Capítulo 8

Fórmula de Taylor em $\mathbb{R}$

Aula 8: Fórmula de Taylor em $\mathbb{R}$

Meta

Apresentar ao aluno quando é possível derivar mais que uma vez uma determinada função real. Mostraremos também que existe uma fórmula para aproximar linearmente tais funções. Esta fórmula é denominada Fórmula de Taylor.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de aplicar corretamente a Fórmula de Taylor.

Pré-requisitos

Aula 7, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

8.1 Introdução

Olá, iniciamos esta aula exemplificando que algumas funções possuem a propriedade de serem deriváveis mais que uma vez, isto é, definimos o que significa derivada de ordem superior. Como um bom exemplo, damos uma fórmula para encontrar a derivada de ordem qualquer da função seno. Para mostar que esta definição faz sentido, construímos um exemplo de função que não possui derivada de todas as ordens. Em seguida, provamos a Fórmula de Taylor Infinitesimal. Para esta, mostramos uma aplicação que relaciona o sinal da segunda derivada de uma função com seus pontos de máximo e mínimo locais. Outra aplicação, de grande importância computacional, demonstrada nesta aula, é a Regra de L'Hôpital. Por fim, mostramos uma outra maneira de escrever a Fórmula de Taylor, esta é denominada Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange. Com esta, mostramos o valor aproximado para o número de Euler e.

8.2 Derivadas de Ordem Superior

Caro leitor, para enunciarmos e provarmos o Teorema da Fórmula de Taylor precisamos da definição de derivada de ordem superior. Assim sendo, vamos começar esta seção com a seguinte

Definição 8.1 (Derivada de Ordem Superior)**.** Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é n-vezes derivável em I quando $f^{(n)}(y)$ existe $\forall\, y \in I$. Aqui, $f^{(n)}(y)$ é denominada n-ésima derivada de f no ponto y e é indutivamente definida por $f^{(0)}(y) = f(y)$, $f''(y) = (f')'(y)$ e $f^{(n)}(y) = (f^{(n-1)})'(y)$, $\forall\, n = 2, 3, ...$.

Exemplo 8.1 (Derivada n-ésima do Seno)**.** Observe que $\text{sen}'(y) = \cos y$. Portanto, $\text{sen}''(y) = \cos'(y) = -\text{sen} y$. Portanto, $\text{sen}'''(y) = (-\text{sen})'(y) = -\cos y$. Consequentemente, $\text{sen}^{(iv)}(y) = (-\cos)'(y) = \text{sen}(y)$. Indutivamente, temos que:

$$\text{sen}^{(2n)}(y) = (-1)^n \text{sen}(y) \text{ e } \text{sen}^{(2n-1)}(y) = (-1)^{n+1} \cos y.$$

Definição 8.2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Dizemos que f é n vezes derivável em $y \in I$ quando existe $\delta > 0$ tal que f é $n-1$ vezes derivável em $I \cap (y - \delta, y + \delta)$ e $f^{(n)}(y)$ existe.

Exemplo 8.2. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^n|x|$, para algum $n \in \mathbb{N}$. f não é $(n+1)$-vezes derivável em 0. Veja que, $f^{(n)}(x) = (n+1)!|x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^n|h| - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^{n-1}|h| = 0$. Pela definição de f, $f(x) = x^{n+1}$, se $x > 0$ e $f(x) = -x^{n+1}$, se $x < 0$. Portanto, $f'(x) = (n+1)x^n$, se $x > 0$ e $f'(x) = -(n+1)x^n$, se $x < 0$. Por outro lado, a função modular não é derivável em 0. Logo, não existe $f^{(n+1)}(0)$. (ver exemplo 7.5).

Exemplo 8.3 (Derivada n-ésima do Cosseno)**.** Note que $\cos'(y) = -\text{sen}y$. Portanto, $\cos''(y) = (-\text{sen})'(y) = -\cos y$. Logo, $\cos'''(y) = (-\cos)'(y) = \text{sen}y$. Consequentemente, $\cos^{(iv)}(y) = \text{sen}'(y) = \cos(y)$. Indutivamente, temos que:

$$\cos^{(2n)}(y) = (-1)^n \cos(y) \text{ e } \cos^{(2n-1)}(y) = (-1)^n \text{sen}y.$$

Exercícios de Fixação

1. Seja $f(x) = \cos(yx)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$ é constante. Encontre $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Utilize indução para provar a regra de Leibniz: $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{i}$.

8.3 Teorema Fórmula de Taylor em $\mathbb{R}$

Lema 8.1. *Seja $r : J \to \mathbb{R}$ n-vezes derivável em $0 \in J$, onde $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Então*

$$r^{(i)}(0) = 0, \forall\ i \in 0, 1, 2..., n \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $r^{(i)}(0) = 0, \forall\ i \in 0, 1, 2..., n$. Considere que $n = 1$. Assim, $r(0) = r'(0) = 0$. Dessa forma,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^1} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h - 0} = r'(0) = 0.$$

Agora, considere que $n = 2$. Logo, $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$. Com isso, usando o Teorema 7.12, concluímos que existe $a \in (0, h)$, com h suficientemente pequeno, tal que $r'(a) = \dfrac{r(h) - r(0)}{h - 0} = \dfrac{r(h) - 0}{h} = \dfrac{r(h)}{h}$. Portanto, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h}\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r'(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r'(a)}{a}\dfrac{a}{h}$. Quando $h \to 0$, tem-se que $a \to 0$. Logo, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r'(a) - r'(0)}{a - 0}\dfrac{a}{h} = 0$, pois $r''(0) = 0$, $a/h \leq 1$ (ver Teorema 5.9). Seguindo este processo provamos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$.

$\Leftarrow$) Agora, suponha que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$. Primeiramente provaremos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^i} = 0, \forall\ i = 0, 1, 2..., n$. De fato,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^i} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} h^{n-i} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} \lim_{h\to 0} h^{n-i} = 0,$$

pois $n - i \geq 0$. Como r é derivável em 0, então, pelo Teorema 7.1, r é contínua em 0. Dessa forma, $r(0) = \lim\limits_{h\to 0} r(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^0} = 0$, $r'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h) - r(0)}{h - 0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. Defina $f : J \to \mathbb{R}$ por $f(h) = r(h) - \dfrac{r''(0)h^2}{2}$. Assim sendo, $f(0) = r(0) - \dfrac{r''(0)0}{2} = 0$, $f'(0) = r'(0) - r''(0)0 = 0$ e $f''(0) = r''(0) - r''(0) = 0$. Dessa forma, pelo que foi feito nesta prova $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h^2} = 0$. Por fim, $0 = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \left[\dfrac{f(h)}{h^2} - \dfrac{r''(0)}{2}\right] = -\dfrac{r''(0)}{2}$. Consequentemente, $r''(0) = 0$. Proseguindo este processo, garantimos que $r^{(i)}(0) = 0$, $\forall\ i = 0, 1, ..., n$. $\square$

Teorema 8.1 (Fórmula de Taylor Infinitesimal)**.** *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n-vezes deriváveis em $y \in I$. Defina $r : J \to \mathbb{R}$ por $r(h) = f(y+h) - f(y) - f'(y)h - f''(y)\frac{h^2}{2!} - ... - f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!}$, onde $J = \{h \in \mathbb{R} : y + h \in I\}$. Então $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. O polinômio $p(h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + ... + f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!}$ é chamado polinômio de Taylor de ordem n para a função f no ponto y. Este polinômio é único que satisfaz a definição de $r(h) = f(y+h) - p(h)$, onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.*

Demonstração. Como f é n vezes derivável em $y \in I$, então, utilizando a definição de r, temos que r é n-vezes derivável em $0 \in J$ (ver Teorema 7.2). Veja que $r(0) = f(y) - f(y) - f'(y)0 - f''(y)\frac{0}{2!} - ... - f^{(n)}(y)\frac{0}{n!} = 0$, $r'(0) = f'(y) - f'(y) - 2f''(y)\frac{0}{2!} - ... - nf^{(n)}(y)\frac{0}{n!} = 0$, ..., $r^{(n)}(0) = 0$. Usando o Lema 8.1, concluímos que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Vamos provar que o polinômio de Taylor de f é o único que satisfaz a definição de r. Suponha que existe p polinômio tal que $r(h) = f(y+h) - p(h)$, onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Usando novamente o Lema 8.1, obtemos $r^{(i)}(0) = 0$, $\forall\ i = 0, 1, 2, ..., n$. Daí, $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(y) - r^{(i)}(0) = f^{(i)}(y)$, $\forall\ i = 0, 1, ..., n$. Dessa forma, se $p(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$, então $p^{(i)}(0) = i! a_i$, $\forall\ i = 0, 1, ..., n$. Ou seja, $a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}$. Logo, $p(h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + ... + f^{(n)}(y)\frac{h^n}{n!}$. □

Obs 8.1. Como $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$, então o polinômio de taylor de f em y é uma aproximação de f para os pontos próximos a y.

Exemplo 8.4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $y \in \text{int}I$. Considere que y é ponto crítico de f e $f''(y) \neq 0$ (neste caso y é chamado ponto crítico não-degenerado de f). Então

i) $f''(y) > 0 \Rightarrow y$ é ponto de mínimo local de f;

ii) $f''(y) < 0 \Rightarrow y$ é ponto de máximo local de f.

Demonstração. **i)** Como $y \in \text{int}I$, então existe $\lambda > 0$ tal que $(y - \lambda, y + \lambda) \subseteq I$ (ver definição 4.1). Ou seja, $y + h \in I$, se $|h| < \lambda$. Utilizando o Teorema 8.1, temos que $f(y+h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\frac{h^2}{2!} + r(h)$, onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$. Mas $f'(y) = 0$. Assim, $f(y+h) = f(y) + f''(y)\frac{h^2}{2!} + r(h)$. Dessa forma, $\frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} = \left[\frac{f''(y)}{2!} + \frac{r(h)}{h^2}\right]$. Portanto, $\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f''(y)}{2!} + \frac{r(h)}{h^2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f''(y)}{2!} + \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = \frac{f''(y)}{2!} > 0$. Pelo

Teorema 5.2, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\forall\ h \in I$, com $0 < |h| < \delta_1$, tem-se $\dfrac{f(y+h)-f(y)}{h^2} > 0$. Seja $0 < \delta < \min\{\delta_1, \lambda\}$. Logo, $f(y+h) - f(y) > 0$, $\forall\ h \in I$, com $0 < |h| < \delta$. Ou seja, $f(y+h) > f(y)$, $\forall\ h \in I$, com $0 < |h| < \delta$. Isto nos diz que y é ponto de mínimo local de f.
ii) Novamente pelo Teorema 8.1, concluímos que $f(y+h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\dfrac{h^2}{2!} + r(h)$, onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$. Mas $f'(y) = 0$. Com isso, $f(y+h) = f(y) + f''(y)\dfrac{h^2}{2!} + r(h)$. Portanto, $\dfrac{f(y+h)-f(y)}{h^2} = \left[\dfrac{f''(y)}{2!} + \dfrac{r(h)}{h^2}\right]$. Dessa forma, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y+h)-f(y)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f''(y)}{2!} + \dfrac{r(h)}{h^2}\right] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f''(y)}{2!} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^2} = \dfrac{f''(y)}{2!} < 0$. Pelo Teorema 5.2, existe $0 < \delta < \lambda$ tal que $\forall\ h \in I$, com $0 < |h| < \delta$, tem-se $\dfrac{f(y+h)-f(y)}{h^2} < 0$. Logo, $f(y+h) - f(y) < 0$. Ou seja, $f(y+h) < f(y)$. Por fim, y é ponto de máximo local de f. $\square$

Exemplo 8.5 (Regra de L'Hôpital)**.** Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ n vezes deriváveis em $y \in I$. Considere que $f^{(i)}(y) = g^{(i)}(y)$, $\forall\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$ e $g^{(n)}(y) \neq 0$. Então, $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n)}(y)}{g^{(n)}(y)}$. De fato, usando o Teorema 8.1, $f(y+h) = f(y) + f'(y)h + f''(y)\dfrac{h^2}{2!} + ... + f^{(n)}(y)\dfrac{h^n}{n!} + r(h) = f^{(n)}(y)\dfrac{h^n}{n!} + r(h)$, onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$. Analogamente, $g(y+h) = g(y) + g'(y)h + g''(y)\dfrac{h^2}{2!} + ... + g^{(n)}(y)\dfrac{h^n}{n!} + s(h) = g^{(n)}(y)\dfrac{h^n}{n!} + s(h)$, onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(h)}{h^n} = 0$. Portanto, $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y+h)}{g(y+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{f^{(n)}(y)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}}{\frac{g^{(n)}(y)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n}} = \dfrac{f^{(n)}(y)}{g^{(n)}(y)}$.

Teorema 8.2 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange)**.** *Seja $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ n vezes derivável em (c, d), onde $f^{(n-1)}$ é contínua em $[c, d]$. Então, existe $x \in (c, d)$ tal que*

$$f(d) = f(c) + f'(c)(d-c) + f''(c)\frac{(d-c)^2}{2!} + ... + f^{(n-1)}(c)\frac{(d-c)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x)\frac{(d-c)^n}{n!}.$$

Demonstração. Seja $k = \dfrac{n!}{(d-c)^n}\left[f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \dfrac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$.
Defina $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(d) - f(x) - f'(x)(d-x) - ... - \dfrac{f^{(n-1)}(x)(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} - \dfrac{k(d-x)^n}{n!}$. Portanto,

$$g(c) = f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!} - \Big[f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ...$$

- $\dfrac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!}\Big] = 0.$

Além diso,

$$g(d) = f(d) - f(d) - f'(c)(d-d) - ... - \frac{f^{(n-1)}(c)(d-d)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{k(d-d)^n}{n!} = 0.$$

Como f é n vezes derivável em (c,d) e $f^{(n-1)}$ é contínua em $[c,d]$, então g é contínua em $[c,d]$, derivável em (c,d) e $g'(x) = \dfrac{k - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(d-x)^{n-1}$. Mas $g(c) = g(d) = 0$. Dessa forma, pelo Teorema 7.11, existe $x \in (c,d)$ tal que $g'(x) = 0$. Ou seja, $\dfrac{k - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(d-x)^{n-1} = 0$. Isto é, $k - f^{(n)}(x) = 0$. Por fim, $f^{(n)}(x) = k = \dfrac{n!}{(d-c)^n}\Big[f(d) - f(c) - f'(c)(d-c) - ... - \dfrac{f^{(n-1)}(c)(d-c)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]$. $\square$

Exemplo 8.6. Seja $\mathrm{e} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^x$, $\forall\ x \in [0,1]$ (ver definição 10.2). Considere que $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$, $\forall\ x \in [0,1]$ (ver Teorema 10.2). Assim sendo, pelo Teorema 8.2, temos que existe $x \in (0,1)$ tal que:

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} + \frac{\mathrm{e}^x}{9!}.$$

Veja que o polinômio de Taylor de ordem 9 de e no ponto 1 é dado por $1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{8!}$. Assim, $\mathrm{e} \approx 2,71828$.

Exercícios de Fixação

1. Encontre o valor aproximado de $\sqrt{2}$.

2. Se $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que $|\ln(1+x) - (x - x^2/2 + x^3/3 - ... + (-1)^{n-1}x^n/n)| < x^{n+1}/(n+1)$. Utilize este fato para aproximar $\ln(3/2)$.

8.4 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar que a Fórmula de Taylor é uma boa ferramenta para aproximar alguns valores, tais como raiz quadrada e o número de Euler. Além disso, existem limites de expressões indeterminadas, encontradas no cálculo elementar, que são solucionados com aplicação da Regra de L'Hôpital, a qual é consequência imediata da Fórmula de Taylor Infinitesimal. Portanto, o Teorema da Fórmula de Taylor deve fazer parte do conhecimento do aluno.

8.5 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, dois estudos improtantíssimos na teoria de derivada de funções reais. Estes são: derivada de ordem superior e Fórmula de Taylor. Estes estão ligados estreitamente e nos levam a um estudo do comportamento local da função. Por exemplo, vimos como encontrar pontos de máximo ou mínimo local, através da segunda derivada da função, usando a Fórmula de Taylor.

8.6 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Prove a igualdade $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1}/(1-x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Use a Fórmula de Taylor Infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto 0, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(1-x)$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5/(1+x^6)$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 de f no ponto 0.

3. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n. Prove que $y, x \in \mathbb{R}$ quaisquer tem-se $p(x) = p(y) + p'(y)(x-y) + ... + \dfrac{p^{(n)}(y)(x-y)^n}{n!}$.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em $y \in \text{int } I$. Prove que

$$f''(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) + f(y-h) - 2f(y)}{h^2}.$$

8.7 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável num ponto $y \in \text{int}I$. Prove que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y+h) - f(y-h)}{2h} = f'(y)$.

Demonstração. Como f é derivável em $y \in \text{int}I$, então, utilizando o Teorema 8.1, temos que:

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + r(h), \text{ onde } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

$$f(y-h) = f(y) - f'(y)h + s(h), \text{ onde } \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} = 0.$$

Subtraindo a segunda desigualdade da primeira, encontramos: $f(y+h) - f(y-h) = 2f'(y)h + r(h) - s(h)$. Com isso, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y+h) - f(y-h)}{2h} = \lim\limits_{h\to 0} \left[f'(y) + \dfrac{r(h) - s(h)}{2h} \right] = f'(y) + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{2h} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(h)}{2h} = f'(y)$. □

Ex2. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em $y \in \text{int } I$. Se $f(y) = g(y)$, $f'(y) = g'(y)$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\ x \in I$, prove que $f''(y) \geq g''(y)$.

Demonstração. Defina $p : I \to \mathbb{R}$ por $p(x) = f(x) - g(x)$. Assim sendo, p é duas vezes derivável em $y \in \text{int}I$. Por conseguinte, $p(y) = f(y) - g(y) = 0$, $p'(y) = f'(y) - g'(y) = 0$ e $p(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in I$. Usando o Teorema 8.1, temos que $p(y+h) = p(y) + p'(y)h + p''(y)h^2/2 + r(h)$, onde $\lim\limits_{h\to 0} r(h)/h^2 = 0$. Com isso, para h suficientemente pequeno, $0 \leq p(y+h) = p''(y)h^2/2 + r(h)$. Ou seja, $0 \leq p''(y)/2 + \lim\limits_{h\to 0} r(h)/h^2 = p''(y)/2$. Portanto, $f''(y) - g''(y) = p''(y) \geq 0$. Isto é, $f''(y) \geq g''(y)$. □

Ex3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n vezes derivável em $y \in \mathbb{R}$. Prove que se, para algum $y \in \mathbb{R}$ vale $f'(y) = ... = f^{(n)}(y) = 0$. então $(g \circ f)^{(i)}(y) = 0$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Demonstração. Usando o Teorema 7.3, concluímos que $(g \circ f)'(y) = g'(f(y))f'(y) = g'(f(y)) \cdot 0 = 0$. Analogamente, $(g \circ f)''(y) = [(g' \circ f)f']'(y) = [(g'' \circ f)(f')^2 + (g' \circ f)f''](y) = (g'' \circ f)(y)(f')^2(y) + (g' \circ f)(y)f''(y) = (g'' \circ f)(y) \cdot 0 + (g' \circ f)(y) \cdot 0 = 0$. Generalize este processo por indução sobre n. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de aplicar corretamente o Teorema da Fórmula de Taylor?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estudaremos Integral de funções reais limitadas. Recomendo ao aluno fazer uma revisão nas definições de supremo e ínfimo. Estas serão utilizadas com muita frequência na próxima aula.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[4] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo