Capítulo 7

Derivadas de Funções Reais

Aula 7: Funções Deriváveis em $\mathbb{R}$

Meta

Apresentar ao aluno funções que são denominadas deriváveis em $\mathbb{R}$, e os resultados que podemos obter, tais como a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio. Além disso, mostramos como classificar um ponto crítico não-degenerado em ponto de máximo ou de mínimo local.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar as funções deriváveis e saber aplicar corretamente a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio.

Pré-requisitos

Aula 6, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

7.1 Introdução

Oi, começamos esta aula definindo e exemplificando funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Logo em seguida, mostramos que a soma, a subtração, a multiplicação, a divisão (quando esta fizer sentido) e a composição de funções deriváveis é uma função derivável. Para derivar tal composição, apresentaremos uma fórmula que nos auxilia neste cálculo, denominada Regra da Cadeia, a qual é uma ferramenta de grande utilidade na resolução de exercícios e resultados seguintes do material. Mostramos também alguns Teoremas que envolvem derivabilidade, como, por exemplo, os Teoremas de Darboux, de Rolle, do Valor Médio. Estes têm aplicações na prova do Teorema do Ponto Fixo de Brower e na determinação de raízes de polinômios. Por fim, relacionamos o sinal da derivada de uma função com o crescimento ou decrescimento desta mesma função.

7.2 Derivadas e Exemplos

Definição 7.1 (Derivada no Ponto)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é derivável em $y \in X \cap X'$ se

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{h},$$

existe.

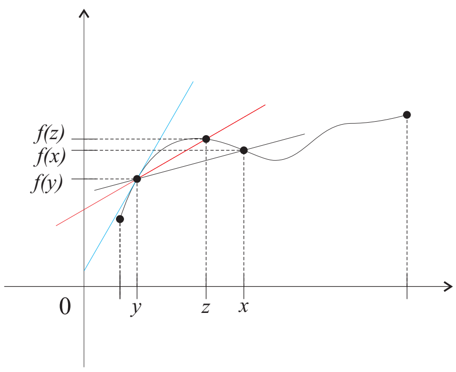

Figura 7.1: Quando fazemos x tender a y o ponto $(x, f(x))$ tende ao ponto $(y, f(y))$ ao longo do gráfico de f e as secantes desta figura tendem a tangente no ponto $(x, f(x))$ cuja inclinação é a derivada de f em y

Neste caso, chamamos estes limites de derivada de f no ponto $y \in X \cap X'$ e o denotamos por:

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h}.$$

Obs 7.1. Outras notações para $f'(y)$ são $Df(y)$, $\dfrac{df}{dx}(y)$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=y}$.

Exemplo 7.1 (Derivada da Constante)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c =$ constante. Seja $y \in X \cap X'$. Assim,

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \to y} \frac{c - c}{x - y} = \lim_{x \to y} \frac{0}{x - y} = 0.$$

Ou seja, f é derivável em $y \in X \cap X'$ e $f'(y) = 0$. Isto nos diz que a derivada de uma função constante é zero.

Exemplo 7.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(y+h) + b - (ay + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ay + ah + b - ay - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} =$$

$\lim\limits_{h \to 0} a = a$. Ou seja, f é derivável em y e sua derivada é dada por $f'(y) = a$.

Exemplo 7.3. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Veja que,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(y+h)^n - y^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} h^i - y^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} h^i + y^{n-1} h + y^n - y^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} h^i + y^{n-1} h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} h^i + n y^{n-1} h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i} h^{i-1} + n y^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} ny^{n-1} = ny^{n-1},$$

pois a soma acima sempre tem uma potência de h com expoente ≥ 1. Dessa forma, f é derivável em y e sua derivada é dada por $f'(y) = ny^{n-1}$.

Exemplo 7.4 (Derivada do Seno e do Cosseno)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada por: $f(x) = \text{sen}x$. Provaremos que $f'(y) = \cos y$, onde $y \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(y+h) - \text{sen}y}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\text{sen}(\frac{1}{2}h)\cos[\frac{1}{2}(2y+h)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \cos\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \lim_{h\to 0} \cos\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right] \\
&= 1\cos y \\
&= \cos y.
\end{aligned}$$

No último limite usamos o fato que cos é uma função contínua (ver exemplo 5.6). Ou seja, a função seno é derivável em $y \in \mathbb{R}$ e $\text{sen}'y = \cos y$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(y+h) - \cos y}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\text{sen}(\frac{1}{2}h)\text{sen}[\frac{1}{2}(2y+h)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\text{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \text{sen}\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\text{sen}(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \lim_{h\to 0} \text{sen}\left[\frac{1}{2}(2y+h)\right] \\
&= -1\text{sen}y \\
&= -\text{sen}y,
\end{aligned}$$

pois sen é uma função contínua (ver exemplo 5.5). Isto é, a função cosseno é derivável em $y \in \mathbb{R}$ e $\cos' y = -\text{sen}y$.

Exemplo 7.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = |x|$. Veja que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$. Por outro lado, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1$. Dessa forma, pelo Teorema 5.10, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ não existe. Ou seja, f não é derivável em 0.

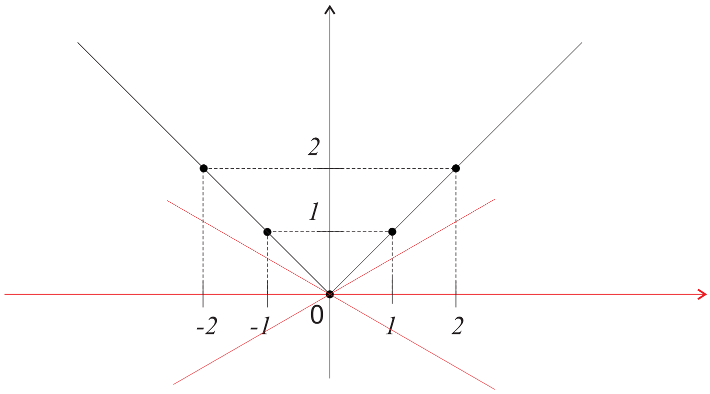

Figura 7.2: A função módulo não é derivável em 0

Definição 7.2. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável se f é derivável em cada ponto $y \in X \cap X'$. Neste caso, a função $g : X \cap X' \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = f'(y)$ é denominada função derivada de f.

Exemplo 7.6. A função constante é derivável e sua função derivada é dada através da função nula.

Exemplo 7.7. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ é derivável e sua função derivada é dada por $f'(y) = ny^{n-1}$.

Exemplo 7.8. As funções seno e cosseno são deriváveis em $\mathbb{R}$ e as respectivas funções derivadas são dadas por: $\text{sen}'(y) = \cos y$ e $\cos'(y) = -\text{sen } y$.

Teorema 7.1. *Toda função derivável em um ponto é contínua neste ponto.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X'$. Vamos provar que f é contínua em y. De fato,

$$\lim_{x\to y}[f(x) - f(y)] = \lim_{x\to y}\left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y}(x - y)\right] = \lim_{x\to y}\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\lim_{x\to y}(x - y) = f'(y)\cdot 0 = 0.$$

Portanto, $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$. Isto nos diz que f é contínua em y. $\square$

Obs 7.2. Se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável, então f é contínua em $X \cap X'$.

Exemplo 7.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = |x|$. Vimos que f é contínua em 0, mas não é derivável em 0. Portanto, a recíproca do Teorema 7.1 não é verdadeira.

Definição 7.3 (Derivada à Direita e à Esquerda)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in X \cap X'_+$ (respectivamente, $y \in X \cap X'_-$). O limite $\lim\limits_{x \to y^+} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h}$ $\left(\text{respectivamente, } \lim\limits_{x \to y^-} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h}\right)$, quando existe, é chamado derivada à direita (respectivamente, à esquerda) de f no ponto y. Neste caso, escrevemos $f'_+(y) = \lim\limits_{x \to y^+} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ $\left(\textit{respectivamente}, f'_-(y) = \lim\limits_{x \to y^-} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right)$.

Exemplo 7.10. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, vimos no exemplo 7.9 que $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$ e que $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = -1$.

Exemplo 7.11. Vimos no exemplo 5.29 que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$. Portanto, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \infty$. Assim, a derivada lateral à esquerda da função $f(x) = 1/x$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, no ponto 0, não existe no sentido da definição 7.3.

Proposição 7.1 (Regra de L'Hôpital)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $y \in X \cap X'$. Considere que $\lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y) = 0 = g(y) = \lim\limits_{x \to y} g(x)$ e que $g'(y) \neq 0$. Então:*

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to y} \frac{f(x)}{x - y} \frac{x - y}{g(x)} = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \frac{x - y}{g(x) - g(y)} = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \frac{1}{\frac{g(x) - g(y)}{x - y}} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

□

Exemplo 7.12. Seja $f(x) = \mathrm{e}^x$ (ver definição 10.2). Suponha que $f'(0) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ (ver Teorema 10.2). Então, utilizando a Proposição 7.1, temos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{f'(0)}{1} = 1.$$

Exercícios de Fixação

1. Utilize a definição 7.1 para encontrar a derivada das seguintes funções:

i) $\sqrt{x}$;

ii) $1/x$, $x \neq 0$.

2. Mostre que $\sqrt[3]{x}$ não é derivável em 0.

3. Seja $f(x) = x^2$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, se $x \notin \mathbb{Q}$. Mostre que f é derivável em 0 e encontre $f'(0)$.

4. Utilize a Proposição 7.1 para calcular o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$ (ver definição 10.1).

7.3 Propriedades Elementares com Derivadas

Teorema 7.2 (Operações com Derivadas)**.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis em $y \in X \cap X'$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) *$f + g : X \to \mathbb{R}$ é derivável e $(f+g)'(y) = f'(y) + g'(y)$, ou em palavras, a derivada da soma é a soma das derivadas;*

ii) *$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ é derivável e $(f \cdot g)'(y) = f'(y)g(y) + f(y)g'(y)$, ou em palavras, a derivada do produto é o produto das derivadas;*

iii) *$f/g : X \to \mathbb{R}$ é derivável e $(f/g)'(y) = \dfrac{f'(y)g(y) - f(y)g'(y)}{[g(y)]^2}$, se $g(y) \neq 0$, ou em palavras, a derivada do quociente é o quociente das derivadas, se o denominador no ponto é não-nulo.*

Demonstração. **i)** Observe que:

$$\lim_{x \to y}\left[\frac{(f+g)(x) - (f+g)(y)}{x-y}\right] = \lim_{x \to y}\left[\frac{f(x) + g(x) - f(y) - g(y)}{x-y}\right] = \lim_{x \to y}\left[\frac{f(x) - f(y)}{x-y} + \frac{g(x) - g(y)}{x-y}\right]$$

$$= \lim_{x \to y}\left[\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right] + \lim_{x \to y}\left[\frac{g(x) - g(y)}{x-y}\right] = f'(y) + g'(y).$$

Ou seja, $f + g$ é derivável em y e $(f+g)'(y) = f'(y) + g'(y)$.
ii) Como g é derivável em $y \in X \cap X'$, então g é contínua em $y \in X \cap X'$ pelo Teorema 7.1. Ou seja, $\lim\limits_{x \to y} g(x) = g(y)$. Com isso, pelo exemplo 7.1, temos que:

$$\lim_{x \to y}\left[\frac{(fg)(x) - (fg)(y)}{x-y}\right] = \lim_{x \to y}\left[\frac{f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)}{x-y}\right] =$$

$$\lim_{x \to y}\left\{\frac{[f(x) - f(y)]g(x) + [g(x) - g(y)]f(y)}{x-y}\right\} = \lim_{x \to y}\left[\frac{f(x) - f(y)}{x-y}g(x)\right] + \lim_{x \to y}\left[\frac{g(x) - g(y)}{x-y}f(y)\right] =$$

$$\lim_{x \to y}\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\lim_{x \to y} g(x) + f(y)\lim_{x \to y}\frac{g(x) - g(y)}{x-y} = f'(y)g(y) + f(y)g'(y).$$

Portanto, fg é derivável em y e $(fg)'(y) = f'(y)g(y) + f(y)g'(y)$.

iii) Como g é contínua em y e $g(y) \neq 0$, então, pelo Teorema 6.6, $\lim_{x \to y} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(y)}$.
Mostraremos, primeiramente, que $(1/g)'(y) = \frac{-g'(y)}{[g(y)]^2}$. Com efeito,

$$\lim_{x \to y} \left[\frac{(1/g)(x) - (1/g)(y)}{x - y} \right] = \lim_{x \to y} \left[\frac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)(x-y)} \right] = \lim_{x \to y} \left[\frac{g(y) - g(x)}{x - y} \frac{1}{g(x)g(y)} \right] =$$
$$\lim_{x \to y} \frac{g(y) - g(x)}{x - y} \lim_{x \to y} \frac{1}{g(x)g(y)} = g'(y) \frac{1}{[g(y)]^2} = \frac{g'(y)}{[g(y)]^2}.$$ Isto é, $(1/g)'(y) = \frac{-g'(y)}{[g(y)]^2}$.

Com isso, por **ii)**, f/g é derivável em y e

$$(f/g)'(y) = [f \cdot (1/g)]'(y) = f'(y)(1/g)(y) + f(y)(1/g)'(y) = f'(y)/g(y) - f(y)g'(y)/[g(y)]^2 =$$

$$\frac{f'(y)g(y) - f(y)g'(y)}{[g(y)]^2}.$$ □

Obs 7.3. Observe que, por indução, se $f_1, f_2, ..., f_n$ são deriváveis em y, então $f_1 + f_2 + ... + f_n$ e $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ são deriváveis em y e $(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(y) = f_1'(y) + f_2'(y) + ... + f_n'(y)$ e $(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n)'(y) = f_1'(y) \cdot f_2'(y) \cdot ... \cdot f_n'(y)$.

Obs 7.4. Note que se f é uma função derivável em y, então, pelo Teorema 7.2, cf também é (ver exemplo 7.1). Além disso, $(cf)'(y) = 0f(y) + cf'(y) = cf'(y)$. Ou seja, $(cf)'(y) = cf'(y)$.

Obs 7.5. Sejam f, g funções deriváveis em y, então $f - g$ também é. Basta notar que $f - g = f + (-g)$. Além disso, $(f - g)'(y) = [f + (-g)]'(y) = f'(y) + (-g)'(y) = f'(y) - g'(y)$.

Exemplo 7.13 (Derivada do Polinômio)**.** Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Assim, pelo Teorema 7.2, concluímos que $p'(y) = a_1 + 2a_2 y + ... + n a_n y^{n-1}$ (ver exemplos 7.1 e 7.3).

Exemplo 7.14. Sejam $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ os polinômios $p(x) = x + 1$ e $q(x) = 2x - 1$. Assim p/q é derivável em $(\mathbb{R} \setminus \{1/2\})$. Além diso, $(p/q)'(y) = \frac{p'(y)q(y) - p(y)q'(y)}{[q(y)]^2} = \frac{1(2y-1) - (y+1)2}{(2y-1)^2} = \frac{2y - 1 - 2y - 2}{(2y-1)^2} = \frac{-3}{(2y-1)^2}$, $\forall\, y \neq 1/2$.

Exemplo 7.15 (Derivada da Tangente)**.** Seja $\tan : X \to \mathbb{R}$ dada por $\tan x = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x}$, $\forall\, x \in X$, onde $X = (\mathbb{R} \setminus \{(2z+1)\pi/2 : z \in \mathbb{Z}\})$. Assim, pelo Teorema 7.2,

$$\tan'(x) = \frac{\mathrm{sen}'(x)\cos(x) - \mathrm{sen}(x)\cos'(x)}{[\cos(x)]^2} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(x)}{[\cos(x)]^2} = \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{[\cos(x)]^2} =$$

$$\frac{1}{[\cos(x)]^2} = \sec^2(x),$$

onde $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ é uma função definida em $X = (\mathbb{R} \setminus \{(2z+1)\pi/2 : z \in \mathbb{Z}\})$ denominada função secante.

Teorema 7.3 (Regra da Cadeia)**.** *A composta de funções deriváveis é derivável.*

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, com $f(X) \subseteq Y$, deriváveis em $y \in X \cap X'$ e $f(y) \in Y \cap Y'$, respectivamente Vamos provar que $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em y e $(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y)$. Vamos utilizar o Teorema 5.5. Seja $(x_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ tal que $\lim x_n = y$. Será provado que $\lim \dfrac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y)$. Como f é derivável em y, então, pelo Teorema 7.1, f é contínua em y. Portanto, usando o Teorema 6.3, concluímos que $\lim f(x_n) = f(y)$. considere os seguintes conjuntos: $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \neq f(y)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(y)\} = \mathcal{C}\mathbb{N}_1$. Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, então $\mathbb{N}_1$ ou $\mathbb{N}_2$ é infinito, pois $\mathbb{N}$ é infinito. Se $\mathbb{N}_1$ é infinito, então para $n \in \mathbb{N}_1$ $(f(x_n) - f(y) \neq 0)$, concluímos que:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(y)}{x_n - y} = \lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(y)}{f(x_n) - f(y)} \frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} = \lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{f(x_n) - f(y)}$$
$$\frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y),$$

pois $\lim f(x_n) = f(y)$, g é derivável em $f(y)$, f é derivável em y (ver também os Teoremas 5.5 e 2.2). Agora, se $\mathbb{N}_2$ é infinito $(f(x_n) = f(y))$, então para $n \in \mathbb{N}_2$, chegamos a:

$$f'(y) = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{0}{x_n - y} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(y)) - g(f(y))}{x_n - y} = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{0}{x_n - y} = 0 = g'(f(y))f'(y).$$

Com isso, de qualquer maneira, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{g(f(x_n)) - g(f(y))}{x_n - y} = g'(f(y))f'(y)$. Ou seja, $g \circ f$ é derivável em y e $(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y)$. $\square$

Obs 7.6. No Teorema 7.3 a regra da cadeia está estabelecida na fórmula $(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y)$ encontrada na demonstração.

Exemplo 7.16. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \mathrm{sen}x$. Portanto, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g \circ f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$. Assim, pela regra da cadeia, $(g \circ f)'(\sqrt{\pi}) = g'(f(\sqrt{\pi}))f'(\sqrt{\pi}) = \cos(\pi) \cdot 2\sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi}$.

Exemplo 7.17 (Derivada do Seno e do Cosseno Hiperbólicos)**.** Considere que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ (ver Teorema 10.2). As funções $\mathrm{senh}, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\mathrm{senh}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ são denominadas seno e cosseno hiperbólicos. Estas funções são deriváveis (ver Teorema 7.3) e suas derivadas são dadas por: $\mathrm{senh}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x$ e $\cosh'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{senh}x$.

Corolário 7.4 (Derivada da Função Inversa)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção, onde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Se f é derivável em $y \in X \cap X'$ e f^{-1} é contínua em $f(y)$, então f^{-1} é derivável em $f(y) \Leftrightarrow f'(y) \neq 0$. Neste caso, $(f^{-1})'(f(y)) = \dfrac{1}{f'(y)}$.*

Demonstração. Como $y \in X \cap X'$, então existe $(x_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ tal que $\lim x_n = y$. Como f é contínua em y (ver Teorema 7.1), então $\lim f(x_n) = f(y)$. Como f é bijetiva, então $(f(x_n)) \subseteq (Y \setminus \{f(y)\})$. Portanto, $f(y) \in Y \cap Y'$.
$\Rightarrow$) Como $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall\ x \in X$, então pelo Teorema 7.3, $(f^{-1})'(f(y))f'(y) = [f^{-1} \circ f]'(y) = 1$. Portanto, $f'(y) \neq 0$ (caso contrário, $0 = 1$) e $(f^{-1})'(f(y)) = \dfrac{1}{f'(y)}$.
$\Leftarrow$) Suponha que $f'(y) \neq 0$. Vamos provar que f^{-1} é derivável em $f(y)$, isto é,

$$\lim_{b \to f(y)} \frac{f^{-1}(b) - f^{-1}(f(y))}{b - f(y)}$$

existe. Utilizaremos o Teorema 5.5. Seja $(y_n) \subseteq (Y \setminus \{f(y)\})$ tal que $\lim y_n = f(y)$. Como f é bijetiva então $\exists\ (x_n) \subseteq (X \setminus \{y\})$ tal que $f(x_n) = y_n$. Ou seja, $x_n = f^{-1}(y_n)$. Por outro lado, f^{-1} é contínua em $f(y)$. Assim sendo, $\lim x_n = \lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(y)) = y$. Como f é derivável em y, então, pelo Teorema 5.5, concluímos que $\lim \dfrac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} = f'(y)$. Como

$f'(y) \neq 0$, logo, usando o Teorema 2.11, $\lim \dfrac{x_n - y}{f(x_n) - f(y)} = \lim \dfrac{1}{\frac{f(x_n)-f(y)}{x_n - y}} = \dfrac{1}{f'(y)}$. Mas,

$$\lim \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(y))}{y_n - f(y)} = \lim \frac{f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(y))}{f(x_n) - f(y)} = \lim \frac{x_n - y}{f(x_n) - f(y)} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Pelo Teorema 5.5, concluímos que $\lim\limits_{b \to f(y)} \dfrac{f^{-1}(b) - f^{-1}(f(y))}{b - f(y)} = \dfrac{1}{f'(y)}$. Isto nos diz que f^{-1} é derivável em $f(y)$ e $(f^{-1})'(f(y)) = \dfrac{1}{f'(y)}$. $\square$

Exemplo 7.18 (Derivada da Raiz Quadrada)**.** Vimos que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2$ é derivável (ver exemplo 5.8). Sabemos que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ é a inversa de f, a qual é contínua (ver exemplo 6.34). Observe que $f'(y) = 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$. Assim, pelo Corolário 7.4, $(f^{-1})'(f(y)) = \dfrac{1}{f'(y)}$, $\forall\ y \in (0, \infty)$. Ou seja, $(f^{-1})'(y^2) = \dfrac{1}{2y}$, $\forall\ y \in (0, \infty)$. Com isso, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall\ x \in (0, \infty)$.

Exercícios de Fixação

1. Derive as seguintes funções $f(x) = \tan(x^2)$ e $g(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

2. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em y e que $f(y) = 0$. Mostre que $g(x) = |f(x)|$ é derivável em $y \Leftrightarrow f'(y) = 0$.

3. Seja $f(x) = x^2 \text{sen}(1/x^2)$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é derivável.

4. Considere que a função $f(x) = x^3 + 2x + 1$ tem inversa f^{-1}. Encontre $(f^{-1})'(0), (f^{-1})'(1)$ e $(f^{-1})'(-1)$.

7.4 Estudo do Crescimento Local de uma Função Real

Teorema 7.5. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $f'_-(y)$ existe e $f'_-(y) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y - \delta, y)$, tem-se $f(x) < f(y)$.*

Demonstração. Como $f'_-(y) = \lim\limits_{x \to y^-} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$, então, utilizando o Corolário 5.2, concluímos que $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y-\delta, y)$, tem-se $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$. Mas, $x - y < 0$, $\forall\, x \in X \cap (y - \delta, y)$ $(x < y)$. Dessa forma, $f(x) - f(y) < 0$, $\forall\, x \in X \cap (y - \delta, y)$. Ou seja, $f(x) < f(y)$, $\forall\, x \in X \cap (y - \delta, y)$. □

Obs 7.7. Analogamente, podemos encontrar os seguintes resultados semelhantes:

a) $f'_-(y) = \lim\limits_{x \to y^-} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y-\delta, y)$, tem-se $f(x) > f(y)$;

b) $f'_+(y) = \lim\limits_{x \to y^+} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y, y+\delta)$, tem-se $f(x) > f(y)$;

c) $f'_+(y) = \lim\limits_{x \to y^+} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (y, y+\delta)$, tem-se $f(x) < f(y)$.

Corolário 7.6. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ não-crescente e $y \in X \cap X'_+$, $z \in X \cap X'_-$. Se $f'_+(y)$ e $f'_-(z)$ existem então $f'_+(y), f'_-(z) \leq 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f'_-(z) > 0$. Assim sendo, pelo Teorema 7.5, concluímos que $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in X \cap (z - \delta, z)$, tem-se $f(x) < f(z)$. Por outro lado, como f é não-crescente, então $f(x) \geq f(z)$, pois $x < z$. Mas $z \in X \cap X'_-$, assim existe $x \in X \cap (z - \delta, z)$. Daí, $f(x) < f(z) \leq f(x)$. Isto é um absurdo. Portanto, $f'_-(z) \leq 0$. Analogamente, prova-se que $f'_+(y) \leq 0$. □

Obs 7.8. Um resultado análogo ao Corolário 7.6 é o seguinte: $f : X \to \mathbb{R}$ não-decrescente e $y \in X \cap X'_+$, $z \in X \cap X'_-$. Se $f'_+(y)$ e $f'_-(z)$ existem então $f'_+(y), f'_-(z) \geq 0$.

Exemplo 7.19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^5$, então f é derivável (ver exemplo 7.13) e $f'(y) = -10y$. Assim, $f'(0) = 0$. Veja que f é decrescente. Mesmo assim, não podemos afirmar no Corolário 7.6 que $f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0) < 0$ (ver Teorema 5.10).

Corolário 7.7. *Sejam* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $y \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$*. Se* f *é derivável em* y *e* $f'(y) \neq 0$*, então* $\exists\ \delta > 0$ *tal que* $\forall\ x, z \in X$ *com* $y - \delta < x < y < z < y + \delta$*, tem-se* $f(x) < f(y) < f(z)$*.*

Demonstração. Suponha que $f'(y) > 0$. Sabemos, pelo Teorema 5.10, que $f'(y) = f'_-(y) = f'_+(y) > 0$. Pelo Teorema 7.5, temos que $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (y - \delta_1, y)$, tem-se $f(x) < f(y)$. Por outro lado, $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que $\forall\ z \in X \cap (y, y + \delta_2)$, tem-se $f(y) < f(z)$. Portanto, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leq \delta_1, \delta_2$, concluímos que: $\forall\ x, z \in X$ com $y - \delta < x < y < z < y + \delta$, tem-se $y - \delta_1 \leq y - \delta < x < y < z < y + \delta \leq y + \delta_2$. E consequentemente, $x \in X \cap (y - \delta_1, y)$ e $z \in X \cap (y, y + \delta_2)$. Com isso, $f(x) < f(y) < f(z)$. □

Obs 7.9. O caso $f'(y) = f'_-(y) = f'_+(y) < 0$ é análogo (ver observação do Teorema 7.5).

Definição 7.4 (Máximo e Mínimo Global)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f possui máximo (respectivamente, mínimo) global, ou simplesmente máximo (respectivamente, mínimo), em $y \in X$, se $\forall\ x \in X$, tem-se $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$). Neste caso, y é dito ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) de f.

Obs 7.10. O Teorema 6.11 nos diz que toda função contínua definida em um compacto possui ponto de máximo e mínimo.

Exemplo 7.20. Sabemos que $\cos\pi = -1 \leq \cos x \leq 1 = \cos 0$, $\text{sen}(3\pi/2) = -1 \leq \text{sen}x \leq 1 = \text{sen}(\pi/2)\ \forall\ x \in X$. Assim, a função cosseno possue máximo e mínimo globais em 0 e π, respectivamente. Analogamente, a função seno possue máximo e mínimo em $\pi/2$ e $3\pi/2$, respectivamente. Este exemplo também mostra que o ponto de máximo e de mínimo de uma função não necessariamente é único. Por exmeplo, 2π é ponto de máximo da função cosseno.

Exemplo 7.21. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = n$ ($f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$) é uma sequência, a qual já vimos que é ilimitada superiormente (ver definição 2.3 e Teorema 1.2). Portanto, f não possui um ponto de máximo.

Definição 7.5 (Máximo e Mínimo Local)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f possui máximo (respectivamente, mínimo) local em $y \in X$, se existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (y - \delta, y + \delta)$, tem-se $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$). Neste caso, y é dito ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) local de f.

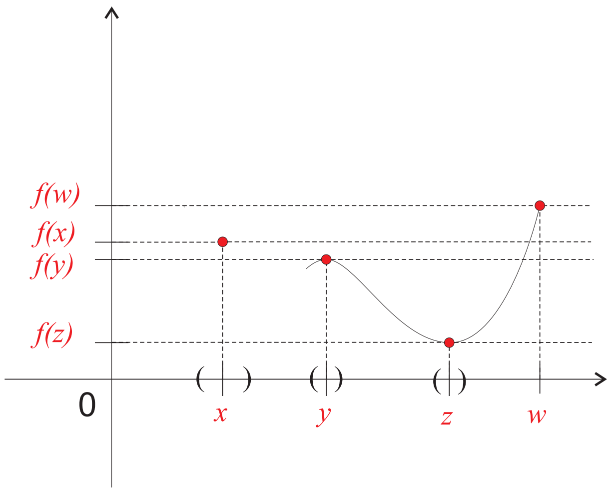

Figura 7.3: x, y, w são pontos de máximo local. x, z são pontos de mínimo local. z e w são pontos de mínimo e máximo global, respectivamente.

Exemplo 7.22. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \text{sgn}(x)$, isto é, $f(x) = 1$, se $x \geq 0$ e $f(x) = -1$, se $x < 0$. f é denominada função sinal. 0 não é ponto de mínimo local de f. Suponha, por absurdo, que 0 seja um ponto de mínimo local de f. Assim, $\exists\, \delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(0) = 1$, $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$. Mas, $-\delta/2 \in (-\delta, \delta)$ e $1 \leq f(-\delta/2) = -1 < 1$. Absurdo! Logo, 0 não é ponto de mínimo local de f.

Exemplo 7.23. No exemplo 7.22 0 é ponto de máximo local de f. De fato, para $\delta = 1 > 0$, tem-se $f(x) \leq 1 = f(0)$, $\forall\, x \in (-1, 1)$.

Definição 7.6 (Máximo e Mínimo Local Estrito)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f possui máximo (respectivamente, mínimo) local estrito em $y \in X$, se existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in (X \setminus \{y\}) \cap (y - \delta, y + \delta)$, tem-se $f(x) < f(y)$ (respectivamente, $f(x) > f(y)$). Neste caso, y é dito ponto de máximo (respectivamente, mínimo) local estrito de f.

Obs 7.11. Observe que segue diretamente das definições 7.5 e 7.6 que todo ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) local estrito é um ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) local.

Exemplo 7.24. No exemplo 7.22 0 é ponto de máximo local, mas não é ponto de máximo local estrito de f. De fato, $\forall\, \delta > 0$ existe $\delta/2 \in (-\delta, \delta)$ tal que $f(\delta/2) = 1 = f(0)$.

Exemplo 7.25. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$. 0 não é ponto de máximo, nem ponto de mínimo, local estrito de f. Com efeito, $\forall\ \delta > 0$ existem $-\delta/2, \delta/2 \in (-\delta, \delta)$ tais que $f(-\delta/2) = (-\delta/2)^3 = -\delta^3/8 < 0 = f(0)$ e $f(\delta/2) = (\delta/2)^3 = \delta^3/8 > 0 = f(0)$.

Exemplo 7.26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Veja que 0 é ponto de mínimo local estrito de f. De fato, para $\delta = 1 > 0$, tem-se $f(0) = 0 < x^2 = f(x)$, $\forall\ x \in (-1, 1)$ com $x \neq 0$.

Corolário 7.8. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in X \cap X'_-$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se y é ponto de mínimo local de f, então $f'_-(y) \leq 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f'_-(y) > 0$. Utilizando o Teorema 7.5, concluímos que $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (y - \delta_1, y)$, tem-se $f(x) < f(y)$. Por outro lado, como y é ponto de mínimo local de f, então $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que $f(y) \leq f(x)$, $\forall\ x \in X \cap (y - \delta_2, y + \delta_2)$. Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Portanto, seja $x \in X \cap (y - \delta, y)$ (x existe, pois $y \in X \cap X'_-$), com isso $x \in X$ e $y - \delta_1, y - \delta_2 \leq y - \delta < x < y < y + \delta_2$. Dessa forma, $f(x) < f(y) \leq f(x)$. Absurdo! Por fim, $f'_-(y) \leq 0$. □

Obs 7.12. Analogamente ao que foi feito no Corolário 7.8 e observação do Teorema 7.5, conclui-se que:

i) $f'_+(y) \leq 0$, se $y \in X \cap X'_+$ é ponto de máximo local de f;

ii) $f'_+(y) \geq 0$, se $y \in X \cap X'_+$ é ponto de mínimo local de f;

iii) $f'_-(y) \geq 0$, se $y \in X \cap X'_-$ é ponto de máximo local de f.

Definição 7.7 (Ponto Crítico)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $y \in X$ é ponto crítico de f se $f'(y) = 0$.

Exemplo 7.27. Seja $f(x) = x^3$ então f é derivável e $f'(0) = 0$. Ou seja, 0 é ponto crítico de f. Por outro lado, $f'(1) = 3 \neq 0$. Isto é, 1 não é ponto crítico de f.

Exemplo 7.28. Vimos que $\operatorname{sen}' x = \cos x$. Assim, os pontos críticos da função seno são os números da forma $x = (2z + 1)\pi/2$, $\forall\ z \in \mathbb{Z}$.

Corolário 7.9. *Sejam* $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *derivável em* $y \in X \cap X'_- \cap X'_+$. *Se* y *é ponto de máximo ou de mínimo local de* f, *então* $f'(y) = 0$.

Demonstração. Seja y um ponto de mínimo de f, então, pelo Teorema 5.5 e Corolário 7.8, concluímos que $0 \leq f'_+(y) = f'(y) = f'_-(y) \leq 0$. Ou seja, $f'(y) = 0$. Se y é ponto de máximo de f, então, analogamente ao que foi feito anteriormente, $0 \leq f'_-(y) = f'(y) = f'_+(y) \leq 0$. Portanto, $f'(y) = 0$. □

Obs 7.13. Se f é derivável e y é ponto de máximo ou de mínimo local de f, então, pelo Corolário 7.9, y é ponto crítico de f.

Exemplo 7.29. Considere a função $f(x) = x^3$. Vimos que 0 não é ponto de máximo, nem de mínimo, local de f. Mas, $f'(0) = 0$. Com isso, a recíproca do Corolário 7.9 não é verdadeira.

Exercícios de Fixação

1. Encontre os pontos críticos, os máximos e mínimos locais das funções $f(x) = x^3 - 3x + 4$ e $g(x) = 3x - 4x^2$.

7.5 Teoremas Importantes sobre Derivabilidade

Caro aluno, nesta seção veremos os Teorema mais importantes sobre derivadas de funções reais. Começemos com o

Teorema 7.10 (Teorema de Darboux)**.** *Sejam $c < d$ números reais. Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(c) < z < f'(d)$, para algum $z \in \mathbb{R}$, então existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = z$.*

Demonstração. Como f é derivável, então, pelo Teorema 7.1, f é contínua em $[c, d]$. Mas $[c, d]$ é compacto. Assim sendo, usando o Teorema 6.11, existe $a \in [c, d]$ tal que $f(a) \leq f(x)$, $\forall\ x \in [c, d]$. Ou seja, a é ponto de mínimo de f. Pelo Corolário 7.9, $f'(a) = 0$. Precisamos verificar que $a \neq c$ e $a \neq d$. Faremos a prova em dois casos. Primeiramente, considere que $z = 0$. Com isso, por hipótese, $f'_-(d) = f'(d) > z = 0$ (ver Teorema 5.5). Utilizando o Teorema 7.5, obtemos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in X \cap (d - \delta, d) \neq \emptyset$ ($d \in [c, d]'_-$), tem-se $f(x) < f(d)$. Dessa forma, $a \neq d$. Caso contrário, $f(x) < f(d) = f(a)$. Absurdo! (a é ponto de mínimo de f). Analogamente, prova-se que $a \neq c$. Portanto, $f'(a) = 0 = z$, $a \in [c, d]$, $a \neq c$ e $a \neq d$. Ou seja, a é o ponto procurado. Agora, passemos para o caso geral. Defina $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - zx$. Assim, g é derivável e $g'(x) = f'(x) - z$. Consequentemente, $g'(c) = f'(c) - z < 0 < f'(d) - z = g'(d)$. Pelo que foi feito na demonstração, existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) - z = g'(a) = 0$. Por fim, $f'(a) = z$. $\square$

Exemplo 7.30. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$, se $-1 \leq x < 0$ e $f(x) = 1$, se $0 \leq x \leq 1$. Afirmamos que não existe $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $g' = f$. De fato, suponha, por absurdo, que $g' = f$. Assim, $g'(-1) = f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1) = g'(1)$. Com isso, $g'(-1) < 0 < g'(1)$. Pelo Teorema 7.10, existe $z \in (-1, 1)$ tal que $f(z) = g'(z) = 0$. Absurdo! pois, $f \neq 0$.

Teorema 7.11 (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d), onde $f(c) = f(d)$. Então existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Como f é contínua em $[c, d]$ e $[c, d]$ é compacto, então, usando o Teorema 6.11, existem $y, z \in [c, d]$ tais que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$, $\forall\ x \in [c, d]$. Utilizando o Corolário 7.9, concluímos que $f'(y) = f'(z) = 0$. Se $y \in (c, d)$ ou $z \in (c, d)$, então y ou z é o ponto procurado. Se $y = z = c$, então $f(c) = f(y) \leq f(x) \leq f(z) = f(c)$, $\forall\ x \in [c, d]$. Ou seja, $f(x) = f(c)$, $\forall\ x \in [c, d]$. Isto é, f é constante. Com isso, $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in [c, d]$ (ver exemplo 7.1). Em particular, para $a = (c + d)/2$, obtemos $f'(a) = 0$. O caso $y = z = d$ é análogo. Se

$y = c$ e $z = d$, então $f(c) = f(y) \leq f(x) \leq f(z) = f(d) = f(c)$, $\forall\ x \in [c, d]$, por hipótese. Assim, $f(x) = f(c)$, $\forall\ x \in [c, d]$. Portanto, f é constante. Dessa forma, $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in [c, d]$ (ver exemplo 7.1). Em particular, para $a = (c + d)/2$, obtemos $f'(a) = 0$. O caso $y = d$ e $z = c$ é análogo. $\square$

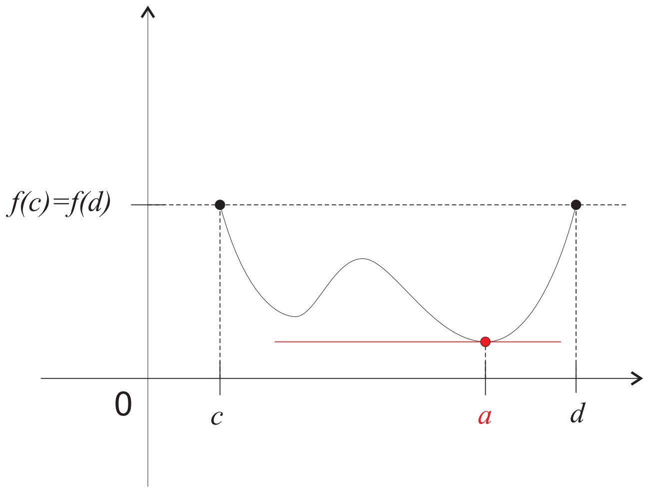

Figura 7.4: Teorema de Rolle

Exemplo 7.31. Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d), onde $f(c) = f(d) = 0$. Vamos provar que dado $b \in \mathbb{R}$, existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = bf(a)$. De fato, defina $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-bx}$ (ver definição 10.2). Dessa forma g é contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d), onde $g(c) = f(c)\mathrm{e}^{-bc} = 0 = f(d)\mathrm{e}^{-bd} = g(d)$. Além disso, $g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-bx} - bf(x)\mathrm{e}^{-bx} = [f'(x) - bf(x)]\mathrm{e}^{-bx}$ (ver Teoremas 7.2 e 10.2). Aplicando o Teorema 7.11 a g existe $a \in (c, d)$ tal que $g'(a) = 0$. Ou seja, $[f'(a) - bf(a)]\mathrm{e}^{-ba} = 0$. Portanto, $f'(a) - bf(a) = 0$. Isto é, $f'(a) = bf(a)$.

Teorema 7.12 (Teorema do Valor Médio de Lagrange)**.** *Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$ e derivável em (c, d). Então existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = \dfrac{f(d) - f(c)}{d - c}$.*

Demonstração. Seja $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - yx$, onde $y \in \mathbb{R}$ é tal que $g(c) = g(d)$. y pode ser encontrado com a igualdade $y = \dfrac{f(d) - f(c)}{d - c}$. De fato,

$g(c) = g(d) \Leftrightarrow f(c) - yc = f(d) - yd \Leftrightarrow f(d) - f(c) = yd - yc \Leftrightarrow y(d - c) = f(d) - f(c) \Leftrightarrow y =$

$\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$. Aplicando o Teorema 7.11 a g, concluímos que existe $a \in (c,d)$ tal que $g'(a) = 0$. Ou seja, $f'(a) - y = 0$. Isto é, $f'(a) = y = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$. $\square$

Exemplo 7.32. Seja $x > 0$. Pelo Teorema 7.12, existe $a \in (0,x)$ tal que $\text{sen}x - \text{sen}0 = \cos a(x-0)$ (ver exemplo 7.4). Logo, $-x \leq \text{sen}x = (\cos a)x \leq x$, pois $-1 \leq \cos a \leq 1$ e $x > 0$. Ou seja, $|\text{sen}x| \leq x$.

Exemplo 7.33. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Uma raiz de f é um número $a \in I$ tal que $f(a) = 0$. Provaremos que entre duas raízes consecultivas de f' existe no máximo uma raiz de f. Considere, por absurdo, que existem $c, d \in (y,z)$ tais que $f(c) = f(d) = f'(y) = f'(z) = 0$ (c, d são raízes de f entre as raízes consecultivas y, z de f'). Note que $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ é derivável. Dessa forma, pelo Teorema 7.12, existe $a \in (c,d)$ tal que $f'(a) = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c} = \dfrac{0}{d-c} = 0$. Mas, $y < c < a < d < z$ e $f'(a) = 0$. Absurdo! Pois y, z são raízes consecultivas de f'. Vejamos um exemplo para esta aplicação. Considere o polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Assim, p possui exatamente uma raiz em $(1,3)$. De fato, observe que $p'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Assim, $p'(1) = p'(3) = 0$. Com isso, 1 e 3 são raízes consecultivas de p'. Portanto, existe no máximo uma raiz de p em $(1,3)$. vimos no exemplo 6.19 que $\exists\ x \in (1,3)$ tal que $p(x) = 0$. Assim, este x é único.

Corolário 7.13. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in int(I) \Rightarrow f$ é constante em I.*

Demonstração. Suponha que $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in \text{int}(I)$. Sejam $c, d \in I$, então $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua e derivável em $(c,d) \subseteq \text{int}(I)$. Pelo Teorema 7.12, existe $a \in (c,d)$ tal que $0 = f'(a) = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$. Assim, $f(d) = f(c)$. Como c, d são arbitrários, então f é constante. $\square$

Exemplo 7.34. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq l|y-x|^k$, onde $x, y \in I$, $k > 1$ e $l \in \mathbb{R}$ é uma constante. Asim sendo, f é contínua (basta tomar $\varepsilon = 2l\delta^k > 0$ na definição 6.1). Observe que $0 \leq \lim\limits_{y\to x}\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \lim\limits_{y\to x}\dfrac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq \lim\limits_{y\to x}\dfrac{l|y-x|^k}{|y-x|} \leq \lim\limits_{y\to x} l|y-x|^{k-1} = 0$ (pois, $k-1 > 0$). Dessa forma, $\lim\limits_{y\to x}\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = 0$. Ou seja, $f'(x) = \lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$. Usando o Corolário 7.13, obtemos que f é constante em I.

Corolário 7.14. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então os seguintes itens são verdadeiros:*

i) *f é não-crecente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in I$;*

ii) *f é não-decrecente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$.*

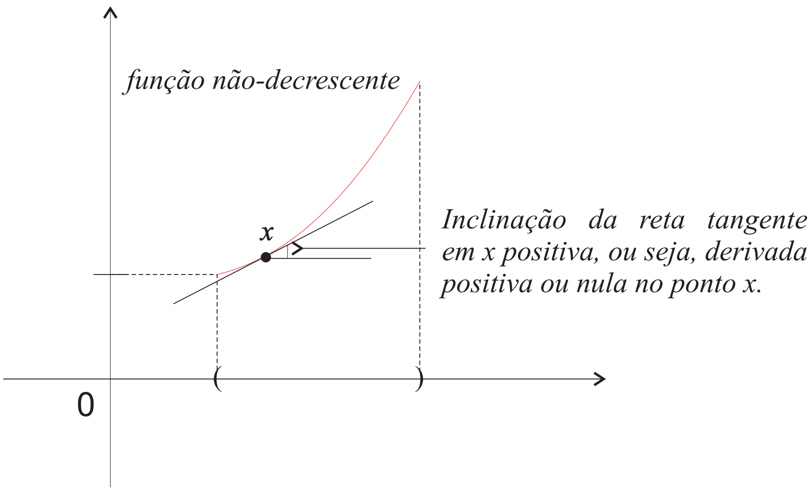

Figura 7.5: Função não-decrescente

Demonstração. $\Rightarrow$) Com o Teorema 5.5, Corolário 7.6 e sua observação provamos a ida dos itens **i)** e **ii)**.
$\Leftarrow$) Suponha que $f'(x) \leq 0$ (respectivamente, $f'(x) \geq 0$) $\forall\, x \in I$. Sejam $x, y \in I$ com $x < y$. Pelo Teorema 7.12, existe $a \in (x, y)$ tal que $f'(a) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Mas, $f'(a) \leq 0$ (respectivamente, $f'(a) \geq 0$). Portanto, $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(a) \leq 0$ (respectivamente, ≥ 0). Como $y - x > 0$, então $f(y) - f(x) \leq 0$ (respectivamente, $f(y) - f(x) \geq 0$). Ou seja, $f(y) \leq f(x)$ (respectivamente, $f(y) \geq f(x)$). Por fim, f é não-crescente (respectivamente, não-decrescente). $\square$

Exemplo 7.35. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5$. Assim, $f'(x) = 5x^4 \geq 0$. Portanto, pelo Corolário 7.14, f é uma função não-decrescente.

Exercícios de Fixação

1. Encontre os intervalos sobre os quais a função $f(x) = x^2 - 3x + 5$ é não-decrescente, não-crescente.

2. Utilize o Teorema 7.12 para provar que $|\text{sen}x - \text{sen}y| \leq |x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

3. Utilize o Teorema 7.12 para provar que $(x-1)/x \leq \ln x \leq x - 1$, para $x > 1$. **Sugestão**: Use o fato $\ln' x = 1/x$ (ver Teorema 10.1).

4. Seja $f(x) = 0$, se $x < 0$, e $f(x) = 1$, se $x \geq 0$. Mostre que não existe g tal que $g' = f$.

5. Suponha que $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0,2]$, derivável em $(0,2)$ e $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$. Mostre que existem $a, b \in (0,2)$ tais que $f'(a) = 1$ e $f'(b) = 1/3$.

7.6 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, devemos ressaltar a importância do estudo dos pontos críticos de uma função derivável. Em Topologia Diferencial estudamos funções, denominadas funções de Morse, que são definidas através de seus pontos críticos. Estas têm grande importância na Teoria de Morse, pois para quase todo ponto de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n fatores) conseguimos construir uma função de Morse através de um simples produto interno. Portanto, para o aluno interessado em Geometria recomendo uma atenção especial para definição de ponto crítico não-degenerado. Como referência educativa convido o aluno a dar uma olhada no livro [3].

7.7 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, o conceito de funções deriváveis. Neste contexto, exemplificamos e mostramos propriedades elementares de tais funções. Além disso, provamos resultados como, por exemplo, o Teorema do Valor Médio, que tem aplicações realmente surpreendente, algumas destas demonstradas na aula. Para finalizar a aula, relacionamos a monotonicidade de uma função derivável com o estudo do sinal da derivada desta função.

7.8 Exercícios Propostos:

Exercícios:

1. Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall\ x \in X$. Se f e h são deriváveis em $y \in X \cap X'$, com $f(y) = h(y)$ e $f'(y) = g'(y)$, prove que g é derivável em y, com $g'(y) = f'(y) = h'(y)$.

2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X' \cap X'$. Se $x_n < y < y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = \lim y_n = y$, prove que $\lim \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(y)$.

3. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sequências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que entretanto exista o limite $\lim \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.

4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $y \in \text{int}X$. Dê um exemplo em que o limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y+h) - f(y-h)}{2h}$ existe porém f não é derivável em y.

5. Admitindo que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ e que $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^y}{y} = \infty$, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, possui derivada nula em 0, o mesmo ocorrendo com $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f'' e assim por diante.

6. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $F : I \to \mathbb{R}$ chama-se par quando $f(-x) = f(x)$ e ímpar quando $f(-x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$. Se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Emparticular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie o resultado análogo para f ímpar.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é k vezes derivável e $f(tx) = t^k f(x)$, $\forall\ t, x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!]x^k$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

8. Dizemos que uma função f é de classe C^n, $n \in \mathbb{N}$, e escrevemos $f \in C^n$ se f é n vezes derivável e $f^{(n)}$ é contínua. Dizemos que f é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$ se $f \in C^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Dê exemplo de uma função de classe C^n que não é de classe C^{n+1}. Dê exemplo de uma função de classe C^∞.

Demonstração. Veja os exemplos 8.2 e 8.1. $\square$

9. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

10. Se $y \in I$ é um ponto crítico de $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I, prove que existe $\delta > 0$ tal que y é o único ponto crítico de f no intervalo $(y - \delta, y + \delta)$. Conclua que, se f é de classe C^1, então num conjunto compacto $K \subseteq I$, onde os pontos críticos de f são todos não-degenerados, só existe um número finito destes.

11. Prove que se o ponto crítico y da função $f : I \to \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos críticos $(y_n) \subseteq I \setminus \{y\}$ e $f''(y)$ existe, então $f''(y) = 0$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x/x$. Admitindo que $(\log)'(x) = 1/x$, indique os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos críticos e seus limites quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.

13. Faça um trabalho análogo ao do exercício anterior para a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \mathrm{e}^x/x$, admitindo que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

14. Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$, derivável e m (c, d), exceto possivelmente em $y \in (c, d)$. Se $\lim\limits_{x \to y} f'(x) = l$, prove que $f'(y) = l$.

15. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar. Prove que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $p''(y) = 0$.

7.9 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $y \in X \cap X' \Leftrightarrow$ existe uma função $g : X \to \mathbb{R}$, contínua em y, tal que $f(x) = f(y) + g(x)(x - y)$, $\forall\, x \in X$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $y \in X \cap X'$. Defina $g : X \to \mathbb{R}$ por: $g(x) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ se $x \neq y$ e $g(y) = f'(y)$. Observe que $\lim\limits_{x \to y} g(x) = \lim\limits_{x \to y} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(y) = g(y)$. Portanto, g é contínua em $y \in X \cap X'$. Além disso, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ se $x \neq y$. Logo, $g(x)(x - y) = f(x) - f(y)$ se $x \neq y$. Ou seja, $f(x) = g(x)(x - y) + f(y)$ se $x \neq y$. É claro que esta igualdade vale também para $x = y$. Assim, $f(x) = g(x)(x-y)+f(y)$, $\forall\, x \in X$.
$\Leftarrow$) Seja $g : X \to \mathbb{R}$, contínua em y, tal que $f(x) = f(y) + g(x)(x - y)$, $\forall\, x \in X$. Assim sendo, $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim\limits_{x \to y} g(x) = g(y)$, pois g é contínua em $y \in X \cap X'$. Dessa forma, f é derivável em $y \in X \cap X'$ e $f'(y) = g(y)$. $\square$

Ex2. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado.

Demonstração. Seja $C = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos críticos de f. Vamos provar que C é fechado. Considere $y \in \overline{C}$. Dessa forma, existe $(x_n) \subseteq C$ tal que $\lim x_n = y$. Veja que $f'(x_n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Como $f \in C^1$, então f' é contínua. Portanto, $0 = \lim f'(x_n) = f'(y)$. Ou seja, $f'(y) = 0$. Isto é, $y \in C$. Com isso, C é fechado. $\square$

Ex3. Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua em $[c, d]$, derivável em (c, d), com $f'(x) \geq 0, \forall\, x \in (c, d)$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é crescente.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f não é crescente. Assim sendo, existem $a < b$ tais que $a, b \in [c, d]$ e $f(a) \geq f(b)$. Se $f(a) > f(b)$, então, pelo Teorema 7.12, existe $z \in (a, b) \subseteq (c, d)$ tal que $f'(z) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$. Considerando que $f'(x) \geq 0, \forall\, x \in (c, d)$, obtemos um absurdo. Consequentemente, $f(a) = f(b)$. Dessa forma, usando o Teorema 7.11, concluímos que existe $u \in (a, b) \subseteq (c, d)$, tal que $f'(u) = 0$. Agora, pela Lei da Tricotomia, temos que ou $f(u) = f(a)$, ou $f(u) > f(a)$ ou $f(u) < f(a)$. Se $f(u) > f(a) = f(b)$, então pelo Teorema 7.12 existe $p \in (u, b) \subseteq (c, d)$ tal que $f'(p) = \dfrac{f(b) - f(u)}{b - u} < 0$. Isto é um absurdo, pois $f'(x) \geq 0, \forall\, x \in (c, d)$. Se $f(u) < f(a)$, então pelo Teorema 7.12 existe $q \in (a, u) \subseteq (c, d)$ tal que $f'(q) = \dfrac{f(u) - f(a)}{u - a} < 0$. Isto é um absurdo, pois $f'(x) \geq 0, \forall\, x \in (c, d)$. Logo, $f(a) = f(u)$. Portanto, utilizando o Teorema 7.11, existe $v \in (a, u) \subseteq (c, d)$ tal que $f'(v) = 0$. Repitindo o processo, encontramos uma infinidade de valores em (c, d) que satisfazem $f'(x) = 0$. Isto prova o resultado por contraposição. $\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de identificar funções deriváveis e saber aplicar corretamente a Regra da Cadeia e o Teorema do Valor Médio?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estudaremos a Fórmula de Taylor. A partir desta, podemos aproximar algumas funções a um determinado polinômio.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, First Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974. 227p.

[4] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo