Capítulo 9

Integral de Riemann em $\mathbb{R}$

Aula 9: Integral de Riemann

Meta

Apresentar ao aluno as funções reais que são integráveis a Riemann. Mostraremos também resultados como, por exemplo, Teorema Fundamental do Cálculo, Mudança de Variável e Integração por Partes, os quais têm aplicações diretas em Equações Diferenciais Parciais (ver dissertação [5]).

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar funções integráveis em $\mathbb{R}$ e aplicar corretamente os Teoremas Fundamental do Cálculo, Mudança de Variáveis e Integração por Partes.

Pré-requisitos

Aula 8, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

9.1 Introdução

Oi, nesta aula, mostramos através de somas inferior e superior como verificar se uma determinada função real limitada é integrável. De posse destas funções, estudamos que operações elementares podem ser feitas para obter novamente uma função do mesmo tipo, ou seja, integrável. Em seguida, demonstramos condições suficientes de integrabilidade. Mostraremos que qualquer função contínua ou monótona é também integrável. Assim sendo, já estudamos funções integráveis na aula 5. Por fim, veremos alguns Teoremas, relacionados a integrabilidade de funções, que nos possibilita entender por que a integral indefinida é, em alguns textos, considerada uma antiderivada. Entre estes estão os Teoremas Fundamental do Cálculo e Mudança de Variável. Aplicações destes dois resultados estão inseridas também no contexto de Matemática Financeira e Ciências Biológicas.

9.2 Integral de Riemann e Exemplos

Definição 9.1 (Partição)**.** Um subconjunto finito $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subseteq [a, b]$ do intervalo $[a, b]$ é denominado uma partição deste intervalo se $a, b \in P$. Por convenção, consideraremos que $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Denotaremos a partição P por: $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$.

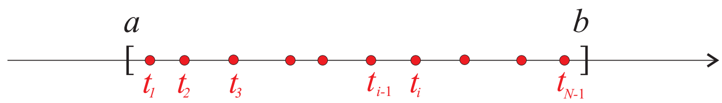

Figura 9.1: Partição

Definição 9.2 (i-ésimo Intervalo)**.** Seja $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall\ i = 1, 2, ...n$, é denominado i-ésimo intervalo da partição P.

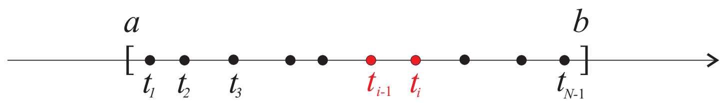

Figura 9.2: I-ésimo intervalo

Exemplo 9.1. O conjunto $P = \{1,2,4\}$, $Q = \{1,3,4\}$ e $R = \{1,2,3,4\}$ são partições do intervalo $[1,4]$. Os intervalos $[1,2]$ e $[2,4]$ são, respectivamente, o primeiro e o segundo intervalo da partição P.

Definição 9.3. Uma partição Q de $[a,b]$ refina a partição P de $[a,b]$ se $P \subseteq Q$.

Exemplo 9.2. A partição $Q = \{1,3,4\}$ de $[1,4]$ não refina a partição $P = \{1,2,4\}$ de $[1,4]$, pois $2 \in P$, mas $2 \notin Q$. Porém, a partição $R = \{1,2,3,4\}$ refina a partição $Q = \{1,3,4\}$, pois $Q \subseteq R$.

Exemplo 9.3. Se P e Q são partições de um intervalo $[a,b]$, então $P \cup Q$ é uma partição de $[a,b]$ que refina P e Q simultaneamente, já que $P \cup Q$ é finito e $P, Q \subseteq P \cup Q$.

Definição 9.4 (Oscilação)**.** Seja $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Sejam $m_i^f = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e $M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $\forall\ i = 1,2,...,n$. Definimos e denotamos a oscilação de f no i-ésimo intervalo de P por:

$$w_i^f = M_i^f - m_i^f, \forall\ i = 1,2...,n.$$

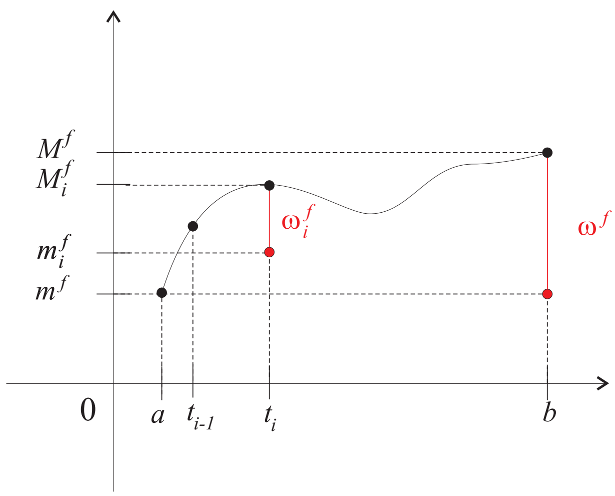

Figura 9.3: Oscilação

Obs 9.1. Observe que a oscilação depende da partição estudada.

Obs 9.2. Denotaremos $m^f = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $M^f = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Exemplo 9.4. Lembre da função característica de $\mathbb{Q}$ (ver exemplo 6.15). Analogamente podemos definir a função característica de $\mathbb{Q}$ no intervalo $[a,b]$. Ou seja, defina $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ por $f(x)=1$, se $x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}$ e $f(x)=0$, caso contrário. Seja $P: a=t_0<...<t_n=b$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Como em qualquer intervalo não-degenerado existe um número racional e um irracional (ver Teorema 1.6), então f assume os valores 0 e 1 em qualquer intervalo da partição P. Com isso, $m_i^f=\inf\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}=0$ e $M_i^f=\sup\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}=1$, $\forall\ i=1,2,...,n$. Portanto, $w_i^f=M_i^f-m_i^f=1$, $\forall\ i=1,2,...,n$.

Exemplo 9.5. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=k=$ constante, $\forall\ x\in[a,b]$. Considere $P: a=t_0<...<t_n=b$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Assim, $m_i^f=\inf\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}=\inf\{k: x\in[t_{i-1},t_i]\}=k$ e $M_i^f=\sup\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}=\sup\{k: x\in[t_{i-1},t_i]\}=k$, $\forall\ i=1,2,...,n$. Portanto, $w_i^f=M_i^f-m_i^f=k-k=0$, $\forall\ i=1,2,...,n$.

Exemplo 9.6. Seja $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1$, $\forall\ x\in[1,2)$ e $f(2)=2$. Considere $P: 1=t_0<...<t_n=2$ uma partição qualquer de $[1,2]$. Assim, $m_i^f=\inf\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}=1$, $\forall\ i=1,2,...,n$ $(f(x)\geq 1)$, $M_i^f=\sup\{f(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}=\sup\{1: x\in[t_{i-1},t_i]\}=1$, $\forall\ i=1,2,...,n-1$ e $M_n^f=\sup\{f(x): x\in[t_{n-1},2]\}=2$, pois $f(2)=2$. Portanto, $w_i^f=M_i^f-m_i^f=1-1=0$, $\forall\ i=1,2,...,n-1$ e $w_n^f=M_n^f-m_n^f=2-1=1$.

Definição 9.5 (Somas Inferior e Superior)**.** *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos as somas inferior e superior de f em relação à partição $P: a: t_0<...<t_n=b$, respectivamente, por* $s^f(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i-t_{i-1})$ *e* $S^f(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i-t_{i-1})$.

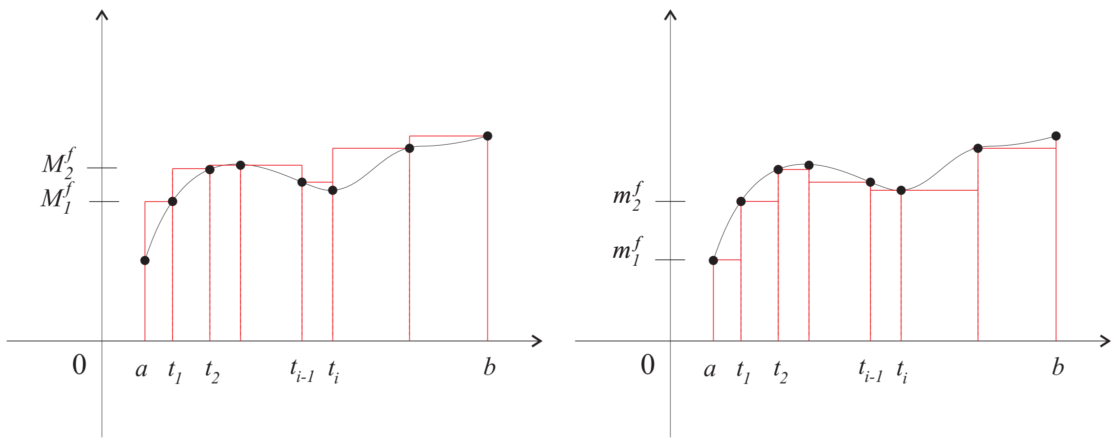

Figura 9.4: Somas superior e inferior respectivamente

Obs 9.3. Note que as somas inferior e superior dependem da partição que está sendo considerada.

Obs 9.4. Observe que $s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m^f(t_i - t_{i-1}) = m^f \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = m^f(t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - t_{n-2} + ... + t_2 - t_1 + t_1 - t_0) = m^f(t_n - t_0) = m^f(b - a)$, pois $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [a, b]$ (ver exercícios sobre supremo e ínfimo em números reais). Assim, $s^f(P) \geq m^f(b - a)$. Analogamente, $S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M^f(t_i - t_{i-1}) = M^f \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = M^f(t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - t_{n-2} + ... + t_2 - t_1 + t_1 - t_0) = M^f(t_n - t_0) = M^f(b - a)$. Assim, $S^f(P) \leq M^f(b - a)$, pois $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [a, b]$ (ver exercícios sobre supremo e ínfimo em números reais). Por outro lado, $s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = S^f(P)$, pois $m_i^f \leq M_i^f$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$ (ver exercícios sobre supremo e ínfimo em números reais). Com isso, $m^f(b - a) \leq s^f(P) \leq S^f(P) \leq M^f(b - a)$.

Obs 9.5. Note que $S^f(P) - s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i^f - m_i^f)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} w_i^f(t_i - t_{i-1})$.

Exemplo 9.7. No exemplo 9.4 vimos que a função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, se $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, caso contrário, satisfaz $m_i^f = 0$ e $M_i^f = 1$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$ para qualquer $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$. Portanto, $s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = 0$ e $S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Exemplo 9.8. Vimos que a função constante, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, satisfaz $m_i^f = M_i^f = k$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$, para qualquer partição $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$. Dessa forma, $s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(t_i - t_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = k(b - a)$ e $S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(t_i - t_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = k(b - a)$.

Exemplo 9.9. No exemplo 9.6 vimos que a função, $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1, 2)$ e $f(2) = 2$ satisfaz $m_i^f = 1$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$, $M_i^f = 1$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n - 1$ e $M_n^f = 2$ para qualquer partição $P : 1 = t_0 < ... < t_n = 2$ de $[1, 2]$. Portanto, $s^f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = 2 - 1 = 1$ e $S^f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}(t_i - t_{i-1}) + 2(t_n - t_{n-1}) = t_{n-1} - t_0 + 2(t_n - t_{n-1}) = 4 - 1 - t_{n-1} = 3 - t_{n-1}$.

Definição 9.6 (Integrais Inferior e Superior)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As integrais inferior e superior de f são definidas e denotadas, respectivamente, por:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

Obs 9.6. O supremo e ínfimo na definição 9.6 estão sendo encontrados variando as partições, denotadas por P, do intervalo $[a, b]$.

Exemplo 9.10. No exemplo 9.7 vimos que para a função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, se $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, caso contrário, satisfaz $s^f(P) = 0$ e $S^f(P) = b - a$, $\forall$ P partição de $[a, b]$. Portanto, $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} = \sup\{0 : P \text{ partição de } [a, b]\} = 0$ e $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{b - a : P \text{ partição de } [a, b]\} = b - a$.

Exemplo 9.11. Vimos, no exemplo 9.8, que a função constante, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, satisfaz $s^f(P) = k(b - a)$ e $S^f(P) = k(b - a)$, $\forall$ P partição de $[a, b]$. Assim sendo, $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} = \sup\{k(b - a) : P \text{ partição de } [a, b]\} = k(b - a)$ e $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{k(b-a) : P \text{ partição de } [a, b]\} = k(b-a)$.

Teorema 9.1. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P, Q partições de $[a, b]$ tais que $P \subseteq Q$ (isto é, Q refina P), então $s^f(P) \leq s^f(Q)$ e $S^f(Q) \leq S^f(P)$. Em palavras, quando refinamos uma partição a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.*

Demonstração. A demonstração se resume a uma partição do tipo $Q = P \cup \{c\} \supseteq P$, já que o que faremos abaixo pode ser generalizado com uma quantidade finita de passos semelhantes. Assim sendo, sejam $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ e $Q : a < t_0 < ... < t_{j-1} < c < t_j < ... < t_n = b$ partições de $[a, b]$ (consideramos que c está no j-ésimo intervalo de Q). Sejam $M_{c1}^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, c]\}$, $M_{c2}^f = \sup\{f(x) : x \in [c, t_j]\}$. Como $[t_{j-1}, c], [c, t_j] \subseteq [t_{j-1}, t_j]$, então $M_{c1}^f, M_{c2}^f \leq M_j^f$. Com isso,

$$S^f(Q) - S^f(P) \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{j-1} M_i^f(t_i - t_{i-1}) - M_{c1}^f(c - t_{j-1}) - M_{c2}^f(t_j - c)$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{i=j+1}^{n} M_i^f(t_i - t_{i-1}) \\
&= M_1^f(t_1 - t_0) + M_2^f(t_2 - t_1) + ... + M_j^f(t_j - t_{j-1}) + M_{j+1}^f(t_{j+1} - t_j) + ... \\
&+ M_n^f(t_n - t_{n-1}) - M_1^f(t_1 - t_0) - M_2^f(t_2 - t_1) - ... - M_{j-1}^f(t_{j-1} - t_{j-2}) \\
&- M_{c1}^f(c - t_{j-1}) - M_{c2}^f(t_j - c) - M_{j+1}^f(t_{j+1} - t_j) - M_{j+2}^f(t_{j+2} - t_{j+1}) - ... \\
&- M_n^f(t_n - t_{n-1}) \\
&= M_j^f(t_j - t_{j-1}) - M_{c1}^f(c - t_{j-1}) - M_{c2}^f(t_j - c) \\
&\geq M_j^f(t_j - t_{j-1}) - M_j^f(c - t_{j-1}) - M_j^f(t_j - c) \\
&= M_j^f(t_j - t_{j-1} - c + t_{j-1} - t_j + c) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $S^f(Q) - S^f(P) \geq 0$. Ou seja, $S^f(Q) \geq S^f(P)$. Analogamente, $s^f(P) \leq s^f(Q)$. □

Corolário 9.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam P e Q partições de $[a, b]$ quaisquer, então $s^f(P) \leq S^f(Q)$. Em palavras, a soma inferior nunca supera a soma superior.*

Demonstração. Sejam P e Q partições de $[a, b]$. Vimos no exemplo 9.3 que $P \cup Q$ é uma partição que refina P e Q simultaneamente. Com iso, pelo Teorema 9.1, temos que: $s^f(P) \leq s^f(P \cup Q) \leq S^f(P \cup Q) \leq S^f(Q)$. Portanto, $s^f(P) \leq S^f(Q)$. □

Corolário 9.3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada tal que $m^f \leq f(x) \leq M^f$, $\forall\, x \in [a, b]$. Então:*

$$m^f(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M^f(b - a).$$

Demonstração. Vimos na observação 9.5 que: $m^f(b-a) \leq s^f(P) \leq S^f(P) \leq M^f(b-a)$, $\forall\, P$ partição de $[a, b]$. Dessa forma, $m^f(b-a) \leq s^f(P) \leq \sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} = \underline{\int_a^b} f$.

Ou seja, $m^f(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f$. Por outro lado, $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} \leq S^f(P) \leq M^f(b - a)$. Além disso, pelo Corolário 9.2, temos que $s^f(P) \leq S^f(Q)$, $\forall\ P, Q$ partições de $[a, b]$. Com isso, $\sup\{s^f(P) : P \text{ partição de } [a, b]\} \leq \inf\{S^f(Q) : Q \text{ partição de } [a, b]\}$ (ver exercícios sobre supremo e ínfimo em números reais). Ou seja, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Portanto,

$m^f(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M^f(b - a)$. □

Definição 9.7 (Integral de Riemann)**.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é integrável a Riemann, ou simplesmente integrável, se $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Neste caso, definimos e denotamos a integral de f por: $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

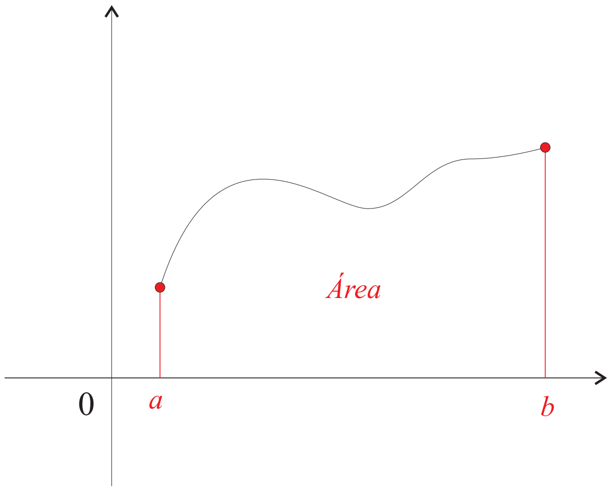

Figura 9.5: Integral

Obs 9.7. Quando houver possibilidade de confusão escreveremos $\int_a^b f(x)$.

Exemplo 9.12 (Característica Não-integrável)**.** Vimos no exemplo 9.10 que a função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a,b]$, f, não é integrável, pois $\underline{\int_a^b} f = 0 \neq b - a = \overline{\int_a^b} f$.

Exemplo 9.13 (Integral da Constante)**.** No exemplo 9.11 mostramos que a função constante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, satisfaz: $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = k(b-a)$. Logo, a função constante é integrável e $\int_a^b f = k(b-a)$.

Vejamos, agora, duas maneiras equivalentes de definir integral utilizando somas inferior e superior. Estes conceitos estão enunciados no

Teorema 9.4 (Caracterização de Integração)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é integrável $\Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existem P e Q partições de $[a,b]$ tais que $S^f(Q) - s^f(P) < \varepsilon \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $R : a = t_0 < ... < t_n = b$ partição de $[a,b]$ tal que $S^f(R) - s^f(R) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i^f(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que f é integrável. A definição 9.7, nos diz que: $\displaystyle\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Ou seja, $\sup\{s^f(P) : P$ partição de [a,b]$\} = \inf\{s^f(Q) : Q$ partição de [a,b]$\}$. Isto nos diz que, dado $\varepsilon > 0$, existem P, Q partições de $[a,b]$ tais que $S^f(Q) - s^f(P) < \varepsilon$, pois, pelo Corolário 9.2, $s^f(P) \leq S^f(Q)$, $\forall\ P, Q$ partições de $[a,b]$ (ver exercícios sobre supremo e ínfimo em números reais). Suponha que existem P, Q partições de $[a,b]$ tais que $S^f(Q) - s^f(P) < \varepsilon$. Vimos, no exemplo 9.3 que $R = P \cup Q$ refina P, Q simultaneamente. Daí, usando o Teorema 9.1, que $S^f(R) - s^f(R) \leq S^f(Q) - s^f(P) < \varepsilon$. Se $R : a = t_0 < ... < t_n = b$, então, pela observação 9.5, $S^f(R) - s^f(R) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i^f(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Agora, suponha que dado $\varepsilon > 0$ existe R partição de $[a,b]$ tal que $S^f(R) - s^f(R) < \varepsilon$. Então, $\sup\{s^f(P) : P$ partição de [a,b]$\} = \inf\{s^f(Q) : Q$ partição de [a,b]$\}$, pois, $s^f(P) \leq S^f(Q)$, $\forall\ P, Q$ partições de $[a,b]$ (ver exercícios sobre supremo e ínfimo em números reais). Ou seja, $\underline{\displaystyle\int_a^b} f = \overline{\displaystyle\int_a^b} f$. Portanto, f é integrável. $\square$

Exemplo 9.14. Dado $\varepsilon > 0$, seja $R : 1 = t_0 < ... < t_n = 2$ partição de $[1,2]$ tal que $2 - t_{n-1} < \varepsilon$. Vimos no exemplo 9.9 que a função, $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1,2)$ e $f(2) = 2$ satisfaz: $s^f(P) = 1$ e $S^f(P) = 3 - t_{n-1}$, $\forall\ P$ partição de $[1,2]$. Portanto, $S^f(R) - s^f(R) = 3 - t_{n-1} - 1 = 2 - t_{n-1} < \varepsilon$. Utilizando o Teorema 9.4, f é integrável. Por outro lado, $\displaystyle\int_1^2 f = \underline{\int_1^2} f = \sup\{s^f(P) : P$ é partição de $[1,2]\} = \sup\{1 : P$ é partição de $[1,2]\} = 1$. Ou seja, $\displaystyle\int_1^2 f = 1$.

Exercícios de Fixação

1. Considere o intervalo $[0,4]$. Seja $f(x) = x^2$, $\forall\ x \in [0,4]$. Encontre as somas inferior e superior de f para as partições $P = \{0,1,2,4\}$ e $Q = \{0,2,3,4\}$. Podemos dizer que Q refina P?

2. Seja $f(x) = 2$, $\forall\ x \in [0,1)$ e $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1,2]$. Mostre que f é integrável e calcule sua integral.

3. Seja $g(x) = 2$, $\forall\ x \in [0,1)$ e $g(x) = 3$, $\forall\ x \in [1,2]$. Mostre que g é integrável e calcule sua integral.

4. Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = 0$ exceto para os valores $c_1, c_2, ..., c_n \in [a,b]$. Mostre que f é integrável e que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

5. Sejam $c \leq d$ pontos em $[a,b]$. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$, se $x \in [c,d]$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Mostre que f é integrável e que $\displaystyle\int_a^b f = k(b-a)$.

9.3 Propriedades da Integral de Riemann em $\mathbb{R}$

No Lema a seguir provaremos uma outra maneira de encontrar a oscilação de uma função, definida em um intervalo, em um subintervalo de uma partição qualquer do seu domínio.

Lema 9.1 (Caracterização da Oscilação). *Considere o intervalo* $[t_{i-1}, t_i]$. *Então* $w_i^f = M_i^f - m_i^f = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

Demonstração. Vamos provar que $M_i^f - m_i^f = \sup X_i$, onde $X_i = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$. De fato, sejam $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Considere, sem perda de generalidade, que $f(x) \leq f(y)$. Observe que $|f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) \leq M_i^f - m_i^f$. Ou seja, $M_i^f - m_i^f$ é cota superior para X_i. Agora, dado $\varepsilon > 0$, tem-se que existem $c, d \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $M_i^f - \varepsilon/2 < f(c)$ e $m_i^f + \varepsilon/2 > f(d)$ (ver definições 1.11 e 1.12). Portanto, $|f(c) - f(d)| \geq f(c) - f(d) > M_i^f - \varepsilon/2 - (m_i^f + \varepsilon/2) = M_i^f - m_i^f - \varepsilon$. Ou seja, $|f(c) - f(d)| > M_i^f - m_i^f - \varepsilon$, onde $c, d \in [t_{i-1}, t_i]$. Dessa forma, usando a definição 1.11, concluímos que $M_i^f - m_i^f = \sup X_i$. $\square$

Teorema 9.5 (Propriedades da Integral). *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integráveis. Então valem as seguintes afirmações:*

i) $f + g, fg$ *são integráveis e* $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *e* $\displaystyle\int_a^b kf = k\int_a^b f$, *ou em palavras, a integral da soma é a soma das integrais e a constante pode ser retirada da integral;*

ii) *Se* $0 < c \leq |g(x)|$, $\forall\ x \in [a, b]$, *onde* c *é uma constante, então* $f/g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável;*

iii) $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

iv) $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$, *definida por* $|f|(x) = |f(x)|$, $\forall\ x \in [a, b]$, *é integrável e* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$, *ou em palavras, o módulo da integral é menor ou igual a integral do módulo.*

Demonstração. Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$.
i) Vimos que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ (ver exercícios de supremo e ínfimo em números reias). Assim sendo $M_i^{f+g} \leq M_i^f + M_i^g$. Com isso, $S^{f+g}(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^n M_i^{f+g}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i^f + M_i^g)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i^f(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n M_i^g(t_i - t_{i-1}) = S^f(P) + S^g(P)$. Ou seja, $S^{f+g}(P) \leq$

$S^f(P)+S^g(P)$. Observe que, $\overline{\int_a^b}(f+g) = \inf\{S^{f+g}(R) : R$ é partição de $[a,b]\} \leq S^{f+g}(P) \leq S^f(P) + S^g(P)$, $\forall$ P partição de $[a,b]$. Dessa forma, se Q é uma partição de $[a,b]$, tem-se que: $P \cup Q$ refina P, Q simultaneamente, pelo exemplo 9.3. Portanto, pelo Teorema 9.1, $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq S^f(P\cup Q) + S^g(P \cup Q) \leq S^f(P) + S^g(Q)$. Deste modo, pelo exemplo 1.9, concluímos que $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \inf\{S^f(P)+S^g(Q) : P, Q$ são partições de $[a,b]\} = \inf\{S^f(P) : P$ é partição de $[a,b]\} + \inf\{S^g(Q) : Q$ é partição de $[a,b]\} = \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \int_a^b f + \int_a^b g$, pois f, g são integráveis. Ou seja, $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$. Analogamente, prova-se que $\int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g)$. Assim, $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g)$. Ou seja, $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b}(f+g)$. Por outro lado, pelo Corolário 9.3, $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g)$. Logo, $\overline{\int_a^b}(f+g) = \underline{\int_a^b}(f+g)$. Ou seja, $f+g$ é integrável e $\int_a^b (f+g) = \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) = \int_a^b (f+g)$. Isto é, $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. Agora vamos provar que fg é integrável. Como f, g são integráveis, então f, g são limitadas. Assim, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)|, |g(x)| \leq d$, $\forall$ $x \in [a,b]$. Sejam $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Logo, pelo Lema 9.1, concluímos que: $|fg(x) - fg(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| = |f(x)[g(x) - g(y)] + [f(x) - f(y)]g(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \leq dw_i^g + w_i^f d = d(w_i^f + w_i^g)$. Novamente, pelo Lema 9.1, temos que $w_i^{fg} \leq d(w_i^f + w_i^g)$. Como f, g são integráveis, então dado $\varepsilon > 0$, existe, pelo Teorema 9.4, P partição de $[a,b]$ tal que $\sum_{i=1}^n w_i^f(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2d$ e $\sum_{i=1}^n w_i^g(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2d$. Dessa forma, $\sum_{i=1}^n w_i^{fg}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n d(w_i^f + w_i^g)(t_i - t_{i-1}) \leq d\left[\sum_{i=1}^n w_i^f(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n w_i^g(t_i - t_{i-1})\right] < d[\varepsilon/2d + \varepsilon/2d] = \varepsilon$. Pelo Teorema 9.4, tem-se que fg é integrável. Em particular, se $g(x) = k$, $\forall$ $x \in [a,b]$, obtemos que kf é integrável (ver exemplo 9.13). Observe que, se $k \geq 0$, obtemos: $\int_a^b kf = \overline{\int_a^b} kf = \inf\{S^{kf}(P) : P$ é partição de $[a,b]\} = \inf\{kS^f(P) : P$ é partição de $[a,b]\} = k\inf\{S^f(P) : P$ é partição de $[a,b]\} = k\overline{\int_a^b} f = k\int_a^b f$ (ver exercícios de supremo e ínfimo em números reias), já que f é integrável. Analogamente, se $k < 0$, encontramos: $\displaystyle\int_a^b kf = \overline{\int_a^b} kf = \inf\{S^{kf}(P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = \inf\{ks^f(P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = k\sup\{s^f(P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = k\underline{\int_a^b} f = k\int_a^b f$ (ver exercícios de supremo e ínfimo em números reias), pois f é integrável . Ou seja, $\displaystyle\int_a^b kf = k\int_a^b f$.

ii) Suponha que $0 < c \leq |g|$. Vamos provar que $1/g$ é integrável. Sejam $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, assim, $|1/g(x) - 1/g(y)| = \left|\dfrac{g(y) - g(x)}{g(x)g(y)}\right| \leq \dfrac{w_i^g}{c^2}$. Utilizando o Lema 9.1, obtemos: $w_i^{1/g} \leq w_i^g/c^2$. Como foi feito anteriormente, $1/g$ é integrável, pelo Teorema 9.4. Assim, pelo item **i**), $f/g = f \cdot 1/g$ é integrável.

iii) Se $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$, então $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [t_{i-1}, t_i]$. Logo, $m_i^f \leq m_i^g$ (ver exercícios de supremo e ínfimo em números reias). Assim sendo, $s^f(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^n m_i^f(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n m_i^g(t_i - t_{i-1}) = s^g(P)$. Logo, $\displaystyle\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \sup\{s^f(P) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\} \leq \sup\{s^g(P) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\} = \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g$, pois f e g são integráveis. Ou seja, $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

iv) Sejam $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Portanto, usando o Lema 9.1, concluímos: $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq w_i^f$. E usando o mesmo resultado, obtemos: $w_i^{|f|} \leq w_i^f$. Como foi feito antriormente, pelo Teorema 9.4, $|f|$ é integrável. Por outro lado, $-f(x) \leq |f(x)| \leq f(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$. Logo, usando os itens **i**) e **iii**), chegamos a: $\displaystyle -\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Isto é, $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. □

Exemplo 9.15. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, com $\displaystyle\int_a^b g = 0$ e $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$ então $\displaystyle\int_a^b fg = 0$. Com efeito, sabemos que existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq f(x) \leq d$, $\forall\ x \in [a,b]$ (f é limitada). Multiplicando por g concluímos que: $cg(x) \leq f(x)g(x) \leq dg(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$. Integrando o resultado chegamos a: $\displaystyle 0 = c\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq d\int_a^b g = 0$ (ver Teorema 9.5). Ou seja, $\displaystyle\int_a^b fg = 0$.

Lema 9.2. *Seja Q uma partição. As seguintes igualdades são verdadeiras:* $\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} = \underline{\int_a^b} f$ *e* $\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} = \overline{\int_a^b} f$.

Demonstração. Queremos provar que $\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} = \sup\{s^f(R) : R\}$ e $\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} = \inf\{S^f(R) : R\}$. Primeiramente, veja que $s^f(P) \leq s^f(Q)$ e $S^f(Q) \leq S^f(P)$ (ver Teorema 9.1). Mas, $\{s^f(P) : Q \subseteq P\} \subseteq \{s^f(R) : R\}$ e $\{S^f(P) : Q \subseteq P\} \subseteq \{S^f(R) : R\}$, onde tais conjuntos são limitados (ver observação 9.4). Além disso, dados $s^f(R)$ e $S^f(R)$, existe a partição $P = R \cup Q$, que refina R e Q, tal que $s^f(R) \leq s^f(P)$ e $S^f(P) \leq S^f(R)$ (ver Teorema 9.1). Veja que $s^f(P) \in \{s^f(P) : Q \subseteq P\}$ e $S^f(P) \in \{S^f(P) : Q \subseteq P\}$, pois $Q \subseteq R \cup Q = P$. Com isso, $\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} = \sup\{s^f(R) : R\}$ e $\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} = \inf\{S^f(R) : R\}$ (ver exercícios de supremo e ínfimo em números reias). Ou seja, $\sup\{s^f(P) : Q \subseteq P\} = \underline{\int_a^b} f$ e $\inf\{S^f(P) : Q \subseteq P\} = \overline{\int_a^b} f$. □

Teorema 9.6. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável $\Leftrightarrow$ $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis, onde $c \in (a, b)$. Neste caso,* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Demonstração. Denote $g = f|_{[a,c]}$ e $h = f|_{[c,b]}$. Sejam $\Sigma = \{S^g(P); P \text{ partição de [a,c]}\}$ e $\Pi = \{S^h(Q); Q \text{ partição de [c,b]}\}$. Vimos que $\Sigma + \Pi = \{S^g(P) + S^h(Q); P, Q \text{ partições de [a,c] e [c,b], respectivamente}\}$. Sejam $P : a = t_0 < ... < t_n = c$ e $Q : c = t_n < ... < t_m = b$ partições de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. Assim, $S^g(P) + S^h(Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i^g(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=n}^{m} M_i^h(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} M_i^f(t_i - t_{i-1})$, onde a partição $R : a = t_0 < ... < t_n = c < ... < t_m = b$ é uma partição de $[a, b]$ que contém c. Usando o Lema 9.2, temos que $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S^f(P) : \{a, c, b\} \subseteq P\} = \inf\{\Sigma + \Pi\} = \inf\{\Sigma\} + \inf\{\Pi\} = \overline{\int_a^c} g + \overline{\int_c^b} h$ (ver exemplo 1.9) Analogamente, prova-se $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} g + \underline{\int_c^b} h$. Logo, subtraindo estes resultados, concluímos que: $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \left(\overline{\int_a^c} g - \underline{\int_a^c} g\right) + \left(\overline{\int_c^b} h - \underline{\int_c^b} h\right)$. Pelo Corolário 9.3, as parcelas da soma acima são ≥ 0. Logo, $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0 \Leftrightarrow \overline{\int_a^c} g - \underline{\int_a^c} g = \overline{\int_c^b} h - \underline{\int_c^b} h = 0$. Ou seja, f é integrável $\Leftrightarrow$ g e h também são. Neste caso, $\displaystyle\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} g + \overline{\int_c^b} h = \int_a^c g + \int_c^b h.$ $\square$

Obs 9.8. No texto convencionaremos $\displaystyle\int_a^a f = 0, \int_a^b f = -\int_b^a f.$

Obs 9.9. Por indução podemos generalizar o Teorema 9.6. Sejam $c_1, c_2, ..., c_n \in (a, b)$, então f é integrável $\Leftrightarrow$ $f|_{[a,c_1]}$, $f|_{[c_1,c_2]}$,..., $f|_{[c_n,b]}$ são integráveis. Neste caso, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + ... + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^b f.$

Exemplo 9.16 (Integral da Função Escada)**.** Seja $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \in [0, 1)$, $f(x) = 2$, se $x \in [1, 2)$ e $f(x) = 3$, se $x \in [2, 3]$. Portanto, pelo Teorema 9.6, f é integrável e $\displaystyle\int_0^3 f = \int_0^1 1 + \int_1^2 2 + \int_2^3 3 = 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-2) = 6.$

Exercícios de Fixação

1. Considere a função $f(x) = x + 1$, para $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Mostre que f não é integrável.

2. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(1/n) = n$, se $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Mostre que f não é integrável.

9.4 Teoremas Importantes sobre Integrabilidade

Teorema 9.7 (Integrabilidade de Funções Contínuas)**.** *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Como $[a, b]$ é compacto, utilizando o Teorema 6.14, concluímos que f é uniformemente contínua. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x, y \in [a, b]$, com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Vamos provar que f é integrável. Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$. Como f é contínua em $[a, b]$, então f é contínua em $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall\ i = 1, 2, .., n$ (ver Teorema 6.1). Dessa forma, f é uniformemente contínua em $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$, pelo Teorema 6.14 ($[t_{i-1}, t_i]$ é compacto). Assim sendo, usando o Teorema 6.11, concluímos que existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $f(x_i) \leq f(x) \leq f(y_i)$, $\forall\ x \in [t_{i-1}, t_i]$. Observe que $|x_i - y_i| \leq |t_i - t_{i-1}| < \delta$. Logo, $f(y_i) - f(x_i) = |f(x_i) - f(y_i)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Portanto, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(y_i) - f(x_i)](t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} b - a = \varepsilon$. Ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. O Teorema 9.4 nos garante que f é integrável. □

Exemplo 9.17 (Intgrabilidade do Seno, Cosseno, Polinômio)**.** Vimos nos exemplos 6.8 e 6.9 que as funções seno, cosseno e polinomial são exemplos de funções contínuas em $[a, b]$. Logo, estas funções são integráveis pelo Teorema 9.7.

Exemplo 9.18. Vimos no exemplo 9.14 que a função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, $\forall\ x \in [1, 2)$ e $f(2) = 2$ é integrável. Analogamente ao que foi feito no exemplo 6.1, encontramos que f é descontínua em 2. Assim, a recíproca do Teorema 9.7 é falsa.

Teorema 9.8 (Integrabilidade de Funções Monótonas)**.** *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona é integrável.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não-crescente e não-constante. Se f fosse constante o problema estaria resolvido pelo exemplo 9.13. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \dfrac{\varepsilon}{f(a) - f(b)}$. Observe que $f(b) < f(a)$ e $f(t_i) \leq f(t_{i-1})$, pois f é não-crescente. Portanto, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) -$

$f(t_i)](t_i - t_{i-1}) < \dfrac{\varepsilon}{f(a)-f(b)} \sum_{i=1}^{n} (f(t_{i-1}) - f(t_i)) = \dfrac{\varepsilon}{f(a)-f(b)} f(a) - f(b) = \varepsilon$. Ou seja, $\sum_{i=1}^{n} w_i^f (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. O Teorema 9.4 nos garante que f é integrável. Analogamente, prova-se o caso f não-decrescente. $\square$

Exemplo 9.19. A recíproca do Teorema 9.8 não é verdadeira, pois a função seno é integrável mas não é monótona em $[0, 2\pi]$.

Exemplo 9.20. A função característica de $\mathbb{Q}$ em $[a, b]$ não é uma função monótona, pois não é integrável. (ver exemplo 9.12).

Definição 9.8 (Integral Indefinida)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, onde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Se existe $y \in [a, b]$ tal que $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por: $g(x) = g(y) + \displaystyle\int_y^x f$, $\forall x \in [a, b]$, então dizemos que g é a integral indefinida de f.

Exemplo 9.21. Considere a função constante $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$. Defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = kx$. Com isso, $g(0) + \displaystyle\int_0^x f = 0 + \int_0^x k = kx = g(x)$, $\forall\ x \in [0, 1]$ (ver exemplo 9.13). Portanto, g é a integral indefinida de f.

Definição 9.9 (Primitiva)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, onde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $g'(x) = f(x)$, dizemos que g é a primitiva de f.

Obs 9.10. Observe que a primitiva, quando existe, não é única. De fato, se g é uma primitiva de f, então $g + k$ também é, onde k é uma constante. Já que $(g(x) + k)' = g'(x) + 0 = f(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$ (ver exemplo 9.13).

Exemplo 9.22. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Assim sendo, $g'(x) = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$. Com isso, g é primitiva de f.

Exemplo 9.23. A função seno é a primitiva da função cosseno em $[a, b]$, pois $\operatorname{sen}' x = \cos x$, $\forall\ x \in [a, b]$ (ver exemplo 7.4). A função constante é a primitiva da função identicamente nula, pois a derivada da constante é 0 (ver exemplo 7.1).

Exemplo 9.24. Vimos no exemplo 7.30 que a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$, se $-1 \leq x < 0$ e $f(x) = 1$, se $0 \leq x \leq 1$ não possui primitiva.

Teorema 9.9 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo. Sejam* $f, g : I \to \mathbb{R}$*, onde* f *é contínua em* I*. Então existe* $y \in I$ *tal que* $g(x) = g(y) + \int_y^x f \Leftrightarrow g'(x) = f(x), \forall\, x \in I$*.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $z, z+h \in I$. Assim, pelo Teorema 9.6, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z) &= \frac{g(y) + \int_y^{z+h} f - \left(g(y) + \int_y^z f\right)}{h} - \frac{\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \frac{\int_y^{z+h} f - \int_y^z f}{h} - \frac{\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \frac{\int_z^{z+h} f}{h} - \frac{\int_z^{z+h} f(z)}{h} \\
&= \int_z^{z+h} \frac{[f - f(z)]}{h}.
\end{aligned}$$

A integral de f existe, pois f é contínua (ver Teorema 9.7). Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in I$, com $|x - z| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$. Dessa forma, usando o Teorema 9.5, com $0 < |h| < \delta$ e $z + h \in I$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_z^{z+h} \frac{[f - f(z)]}{h}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{h}\right| \int_z^{z+h} |f - f(z)| \\
&\leq \left|\frac{1}{h}\right| \int_z^{z+h} \varepsilon \\
&\leq \left|\frac{1}{h}\right| |h|\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim sendo, $\lim\limits_{h\to 0} \left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - f(z)\right| = 0$. Isto é, $g'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = f(z)$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $g'(x) = f(x), \forall\, x \in I$. Defina $\lambda : I \to \mathbb{R}$ por $\lambda(x) = \int_y^x f$. Pelo que foi feito na demonstração, $\lambda'(x) = f(x), \forall\, x \in I$. Dessa forma, $\lambda'(x) = g'(x)$. Ou seja, $\lambda'(x) - g'(x) = 0$. Isto é, $(\lambda - g)'(x) = 0$. Pelo Corolário 7.13, concluímos que

$\lambda(x) - g(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é constante. Como $k = \lambda(y) - g(y) = \int_y^y f - g(y) = -g(y)$ (ver observações do Teorema 9.6). Portanto, $g(x) = \lambda(x) - k = g(y) + \int_y^x f$, $\forall\, x \in I$. $\square$

Obs 9.11. Com as hipóteses estabelecidas no Teorema 9.9 temos que $g(b) = g(a) + \int_a^b f$. Ou seja, $g(b) - g(a) = \int_a^b f$. Neste caso, para calcular a integral de uma função integrável basta encontrar sua primitiva, caso isto seja possível.

Exemplo 9.25 (Integral do Seno e do Cosseno)**.** Usando o Teorema 9.9, podemos concluir que $\int_0^\pi \text{sen} = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = 1+1 = 2$. E que, $\int_0^\pi \cos = \text{sen}(\pi) - \text{sen}(0) = 0 - 0 = 0$.

Exemplo 9.26 (Integral do Polinômio)**.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Dessa forma, pelo Teorema 9.9, obtemos: $\int_0^1 f = \dfrac{1^{n+1}}{n+1} - \dfrac{0^{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Teorema 9.10 (Mudança de Variável)**.** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $h : [c,d] \to \mathbb{R} \in C^1$, com $h([c,d]) \subseteq [a,b]$. Então,*

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f = \int_c^d (f \circ h)h'.$$

Demonstração. Usando o Teorema 9.9, concluímos que $\int_{h(c)}^{h(d)} f = g(h(d)) - g(h(c))$ (f é contínua), onde g é a primitava de f em $[a,b]$, i.e, $g'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Com o Teorema 7.3, concluímos que $(g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Portanto, $g \circ h$ é a primitiva de $(f \circ h) \circ h' : [c,d] \to \mathbb{R}$, a qual é contínua, pois f é contínua e $h \in C^1$. Novamente, usando o Teorema 9.9, chegamos ao seguinte resultado: $\int_c^d (f \circ h)h' = g \circ h(d) - g \circ h(c) = g(h(d)) - g(h(c)) = \int_{h(c)}^{h(d)} f$. Por fim, $\int_c^d (f \circ h)h' = \int_{h(c)}^{h(d)} f$. $\square$

Exemplo 9.27. Seja $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$ e $h : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x$. Usando o Teorema 9.10, concluímos que:

$$2\int_0^{\pi/4} \cos(2x) = \int_0^{\pi/4} \cos(2x)2 = \int_0^{\pi/4} (f \circ h)h' = \int_{h(0)}^{h(\pi/4)} f = \int_0^{\pi/2} \cos = \text{sen}(\pi/2) - \text{sen}(0) = 1.$$

Ou seja, $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) = 1/2$.

Teorema 9.11 (Integração por Partes)**.** *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^1$. Então:*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Demonstração. Primeiramente, usando o Teorema 7.2, concluímos que: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$. Com isso, fg é a primitiva de $f'g + fg'$. Portanto, utilizando os Teoremas 7.2 e 9.9, chegamos a: $\displaystyle\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b [f'g + fg'] = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. Consequentemente, $\displaystyle\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'$. □

Exemplo 9.28. Sejam $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x$. Logo, pelo Teorema 9.11, obtemos $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)x = \operatorname{sen}(\pi)\pi - \operatorname{sen}(0)0 - \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)(x)' = -\int_0^\pi \operatorname{sen} = \cos(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2$.

Teorema 9.12 (Teorema do Valor Médio para Integrais)**.** *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções, com f contínua, g integrável e $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. Assim, existe $y \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(y)\int_a^b g.$$

Demonstração. Como f é contínua no compacto $[a,b]$, então, utilizando o Teorema 6.11, existem $c, d \in [a,b]$ tais que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, $\forall\ x \in [a,b]$. Como $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$, então $f(c)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(d)g(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$. Pelo Teorema 9.5, $\displaystyle f(c)\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq f(d)\int_a^b g$. Observe que a função $\displaystyle\left(\int_a^b g\right) f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua (ver Teorema 6.6). Agora, usando o Teorema 6.8, concluímos que existe $y \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(y)\int_a^b g.$$

□

Corolário 9.13. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então existe $y \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = f(y)(b-a)$.*

Demonstração. Defina a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 1$. Lembre que g é integrável e $\displaystyle\int_a^b g = b - a$ (ver exemplo 9.13). Além disso, $g(x) = 1 \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. Dessa forma, pelo

Teorema 9.12, existe $y \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b fg = f(y)\int_a^b g = f(y)(b-a)$. □

Exemplo 9.29. Como a função cosseno é contínua e a função seno é não-negativa e integrável em $[0,\pi]$, então, usando o Teorema 9.12, concluímos que existe $y \in [0,\pi]$ tal que $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}\cos = \cos(y)\int_0^\pi \operatorname{sen} = \cos y[-\cos(\pi)+\cos(0)] = \cos y(1+1) = 2\cos y$. Ou seja, $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}\cos = 2\cos y$.

Teorema 9.14 (Fórmula de Taylor com Resto Integral)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável com $f^{(n)}$ contínua em $[y, y+h]$, onde $y, y+h \in I$. Então:*

$$f(y+h) = f(y) + f'(y)h + ... + \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}h^{n-1} + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(y+th)\right]h^n.$$

Demonstração. Precisaremos da função auxiliar $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $g(t) = f(y+th)$. Veja que, usando o Teorema 7.3, encontramos $g'(t) = f'(y+th)h$, $g''(t) = f''(y+th)h^2, ..., g^{(n)}(t) = f^{(n)}(y+th)h^n$. Portanto, $g'(0) = f'(y)h$, $g''(0) = f''(y)h^2, ..., g^{(n)}(0) = f^{(n)}(y)h^n$. Com isso, a fórmula dada no Teorema 9.14 é equivalente a:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t).$$

Vamos provar esta fórmula por indução sobre n. Se $n = 1$, temos que provar que:

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'.$$

Porém, este fato segue diretamente do Teorema 9.9. Suponha, agora que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t).$$

Vamos provar que:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t).$$

Usando o Teorema 9.11, concluímos que: $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t) = \frac{(1-1)^n}{n!}g^n(1) - \frac{(1-0)^n}{n!}g^{(n)}(0) - \int_0^1 -\frac{n(1-t)^{n-1}}{n!}g^{(n)}(t) = -\frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t) = -\frac{g^{(n)}(0)}{n!} + g(1) - g(0) - g'(0) -$

$... - \dfrac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$. Portanto, $g(1) = g(0) + g'(0) + ... + \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)$. □

Exemplo 9.30. Veremos que $\mathrm{e}^{(n)} = \mathrm{e}$ (ver Teorema 10.2). Assim,

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^9}{9!} \mathrm{e}^t.$$

Ou seja,

$$\int_0^1 (1-t)^9 \mathrm{e}^t = 9!\mathrm{e} - (2)9! - \frac{9!}{2!} - \frac{9!}{3!} - ... - \frac{9!}{8!}.$$

Exercícios de Fixação

1. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

2. Mostre que $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$, se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ é integrável.

3. Encontre a derivada da função $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1 + t^3)^{-1}$.

4. Use o Teorema 9.10 para calcular as integrais $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1 - t^2}$ e $\displaystyle\int_1^4 \cos\sqrt{t}/\sqrt{t}$.

9.5 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é relavante concluir que em muitos casos não é possível, manualmente, calcular uma integral. Porém, alguns resultados como, por exemplo, os que nos dão condições suficientes para integrabilidade, nos garantem a existência de certas integrais, mesmo que não informe o valor desta. Assim sendo, nestes casos, a existência da integral está obtida. Em Matemática este fato é, muitas vezes, a informação mais importante que podemos inferir. Portanto, avaliar a existência da integral não deve ser menosprezada. Mesmo porque não faz sentido calcular a integral de uma função não-integrável.

9.6 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno, o conceito de integração de funções reais limitadas. Mostramos resultados de grande utilidade não só na Matemática, como também em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, estudamos os Teoremas Fundamental do Cálculo e da Mudança de Variável. Além disso, verificamos de que maneira estes podem ser aplicados e encontramos condições suficientes para que uma determinada função seja integrável.

9.7 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Defina $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, pondo $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que f é integrável e calcule $\displaystyle\int_0^1 f$.

2. Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é uma função ímpar, prove que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$. Se porém, f é par, prove que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

3. Prove que se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis então são também integráveis as funções $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Conclua que as funções $f_+, f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$; $f_-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$ e $f_-(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$ são integráveis.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Prove que para quaisquer $x, c \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \displaystyle\int_c^x f'$. conclua que o Teorema 9.14 vale com integrável no lugar de contínua.

5. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada integrável, seja $m = (a+b)/2$. Prove que $f(a) + f(b) = [2/(b-a)] \displaystyle\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]$.

9.8 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Se f é contínua em $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Demonstração. Como $f(c) > 0$, então, pela demonstração do Teorema 6.4, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in (c-\delta, c+\delta)$, tem-se $f(x) > f(c)/2 > 0$. Consequentemente, $\forall\, x \in [c-\delta/2, c+\delta/2]$, tem-se $f(x) > f(c)/2 > 0$. Com isso, pelos Teoremas 9.6 e 9.5, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^{c-\delta/2} f + \int_{c-\delta/2}^{c+\delta/2} f + \int_{c+\delta/2}^{b} f \geq \int_a^{c-\delta/2} f + \int_{c-\delta/2}^{c+\delta/2} f(c)/2 + \int_{c+\delta/2}^{b} f = \int_a^{c-\delta/2} f + [c+\delta/2-(c-\delta/2)]f(c)/2 + \int_{c+\delta/2}^{b} f = \int_a^{c-\delta/2} f + \delta f(c)/2 + \int_{c+\delta/2}^{b} f > \int_a^{c-\delta/2} f + \int_{c+\delta/2}^{b} f \geq 0$, pois $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. □

Ex2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$, é Lipschitziana. Conclua que F é uniformemente contínua.

Demonstração. Como f é integrável, então existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall\, x \in [a,b]$. Utilizando os Teoremas 9.6 e 9.5, obtemos: $|F(x)-F(y)| = \left|\displaystyle\int_a^x f - \int_a^y f\right| = \left|\int_a^x f - \int_a^y f\right| = \left|\int_a^x f + \int_y^a f\right| = \left|\int_y^x f\right| \leq \int_y^x |f| \leq \int_y^x M = M|x-y|$, $\forall\, x,y \in [a,b]$. Portanto, F é uma função Lipschitziana. Pela Proposição 6.2, F é uniformemente contínua. □

Ex3. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$, $\forall\, x \in I$. Prove que $\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Demonstração. Seja $c \in (a,b)$. Defina as funções $F(x) = \displaystyle\int_c^x f$ e $G(y) = \displaystyle\int_y^c f$, $\forall\, x,y \in [a,b]$. Vimos no Teorema 9.9 que $F'(x) = f(x)$ e $G'(y) = -f(y)$, $\forall\, x,y \in [a,b]$ (note que $G(y) = -\displaystyle\int_c^y f$). Veja que $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f = \int_c^{\beta(x)} f + \int_{\alpha(x)}^{c} f = F(\beta(x)) + G(\alpha(x))$, $\forall\, x \in [a,b]$. Com isso, pelo Teorema 7.3, obtemos: $\varphi'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) + G'(\alpha(x))\alpha'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. □

Auto-Avaliação

Sou capaz de aplicar de identificar funções integráveis em $\mathbb{R}$ e aplicar corretamente os Teoremas Fundamental do Cálculo, Mudança de Variáveis e Integração por Partes?

Proxima Aula

Caro aluno, na próxima aula, estudaremos, através de integral de Riemann, as propriedades já conhecidas do ensino básico para o logaritmo neperiano. Além disso, aproveitamos os conceitos que aprendemos para definir integração imprópria.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[4] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

[5] Melo, W. *Existência de Solções Clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes*, Recife, 2007. 115p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo