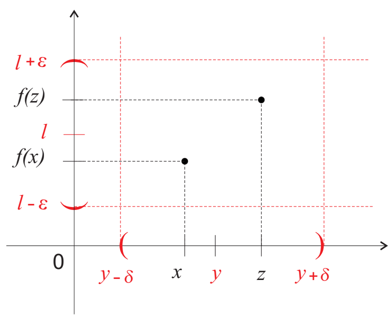

Figura 5.1: Limite

Obs 5.1. Observe que δ depende somente de ε, ou seja, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Obs 5.2. Na definição 5.1, $0 < |x - y| < \delta$ significa dizer que $x \in (y - \delta, y + \delta)$ e $x \neq y$. Isto é, não importa o que ocorre no ponto $y \in X'$, interessa somente o que ocorre próximo a y. Além disso, y não necessariamente está em X.

Obs 5.3. Segue diretamente da definição 5.1 que $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to y}(f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to y} |f(x) - l| = 0$.

Exemplo 5.1 (Limite da Constante)**.** Seja $c \in \mathbb{R}$ constante. Defina $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por: $f(x) = c$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Vamos verificar que $\lim\limits_{x \to y} f(x) = c$ (em palavras limite de uma constante é a própria constante). De fato, dado $\varepsilon > 0$ considere $\delta = \varepsilon > 0$. Assim, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ com $0 < |x - y| < \varepsilon$, temos que: $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = c$. Observe que o δ acima poderia ser qualquer número positivo.

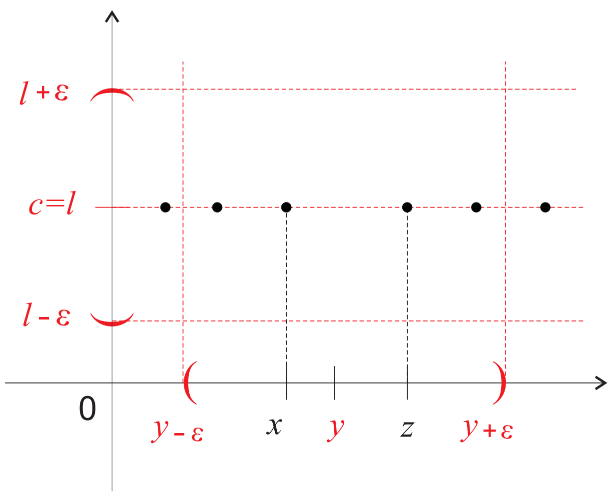

Figura 5.2: Limite da constante

Exemplo 5.2. Se $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$, então $\lim\limits_{x \to y} |f(x)| = |l|$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$ (ver Teorema 1.3). Logo, $\lim\limits_{x \to y} |f(x)| = |l|$. A recíproca desta afirmação é falsa. De fato, seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = (-1)^n$, logo, $\lim\limits_{x \to y} |(-1)^n| = \lim 1 = 1$ e $\lim(-1)^n$ não existe (ver Teorema 2.2).

Exemplo 5.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ (ver definição 10.1). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{1, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}}\} > 0$ tal que $\forall\ x \in (0,\infty)$ com $x \in (-\delta,\delta)$, tem-se $x \in (0,\delta)$, logo, $0 < x < \delta \leq 1, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}}$. Portanto, $\ln x < \ln 1 = 0$ e $\ln x < \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}}) = -\frac{1}{\varepsilon}$. Com isso, $|\ln x| = -\ln x > \frac{1}{\varepsilon}$. Consequentemente, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{\ln x}\right| = \dfrac{1}{|\ln x|} < \varepsilon$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln x} = 0$.

Proposição 5.1. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Assim, $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(y+h) = l$.*

Demonstração. Considere o conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R} : y + h \in X\}$. Como $y \in X'$, então $\exists\ (x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Seja $h_n = x_n - y \in Y \setminus \{0\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim, $\lim h_n = \lim(x_n - y) = 0$. Ou seja, $0 \in Y'$. Dessa forma, os limites acima fazem total sentido.

$\Rightarrow$) Se $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Assim, para $0 < |h| < \delta$, temos que $0 < |y + h - y| < \delta$. Consequentemente, $|f(y+h) - l| < \varepsilon$. Ou seja, $\lim\limits_{h\to 0} f(y+h) = l$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\lim\limits_{h\to 0} f(y+h) = l$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ h \in Y$ com $0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(y+h) - l| < \varepsilon$. Com isso, se $x \in X$ e $0 < |x - y| < \delta$, então $|f(x) - l| = |f(y + x - y) - l| < \varepsilon$. Isto é, $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$. $\square$

Exemplo 5.4. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x$, $\forall\ x \in X$ (função inclusão). Vamos mostrar que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = x$, ou seja, $\lim\limits_{h\to 0}(x+h) = x$. De fato, $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $\forall\ x + h \in X$ com $0 < |h| < \delta$, tem-se $|x + h - x| = |h| < \delta = \varepsilon$. Isto é, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = x$. Portanto, pela Proposição 5.1, $\lim\limits_{x\to y} x = y$.

Teorema 5.1. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Considere que $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to y} g(x) = m$. Se $l < m$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.*

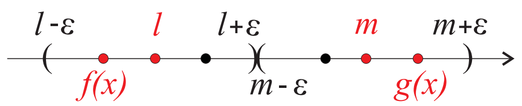

Figura 5.3: Idéia da demonstração

Demonstração. Se $l < m$, então $\varepsilon = \dfrac{m-l}{2} > 0$. Portanto, $\varepsilon + l = m - \varepsilon$. Como $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to y} g(x) = m$, então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ e $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$. Considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Com isso, usando a observação 1.11, $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2$, tem-se que: $f(x) < \varepsilon + l = m - \varepsilon < g(x)$. □

Obs 5.4. No Teorema 5.1, nada pode ser afirmado se $l \leq m$. Por exemplo, sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = 0$. Assim, $\forall\ \delta > 0$, existem $x_1 \in (-\delta, 0)$ e $x_2 \in (0, \delta)$ tais que $f(x_1) = x_1 < 0 = g(x_1)$ e $f(x_2) = x_2 > 0 = g(x_2)$. Mesmo sendo, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Corolário 5.2. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to y} f(x) < m$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta \Rightarrow f(x) < m$.*

Demonstração. Seja $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = m$, $\forall\ x \in X$. Então $\lim\limits_{x\to y} f(x) < \lim\limits_{x\to y} g(x) = m$. Usando o Teorema 5.1, concluímos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x) = m$. □

Corolário 5.3. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se existe $\delta_0 > 0$: $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta_0$, então $\lim\limits_{x\to y} f(x) \leq \lim\limits_{x\to y} g(x)$ (caso estes limites existam).*

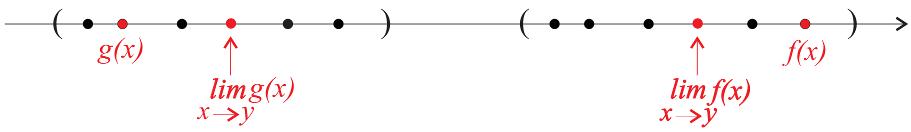

Figura 5.4: Idéia da demonstração

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\lim\limits_{x\to y} f(x) > \lim\limits_{x\to y} g(x)$. Usando o Teorema 5.1, concluímos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta \Rightarrow g(x) < f(x)$. Seja $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$. Assim sendo, $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta_1 \leq \delta, \delta_0$, tem-se $g(x) < f(x)$ e $f(x) \leq g(x)$. Contradição! □

Teorema 5.4 (Teorema do Sanduíche)**.** *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funções e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to y} f(x) = \lim\limits_{x\to y} g(x)$ e existe $\lambda > 0$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$, com $0 < |x-y| < \lambda$. Então, $\lim\limits_{x\to y} h(x) = \lim\limits_{x\to y} f(x) = \lim\limits_{x\to y} g(x)$.*

Demonstração. Considere que $\lim\limits_{x\to y} f(x) = \lim\limits_{x\to y} g(x) = m$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\forall\ x \in X$, com $0 < |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$ e $\forall\ x \in X$, com $0 < |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \lambda\} > 0$. Usando a observação 1.11 e a hipótese, temos que $\forall\ x \in X$, com $0 < |x-y| < \delta \leq \delta_1, \delta_2, \lambda \Rightarrow m - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < m + \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{x \to y} h(x) = m = \lim\limits_{x \to y} f(x) = \lim\limits_{x \to y} g(x)$. $\square$

Exemplo 5.5. Provaremos, usando o Teorema 7.12, que $|\text{sen}x| \leq x$, $\forall\ x \geq 0$ (ver exemplo 7.32). Assim sendo, se $x < 0$, então $|\text{sen}x| = |-\text{sen}x| = |\text{sen}(-x)| \leq -x = |x|$. Portanto, $|\text{sen}x| \leq |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Logo, $0 \leq |\text{sen}(x+h) - \text{sen}x| = |2\text{sen}[(1/2)h]\cos[1/2(2x+h)]| \leq 2|\text{sen}[(1/2)h]||\cos[1/2(2x+h)]| \leq 2|\text{sen}[(1/2)h]|1 \leq 2|(1/2)h| \leq |h|$. Por conseguinte, usando o Teorema do Sanduíche, $0 \leq \lim\limits_{h \to 0} |\text{sen}(x+h) - \text{sen}x| \leq 0$. Ou seja, $\lim\limits_{h \to 0} \text{sen}(x+h) = \text{sen}x$. Usando a Proposição 5.1, temos que $\lim\limits_{x \to y} \text{sen}x = \text{sen}y$.

Exemplo 5.6. Analogamente ao exemplo anterior, tem-se que $|\cos(x+h) - \cos x| = |-2\text{sen}[(1/2)(2x+h)]\text{sen}[(1/2)h]| \leq 2(1/2)|h| = |h|$. Portanto, $|\cos(x+h) - \cos x| \leq |h|$. Daí, pelo Teorema do Sanduíche, $\lim\limits_{h \to 0} \cos(x+h) = \cos x$. Utilizando a Proposição 5.1, concluímos que $\lim\limits_{x \to y} \cos x = \cos y$.

Teorema 5.5 (Caracterização de Limite)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Então, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$, com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n) = l$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $(x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ temos que existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, pois $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$. Como $\lim x_n = y$, então $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $0 < |x_n - y| < \delta$ ($N = N(\delta)$). Com isso, $\forall\ n \geq N$, conclui-se que $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Ou seja, $\lim f(x_n) = l$.
$\Leftarrow$) Suponha, por contraposição, que $\lim\limits_{x \to y} f(x) \neq l$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$, encontra-se $x_\delta \in X$ tal que $0 < |x_\delta - y| < \delta$ e $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$. Faça $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ com $n \in \mathbb{N}$ para obter: $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - y| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Portanto, utilizando o Teorema do Sanduíche, $(x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$, $\lim x_n = y$ e $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$ (ver exemplo 2.6). Se $\lim f(x_n) = l$, então $0 = \lim |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$ (ver Corolário 5.3). Ou seja, $\varepsilon \leq 0$. Contradição! Assim sendo, $\lim f(x_n) \neq l$. $\square$

Exemplo 5.7. Sejam $X = \mathbb{R}^*$ e $0 \in X'$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Vamos verificar que $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe. De fato, seja $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Logo, $\lim x_n = \lim \frac{1}{n\pi} = \frac{1}{\pi} \lim \frac{1}{n} = 0$. Porém, $\lim \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim \cos(n\pi)$ não existe, pois $(\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, ...)$ (ver Teorema 2.2). Dessa forma, utilizando o Teorema 5.5 temos que $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Corolário 5.6 (Unicidade)**.** *Se o limite de uma função real existe este é único.*

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Considere que $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to y} f(x) = m$. Vamos provar que $l = m$. Como $y \in X'$, então existe $(x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$ tal que $\lim x_n = y$. Daí, pelo Teorema 5.5, $\lim f(x_n) = l$ e $\lim f(x_n) = m$. Usando a unicidade de limite de sequências (ver Teorema 2.1), concluímos que $l = m$. $\square$

Exercícios de Fixação

1. Mostre que:

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{1-x} = -1$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|} = 0$;

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x+1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

2. Utilize a definição 5.1 para mostrar que:

i) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x) = 12$;

iii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+5}{2x+3} = 4$.

3. Mostre que os seguintes limites não existem:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$;

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, se $x \notin \mathbb{Q}$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

5.3 Operações com Limites de Funções Reais

Teorema 5.7 (Operações com Limites)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Caso $\lim_{x\to y} f(x)$ e $\lim_{x\to y} g(x)$ existam, os seguintes itens são verdadeiros:*

i) $\lim_{x\to y}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to y} f(x) + \lim_{x\to y} g(x)$, *em palavras, o limite da soma é a soma dos limites;*

ii) $\lim_{x\to y}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to y} f(x) \cdot \lim_{x\to y} g(x)$, *em palavras, o limite do produto é o produto dos limites;*

iii) $\lim_{x\to y} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to y} f(x)}{\lim_{x\to y} g(x)}$, *se* $\lim_{x\to y} g(x) \neq 0$, *em palavras, o limite da divisão é a divisão dos limites, caso o denominador seja não-nulo.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$ com $\lim x_n = y$. Como $\lim_{x\to y} f(x)$ e $\lim_{x\to y} g(x)$ existem, então, pelo Teorema 5.5, obtemos: $\lim f(x_n) = \lim_{x\to y} f(x)$ e $\lim g(x_n) = \lim_{x\to y} g(x)$. Pelas operações estabelecidas no Teorema 2.11, concluímos que:

i) $\lim_{x\to y}[f(x) + g(x)] = \lim[f(x_n) + g(x_n)] = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = \lim_{x\to y} f(x) + \lim_{x\to y} g(x)$;

ii) $\lim_{x\to y}[f(x) \cdot g(x)] = \lim[f(x_n) \cdot g(x_n)] = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = \lim_{x\to y} f(x) \cdot \lim_{x\to y} g(x)$;

iii) $\lim_{x\to y} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim \left[\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right] = \dfrac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)} = \dfrac{\lim_{x\to y} f(x)}{\lim_{x\to y} g(x)}$, se $\lim g(x_n) = \lim_{x\to y} g(x) \neq 0$.

$\square$

Obs 5.5. Quando $\lim_{x\to y} g(x)$ existe e $f(x) = k$ é constante, $\forall\, x \in X$, então $\lim_{x\to y} f(x)g(x) = \lim_{x\to y} kg(x) = \lim_{x\to y} k \lim_{x\to y} g(x) = k \lim_{x\to y} g(x)$ (ver exemplo 5.1).

Obs 5.6. Observe que quando $\lim_{x\to y} f(x)$ e $\lim_{x\to y} g(x)$ existem, então os itens **i)** e **ii)** do Teorema 5.7, nos garantem que: $\lim_{x\to y}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to y}[f(x) + (-g(x))] = \lim_{x\to y} f(x) + \lim_{x\to y}(-g(x)) = \lim_{x\to y} f(x) - \lim_{x\to y} g(x)$.

Obs 5.7. Pode-se provar, por indução, que $\lim_{x\to y}[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)] = \lim_{x\to y} f_1(x) + \lim_{x\to y} f_2(x)+...+\lim_{x\to y} f_n(x)$ e $\lim_{x\to y}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot ...\cdot f_n(x)] = \lim_{x\to y} f_1(x)\cdot \lim_{x\to y} f_2(x)\cdot ...\cdot \lim_{x\to y} f_n(x)$, quando $\lim_{x\to y} f_i(x)$ existe, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 5.8 (Limite de Polinômio)**.** Vimos que $\lim_{x\to y} x = y$. Assim, pelo item **ii)** do Teorema 5.5, obtemos que $\lim_{x\to y} x^n = \lim_{x\to y} x\cdot ...\cdot x = \lim_{x\to y} x\cdot ...\cdot \lim_{x\to y} x = y\cdot ...\cdot y = y^n$. Portanto, usando os itens **i)** e **ii)** do Teorema 5.7, concluímos: $\lim_{x\to y}[a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0] = \lim_{x\to y} a_nx^n + \lim_{x\to y} a_{n-1}x^{n-1} + ... + \lim_{x\to y} a_1x + \lim_{x\to y} a_0 = a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_1y + a_0$. Com isso, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o polinômio $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, então $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

Definição 5.2 (Função Localmente Limitada)**.** Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada em uma vizinhança de $y \in X'$ se existem $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq m$, $\forall\ x \in (y-\delta, y+\delta)\cap X$.

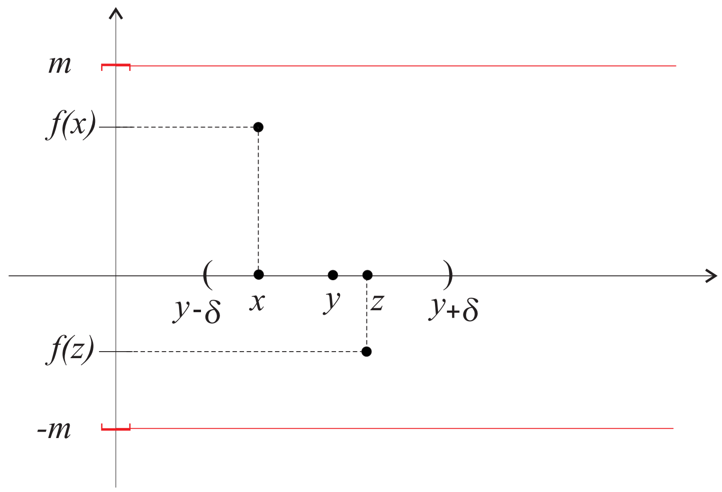

Figura 5.5: Função localmente limitada

Exemplo 5.9. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. sabemos que $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$. Logo, f é uma função limitada em uma vizinhança de 0, basta considerar $\delta = 1 > 0$.

Exemplo 5.10. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. f não é limitada em uma vizinhança de 0. Suponha, por absurdo, que existem $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq m$, $\forall\ x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{R}_+ = (0, \delta)$. Sabemos que existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $N_1 > m$ e $N_2 > \dfrac{1}{\delta}$ (ver Teorema 1.2). Seja $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$. Assim, $N \geq N_1 > m$ e $N \geq N_2 > \dfrac{1}{\delta}$. Por conseguinte, $N > m$ e $0 < \dfrac{1}{N} < \delta$. Por outro lado, $m < N = |N| = \left|f\left(\dfrac{1}{N}\right)\right| \leq m$. Contradição!

Corolário 5.8. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to y} f(x) = 0$ e g é limitada em uma vizinhança de y. Então $\lim\limits_{x \to y} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstração. Como g é limitada nunha vizinhança de $y \in X'$, então existem $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que $|g(x)| \leq m$, $\forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap X$. Por outro lado, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = 0$. Assim, pelo Teorema 5.5, $\forall\ (x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$ com $\lim x_n = y$, obtemos $\lim f(x_n) = 0$. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \in (y - \delta, y + \delta)$. Logo, $|g(x_n)| \leq m$, $\forall\ n \geq N$, pois $x_n \in (y - \delta, y + \delta) \cap X$, $\forall\ n \geq N$. Usando o Teorema 2.10, $\lim f(x_n)g(x_n) = 0$. Consequentemente, $\lim\limits_{x \to y} f(x)g(x) = 0$ (ver Teorema 5.5). $\square$

Exemplo 5.11. Como a função definida por $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, é limitada em uma vizinhança de 0 e $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, então, usando o Teorema 5.8, $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

O próximo Teorema generaliza o Teorema 2.3 enunciado no capítulo sequência de números reais.

Teorema 5.9. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Considere que $\lim\limits_{x \to y} f(x)$ existe. Então f é limitada em uma vizinhança de y.*

Demonstração. Seja $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$. Dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1$. Usando o Teorema 1.3, temos que $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < 1$. Ou seja, $-1 < |f(x)| - |l| < 1$. Portanto, $|f(x)| < 1 + |l|$, $\forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap (X \setminus \{y\})$. Se $y \notin X$, faça $m = 1 + |l|$. Se $y \in X$, faça $m = \max\{1 + |l|, |f(y)|\}$. De qualquer maneira, $|f(x)| \leq m$, $\forall\ x \in (y - \delta, y + \delta) \cap X$. Ou seja, f é limitada em uma vizinhança de y. $\square$

Exemplo 5.12. Vimos que a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, não é limitada em uma vizinhança de 0. Com isso, pelo Teorema 5.9, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ não existe.

Exercícios de Fixação

1. Determine o limite das seguintes funções:

i) $\lim_{x \to 1} (x+1)(2x+3)$;

ii) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$.

2. Determine o limite das seguintes funções:

i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x > 0$;

ii) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x > 0$.

3. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Mostre a desigualdade $-x^2 \leq x^n \leq x^2$, $\forall\ x \in (-1, 1)$. Use o fato que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ para concluir que $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

4. Encontre o limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$, onde $x > 0$.

5. Dê exemplos de funções f, g tais que $\lim_{x \to y} f(x)$ e $\lim_{x \to y} g(x)$ não existem, mas $\lim_{x \to y} [f(x)+g(x)]$ e $\lim_{x \to y} f(x)g(x)$ existem.

5.4 Limites Laterais de Funções Reais

Para definirmos limites laterais precisamos dos conceitos de ponto de acumulação à direita e à esquerda de um determinado subconjunto de $\mathbb{R}$. Por isso, começemos esta seção com a

Definição 5.3 (Ponto de Acumulação à Direita e à Esquerda)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação à direita (respectivamente, à esquerda) de X, e escrevemos $y \in X'_+$ (respectivamente, $y \in X'_-$), quando existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n > y$ (respectivamente, $x_n < y$), $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = y$.

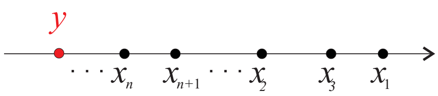

Figura 5.6: Ponto de acumulação à direita

Exemplo 5.13. Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Vimos que $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, $1/n > 0$ e $1/n \in X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \in X'_+$. Seja $Y = (a, b)$, assim $a \in (a, b)'_+$ e $b \in (a, b)'_-$, pois $\lim \left(a + \dfrac{1}{n}\right) = a$ e $\lim \left(b - \dfrac{1}{n}\right) = b$, com $a + \dfrac{1}{n} > a, b - \dfrac{1}{n} < b$ e $a + \dfrac{1}{n}, b - \dfrac{1}{n} \in (a, b)$, para n suficientemente grande. Analogamente, $a \in [a, b]'_+, [a, b)'_+, (a, b]'_+, [a, \infty)'_+, (a, \infty)'_+$ e $b \in [a, b]'_-, [a, b)'_-, (a, b]'_-, (-\infty, b)'_-, (-\infty, b]'_-$.

Exemplo 5.14. $1 \notin (0, 1)'_+$, pois à direita de 1 não existe elemento de $(0, 1)$.

Definição 5.4 (Ponto de Acumulação Bilateral)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação bilateral de X, e escrevemos $y \in X'_\pm$, se y é ponto de acumulação à direita e à esquerda de X.

Exemplo 5.15. Seja $X = (0, 1)$, então $1/2 \in X'_\pm$, pois $\lim \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$ e $\lim \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 5.16. Seja $X = (0, 1)$, então $1 \notin X'_\pm$, pois $1 \notin X'_+$.

Proposição 5.2 (Caracterização de Ponto de Acumulação à Direita)**.** *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}$*. Então* $y \in X'_+ \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$*, tem-se que:* $X \cap (y, y + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Se $y \in X'_+$, então existe $(x_n) \subseteq X$, com $x_n > y$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $\lim x_n = y$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\forall\, n \geq N$, tem-se $x_n \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Como

$x_n > y$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então $\forall\ n \geq N$, tem-se $x_n \in (y, y+\varepsilon)$. Ou seja, $x_N \in X \cap (y, y+\varepsilon) \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$) Suponha que $\forall\ \varepsilon > 0$, tem-se que: $X \cap (y, y+\varepsilon) \neq \emptyset$. Faça $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Assim, existe $x_n \in X \cap \left(y, y + \frac{1}{n}\right)$. Ou seja, $y < x_n < y + \frac{1}{n}$. Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim x_n = y$ (ver exemplo 2.6). Isto nos diz que $y \in X'_+$. $\square$

Obs 5.8. Analogamente ao que foi feito na Proposição 5.2, prova-se que $y \in X'_- \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, tem-se que: $X \cap (y-\varepsilon, y) \neq \emptyset$.

Exemplo 5.17. Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Observe que $0 \notin X'_-$. De fato, $(-1, 0) \cap X = \emptyset$ (com $\varepsilon = 1 > 0$).

Definição 5.5 (Limite Lateral)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'_+$ (respectivamente, $y \in X'_-$). Dizemos que o limite à direita (respectivamente, à esquerda) de $f(x)$ quando x tende a y é l, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (y, y+\delta)$ (respectivamente, $\forall\ x \in X \cap (y-\delta, y)$), tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{x \to y^+} f(x) = l$ $\left(\text{respectivamente, } \lim\limits_{x \to y^-} f(x) = l\right)$

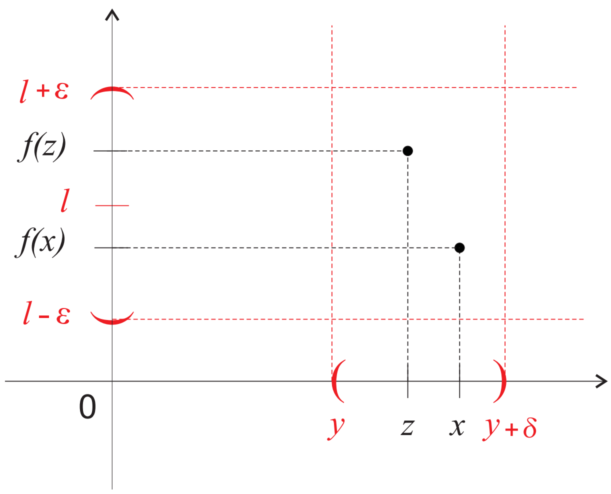

Figura 5.7: Limite à direita

Proposição 5.3. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $y \in X'_+$, $Y = X \cap (y, \infty)$ e $g = f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ (dada por $g(y) = f(y)$, $\forall\ y \in Y$). Logo, $\lim\limits_{x \to y^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to y} g(x) = l$.*

Demonstração. Observe que $\lim\limits_{x \to y^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (y, y+\varepsilon)$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in Y \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, tem-se $|g(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to y} g(x) = l$. $\square$

Obs 5.9. O resultado $\lim_{x\to y^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to y} g(x) = l$ é análogo, com $Y = X \cap (-\infty, y)$.

Obs 5.10. Com esta Proposição é fácil provar que os resultados estabelecidos neste capítulo envolvendo limites, com as devidas modificações, são verdadeiros para limites laterais. Por exemplo, considere que $\lim_{x\to y^+} f(x)$ e $\lim_{x\to y^+} g(x)$ existem, então $\lim_{x\to y^+}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to y^+} f(x) + \lim_{x\to y^+} g(x)$. De fato, $\lim_{x\to y^+}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to y}[(f|_Y)(x)+(g|_Y)(x)] = \lim_{x\to y}(f|_Y)(x)+\lim_{x\to y}(g|_Y)(x) = \lim_{x\to y^+} f(x) + \lim_{x\to y^+} g(x)$, onde $Y = X \cap (y, \infty)$.

Exemplo 5.18. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Assim, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$. Por outro lado, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$.

Vejamos, agora, como relacionar o limite ordinário (ver definição 5.1) com os limites laterais de uma função real.

Teorema 5.10. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'_{\pm}$. Então, $\lim_{x\to y} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to y^+} f(x) = \lim_{x\to y^-} f(x) = l$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $\lim_{x\to y} f(x) = l$. Assim, dado $\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta$, tem-se $|f(x) - l| < \varepsilon$. Consequentemente, $\forall\ x \in X \cap (y-\delta, y)$, tem-se que $x \in X$ e $y - \delta < x < y < y + \delta$. Daí, $x \in X$ e $0 < |x-y| < \delta$. Logo, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Isto nos diz que $\lim_{x\to y^+} f(x) = l$. Analogamente, prova-se que $\lim_{x\to y^-} f(x) = l$.
$\Leftarrow$) Suponha que $\lim_{x\to y^+} f(x) = \lim_{x\to y^-} f(x) = l$. Assim sendo, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\forall\ x \in X \cap (y, y+\delta_1)$, tem-se $|f(x)-l| < \varepsilon$ e $\forall\ x \in X \cap (y-\delta_2, y)$, tem-se $|f(x)-l| < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Com isso, $\forall\ x \in X$ com $0 < |x-y| < \delta$, tem-se $x \in X \cap (y, y+\delta)$ ou $x \in X \cap (y-\delta, y)$. Consequentemente, $x \in X \cap (y, y+\delta_1)$ ou $x \in X \cap (y-\delta_2, y)$ (pois, $\delta \leq \delta_1, \delta_2$). De qualquer maneira, concluí-se que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ou seja, $\lim_{x\to y} f(x) = l$. $\square$

Exemplo 5.19. Vimos que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$. Logo, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ não existe, pelo Teorema 5.10.

Definição 5.6 (Função Monótona)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é não-decrescente (respectivamente, não-crescente) se $x, y \in X$ com $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$). Se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (respectivamente, $f(x) > f(y)$), dizemos que f é crescente (respectivamente, decrescente). Em qualquer destes casos, f é dita uma função monótona.

Exemplo 5.20. Toda função real constante é não-crescente e não-decrescente. A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, é decrescente.

Exemplo 5.21. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos x$, não é uma função monótona, pois $\cos\pi = -1 < 1 = \cos(2\pi)$ e $\cos(\pi/2) = 0 > -1 = \cos\pi$.

A generalização do Teorema 2.4 está enunciada no

Teorema 5.11. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Então* $\lim\limits_{x\to y^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to z^-} f(x)$ *existem,* $\forall\ y \in X'_+, z \in X'_-$.

Demonstração. Suponha que f é monótona não-decrescente limitada e $z \in X'_-$. Como f é limitada, então $Y = \{f(x) : x \in X \text{ e } x < z\}$ é um conjunto limitado. Por outro lado, $z \in X'_-$, logo, $\exists\ x \in X \cap (z-1, z)$ (ver Teorema 5.2). Ou seja, $f(x) \in Y$. Consequentemente, Y é não-vazio e limitado. Dessa forma, usando a completeza de $\mathbb{R}$, $\sup Y$ existe. Vamos provar que $\lim\limits_{x\to z^-} f(x) = \sup Y$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ f(x) \in Y$ tal que $\sup Y - \varepsilon < f(x)$. Como $f(x) \in Y$, então $x < z$. Daí existe $\delta > 0$ tal que $z = x+\delta$. Assim, $\sup Y - \varepsilon < f(z-\delta)$. Dessa forma, $\forall\ x \in X \cap (z-\delta, z)$, tem-se que: $x \in X$ e $z - \delta < x < z$. Como f é não-decrescente, então $\sup Y - \varepsilon < f(z-\delta) \le f(x) \le \sup Y \le \sup Y + \varepsilon$. Ou seja, $f(x) \in (\sup Y - \varepsilon, \sup Y + \varepsilon)$. Equivalentemente, $|f(x) - \sup Y| < \varepsilon$. Isto nos diz que $\lim\limits_{x\to z^-} f(x) = \sup Y$. □

Obs 5.11. Analogamente, prova-se que $\lim\limits_{x\to y^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in X \text{ e } x > y\}$, se f é não-decrescente.

Exemplo 5.22. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 0$, se $x \in [0,1]$ e $f(x) = 1$, se $x \in (1,2]$. A função f é monótona não-decrescente. Note que f é limitada, pois $f([0,2]) = \{0,1\}$. Pelo Teorema 5.11, temos que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in [0,2)\} = \sup\{0,1\} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (0,2]\} = \inf\{0,1\} = 0$.

Exercícios de Fixação

1. Dê um exemplo de uma função que tem limite lateral à direita, mas não possui limite lateral à esquerda em algum ponto.

2. Seja $f(x) = \sqrt{|x|}$, onde $x \neq 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

3. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$, ou mostre que ele não existe.

4. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$, onde $x > 0$, ou mostre que este limite não existe.

5.5 Limites Infinitos e no Infinito

Definição 5.7 (Limites Infinitos)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente (respectivamente, inferiormente). Dizemos que $f(x)$ tende a l quando x tende a ∞ (respectivamente, $-\infty$) se dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $x > A$ (respectivamente, $x < -A$), tem-se que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso, ecrevemos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ $\left(\text{respectivamente, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l\right)$.

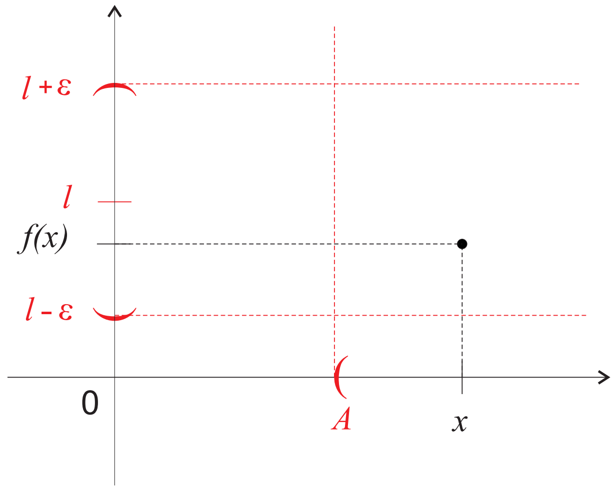

Figura 5.8: Limite no infinito $x \to \infty$

Obs 5.12. Observe que A depende somente de ε, i.e, $A = A(\varepsilon)$.

Exemplo 5.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, com $A = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, temos que: $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$ com $x > A > 0$, tem-se que $0 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{A} = \varepsilon$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Analogamente, prova-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Exemplo 5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (ver definição 10.2). Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$, considere $A = -\ln\varepsilon = \ln\varepsilon^{-1} > 0$ (pois $\varepsilon^{-1} > 1$, ver definição 10.1), de forma que, $\forall\ x < -A = \ln\varepsilon \Rightarrow e^x < e^{-A} = e^{\ln\varepsilon} = \varepsilon$. Agora, se $\varepsilon > 1$, então considere $A = 1 > 0$, para obter: $x < -A = -1 < 0 \Rightarrow e^x < e^0 = 1 < \varepsilon$. De qualquer maneira, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $\forall\ x < -A$, tem-se que $e^x < \varepsilon$. Ou seja $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Exemplo 5.25. $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x$ não existe (ver definição 10.2). Suponha, por absurdo, que $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = l$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $B > 0$ tal que $\forall\ x > B$, tem-se $|\mathrm{e}^x - l| < \varepsilon$. Portanto, $\mathrm{e}^x - |l| \leq ||\mathrm{e}^x| - |l|| \leq |\mathrm{e}^x - l| < \varepsilon$. Ou seja, $\mathrm{e}^x < \varepsilon + |l|$. Considere $A = \max\{\varepsilon + |l|, 1\}$. Seja $C = \max\{B, \ln A\} > 0$ (ver definição 10.1). Assim, se $x > C$, então $x > B$ e $x > \ln A$. Com isso, $\mathrm{e}^x < \varepsilon + |l|$ e $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{\ln A} = A \geq \varepsilon + |l|$. Ou seja, $\mathrm{e}^x < \varepsilon + |l|$ e $\mathrm{e}^x > \varepsilon + |l|$. Contradição! Logo, $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x$ não existe.

Definição 5.8 (Limite no Infinito)**.** Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Dizemos que $f(x)$ tende a ∞ (respectivamente, $-\infty$) quando x tende a y se $\forall\ A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > A$ (respectivamente, $f(x) < -A$). Neste caso, escrevemos $\lim_{x\to y} f(x) = \infty$ $\left(\text{respectivamente, } \lim_{x\to y} f(x) = -\infty\right)$.

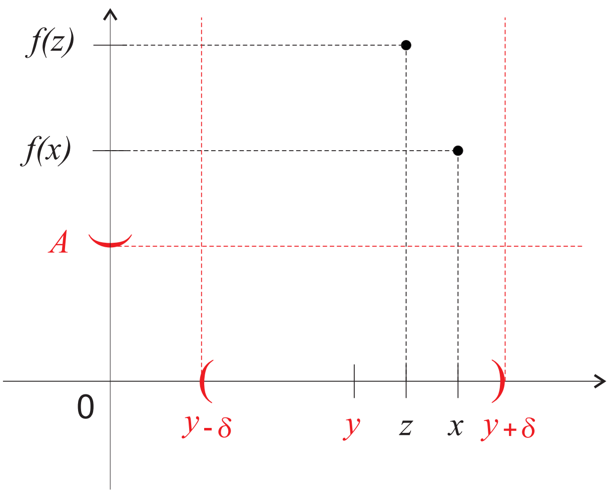

Figura 5.9: Limite infinito $f(x) \to \infty$

Obs 5.13. Observe que δ depende somente de A, isto é, $\delta = \delta(A)$.

Exemplo 5.26. Com esta nova definição temos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Dado $A > 0$, seja $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}} > 0$. Assim, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$ com $0 < |x| < \delta$, tem-se $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = A$. Ou seja, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Analogamente, $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

Exemplo 5.27. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Vamos mostrar que se $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$ e $\lim_{x\to y} f(x) = \infty$, então $\lim_{x\to y} g(x) = \infty$. Com efeito, dado $A > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $x \in (y - \delta, y + \delta)$, tem-se $g(x) \geq f(x) > A$. Logo, $g(x) > A$. Ou seja, $\lim_{x\to y} g(x) = \infty$. Analogamente, se $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$ e $\lim_{x\to y} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to y} f(x) = -\infty$.

Definição 5.9. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ tende a ∞ (respectivamente, $-\infty$) quando x tende a ∞ se dado $A > 0$, existe $B > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $x > B$, tem-se $f(x) > A$ (respectivamente, $f(x) < -A$).

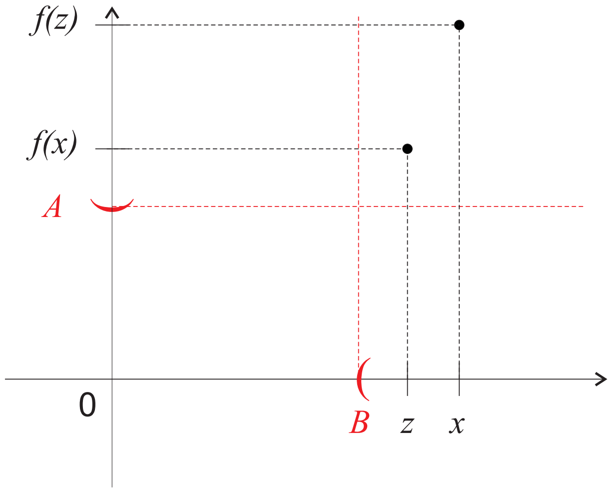

Figura 5.10: Limite infinito no infinito

Obs 5.14. Observe que B depende somente de A, isto é, $B = B(A)$.

Exemplo 5.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$ (ver definição 10.2). Com efeito, $\forall\ A > 1, \exists\ B = \ln A > 0$ (ver definição 10.1) tal que $\forall\ x \in X$ com $x > B = \ln A$, tem-se $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{\ln A} = A$. Agora, se $0 < A < 1$, então existe $B = 1 > 0$, tal que $\forall\ x \in X$ com $x > B = 1 > 0$, tem-se $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1 > A$. Assim sendo, $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$.

Obs 5.15. Podemos definir outros limites unindo as definições estabelecidas acima. Por exemplo: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to y^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to y^-} f(x) = -\infty, \ldots$ Vejamos como definir este último limite, ou seja, $\lim\limits_{x\to y^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ dado $A > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (y-\delta, y)$, tem-se $f(x) < -A$.

Obs 5.16. Os resultados encontrados nos Teoremas 2.12 e 5.5, com as devidas modificações, continuam sendo válidos para limites de funções reais infinitos e no infinito. Por exemplo, se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $g(x) \geq m > 0, \forall\ x \in X$, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$. E também, se $(y,\infty) \subseteq X$, com $y \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X \cap (y,\infty)$ tal que $\lim x_n = \infty$, tem-se $\lim f(x_n) = l$.

Exemplo 5.29. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Com efeito, dado $A > 0$, existe $\delta = \frac{1}{A} > 0$ tal que $\forall\, x \in \left(-\frac{1}{A} = -\delta, 0\right)$, tem-se $-\frac{1}{A} < x < 0$. Logo, $\frac{1}{A} > -x > 0$. Por conseguinte, $A < -\frac{1}{x}$. Equivalentemente, $\frac{1}{x} < -A$. Ou seja, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Obs 5.17. Quando se calcula um determinado limite é possível encontrar resultados do tipo $\infty - \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Estes são denominados indeterminações. Vejamos por que eles ocorrem. Consideraremos a indeterminação 0^0. Sejam $y > 0$ e $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{\ln y}{\ln x}$. Portanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln y}{\ln x} = \ln y \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ (ver exemplo 5.3). Assim, $f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\ln y}{\ln x}} = y \Leftrightarrow \ln(x^{\frac{\ln y}{\ln x}}) = \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln y}{\ln x} \ln x = \ln y$. Dessa forma, $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} y = y$ (ver exemplo 5.1). Neste caso, a indeterminação 0^0 pode estar tão próximo (no limite) de qualquer número positivo desejado quanto quisermos. Por outro lado, seja $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \frac{\ln\left(2 + |\cos\left(\frac{1}{x}\right)|\right)}{\ln x}$. Consequentemente, $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(2 + |\cos\left(\frac{1}{x}\right)|\right)}{\ln x} = 0$, pois $\ln\left(2 + |\cos\left(\frac{1}{x}\right)|\right) \leq \ln(2 + 1) = \ln 3$ (é limitada) e $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ (ver exemplo 5.3 e Teorema 5.8). Por outro lado, pelo que foi feito acima, temos que $\lim_{x\to 0} f(x)^{h(x)} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{\ln\left(2+|\cos\left(\frac{1}{x}\right)|\right)}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \ln\left(2 + \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\right)$, limite o qual não existe (ver exemplo 5.7). Ou seja, a indeterminação 0^0 pode não estar próximo (no limite) de nenhum número real. Por isso, o nome dado para este problema é indeterminação.

Exercícios de Fixação

1. Calcule os limites $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$, ou mostre que estes limites não existem.

2. Seja $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$, para $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$.

3. Suponha que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existem e que $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in (y, \infty)$. Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$.

4. Mostre que se $f : (y, \infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = l$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

5. Suponha que $\lim_{x\to y} f(x) = l > 0$ e que $\lim_{x\to y} g(x) = \infty$. Mostre que $\lim_{x\to y} f(x)g(x) = \infty$. Se $l = 0$, mostre com um exemplo que esta afirmação é falsa.

5.6 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar que, neste material, o mais relevante não é saber encontrar o limite, como é feito no cálculo ordinário, e sim avaliar se é possível calculá-lo. Assim sendo, a parte computacional não é a parte mais interessante deste texto. Além disso, como veremos no decorrer do material, as definições de continuidade, em alguns casos, e derivada, são estabelecidas por limite. Com isso, limite de funções é uma ferramenta importante neste livro e em muitas aplicações em diversas áreas das ciências exatas. Para alguns exemplos de limite de funções em Física ver [1].

5.7 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, os conceitos de limite de funções reais sobre subconjuntos constituídos de números reais. Neste contexto, estudamos limites ordinários, laterais, infinitos e no infinito de funções reais. Identificamos alguns exemplos destes limites para ilustração de como devemos resolver exercícios deste conteúdo. Porém, em muitos casos, o cálculo de um limite é de trabalho difícil. Por isso, mostramos também alguns resultados que estabelecem somente a existência de tais limites.

5.8 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Prove que $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\forall\ (x_n) \subseteq X \setminus \{y\}$ com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n)$ existe.

2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $f(x) = x$, se $x \in \mathbb{Q}$; $g(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 1$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, porém $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ não existe.

3. Prove que $y \in X'_+$ (respectivamente, $y \in X'_-$) $\Leftrightarrow \exists\ (x_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ decrescente (respectivamente, crescente) tal que $\lim x_n = y$.

4. Prove que $\lim\limits_{x\to y^+} f(x) = l$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to y^-} f(x) = l$) $\Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subseteq X$ decrescente (respectivamente, crescente) com $\lim x_n = y$, tem-se que $\lim f(x_n) = l$.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}}$, onde $a > 1$. Prove que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

6. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $y \in X'_+$. Considere que existe uma sequência $(x_n) \subseteq X$, com $x_n > y$, $\lim x_n = y$ e $\lim f(x_n) = l$, prove que $\lim\limits_{x \to y^+} f(x) = l$.

7. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante, ou seja, $p(x) = y_0 + y_1 x + ... + y_n x^n$, com $y_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se n é ímpar, prove que $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$, se $y_n > 0$, e $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = -\infty$, se $y_n < 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + yx\text{sen}x$. Mostre que $|y| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

9. Dado $y > 1$, defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pondo $g(x) = y^x$. Prove que $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

10. (Critério de Cauchy) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Prove que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$, prove que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Sugestão: Use sequência de Cauchy e O Teorema 5.5 para a recíproca.

11. (Permanência de Sinal) Se $\lim\limits_{x \to y} f(x) > 0$ (respectivamente, < 0) prove que existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X$ com $0 < |x - y| < \delta$, tem-se $f(x) > 0$ (respectivamente, < 0).

5.9 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X'$. Porve que se $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$ então $l \in \overline{f(X \setminus \{y\})}$.

Demonstração. Considere que $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$, onde $y \in X'$. Assim, $\exists\, (x_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ tal que $\lim x_n = y$ (ver definição 4.8), e consequentemente, usando o Teorema 5.5, concluímos que $\lim f(x_n) = l$. Observe que $(f(x_n)) \subseteq f(X \setminus \{y\})$. Portanto, pela definição 4.3, temos que $l \in \overline{f(X \setminus \{y\})}$. □

Ex2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$. Prove que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (ver definição 10.2).

Demonstração. Seja $0 < \varepsilon < 1/2$. Observe que $\dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right) \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)}$ (lembre que $\mathrm{e} \approx 2,7 > 1$). Portanto, seja

$\delta = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)} > 0$ $(\frac{1}{\varepsilon}-1>1)$. Com isso, $\forall\ x \in (0,\delta)$, tem-se $0 < x < \delta = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}$, consequentemente, $\left|\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0\right| = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon$. Agora, se $\varepsilon \geq 1/2$, então seja $\delta = 1 > 0$. Note que, $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} < 1/2 \Leftrightarrow 1+e^{\frac{1}{x}} > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} > 1$, $\forall\ x \in (0,1)$ (o que é fato). Portanto, $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} < 1/2 \leq \varepsilon$. Assim, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$. □

Ex3. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante, ou seja, $p(x) = y_0 + y_1x + ... + y_nx^n$, com $y_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove que, se n é par então $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$, se $y_n > 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$, se $y_n < 0$.

Demonstração. Primeiramente, note que $p(x) = y_0 + y_1x + ... + y_nx^n = x^n\left(\dfrac{y_0}{x^n} + \dfrac{y_1}{x^{n-1}} + ... + \dfrac{y_{n-1}}{x} + y_n\right)$. Portanto, se n é par, então $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n\left(\dfrac{y_0}{x^n} + \dfrac{y_1}{x^{n-1}} + ... + \dfrac{y_{n-1}}{x} + y_n\right)$. Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{y_1}{x^{n-1}} + ... + \dfrac{y_{n-1}}{x} + y_n\right) = y_n$. Assim, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \infty$, se $y_n > 0$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = -\infty$, se $y_n < 0$. □

Ex4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + yx\text{sen}x$. Mostre que $|y| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Demonstração. Veja que $1 - |y| > 0$. Com isso, pelo Teorema 1.3, $|1 + y\text{sen}x| \geq |1| - |y\text{sen}x| = 1 - |y||\text{sen}x| \geq 1 - |y| > 0$, pois $|\text{sen}x| \leq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Como $\lim\limits_{x\to\infty}(x + yx\text{sen}x) = \lim\limits_{x\to\infty} x(1+y\text{sen}x)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, então, usando a observação 5.16, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+yx\text{sen}x) = \infty$. □

Ex5. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$, prove que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $\forall\ y \in Y$ com $0 < |y - b| < \lambda$, tem-se $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$, pois $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$. Note que se $y = b$, então $|g(y) - g(b)| = |g(b) - g(b)| = 0 < \varepsilon$. Assim sendo, $\forall\ y \in Y$ com $|y - b| < \lambda$, tem-se $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, então existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$, tem-se $|f(x) - b| < \lambda$. Assim sendo, $\forall\ x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$, tem-se que $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$ $(f(x) \in Y)$. Ou seja, $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de identificar a existência de um limite?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estudaremos continuidade de funções reais. Alertamos você a rever os conceitos estudados nas aulas 2 e 4, já que estes são essenciais para o entendimento desta próxima aula.

Referências Bibliográficas

[1] Alonso, M., Finn, E. J., *Física: Um Curso Universitário*, Segunda Edição, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 2009. 481p.

[2] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[3] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[4] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo