Capítulo 10

Logaritmo Neperiano e Integração Imprópria

Aula 10: Logaritmo Neperiano e Integração Imprópria

Meta

Apresentar ao aluno, as principais propriedades da função logaritmo neperiano utilizando uma definição alternativa e de grande intuição geométrica. Além disso, mostramos uma nova teoria de integrais, as chamadas integrais impróprias.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de utilizar corretamente as propriedades das funções logaritmo e exponencial, como também saber aplicar o Teste da Integral.

Pré-requisitos

Aula 9, Fundamentos da Matemática e Cálculo II.

10.1 Introdução

Oi, nesta aula, apresentamos uma definição da função logaritmo que envolve o conceito de Integral de Riemann, visto na aula 9. Com esta, é possível provarmos as principais propriedades conhecidas do ensino básico para tal função, como, por exemplo, o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos. Em particular, verificamos a bijetividade desta função, ou seja, mostramos a existência da função inversa para a função logarítmica, a qual chamamos função exponencial. A partir daí, questionamos se é possível estabelecer os resultados, vistos no cáculo elementar, para esta função. A resposta é afirmativa e está descrita nesta aula. Por fim, apresentamos como integrar impropriamente funções que posuem singularidades no intervalo contruído pelos limites de integração. Com este novo conceito, acrescentamos um novo teste para séries numéricas. Este é chamado Teste da Integral. Para o aluno mais interessado, mostramos uma outra maneira de definir Integral de Riemann, através do conceito de conjunto de medida nula.

10.2 Logaritmo Neperiano e Função Exponencial

Definição 10.1 (Logaritmo)**.** Defina a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{y}.$$

Esta função é denominada função logarítmica. O número real $\ln x$ é chamado logaritmo neperiano de x ou logaritmo de x na base e.

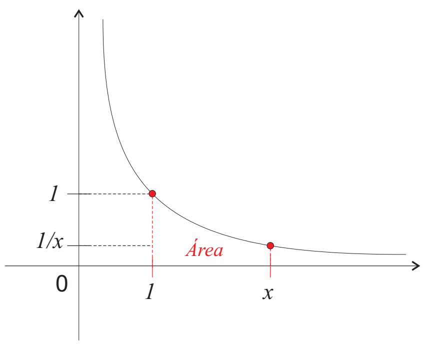

Figura 10.1: Logaritmo Neperiano

Teorema 10.1 (Propriedades de ln)**.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ *para* $x > 1$ *e* $\ln x < 0$ *para* $x \in (0,1)$*;*

ii) $\ln$ *é uma função crescente;*

iii) $\ln' x = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in (0,\infty)$*;*

iv) $\ln(xz) = \ln x + \ln z$, $\ln x^q = q \ln x$, $\ln(x/z) = \ln x - \ln z$, *para* $q \in \mathbb{Q}$ *e* $x, z \in (0,\infty)$*;*

v) $\ln$ *é sobrejetiva.*

Demonstração. **i)** Note que $\ln 1 = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{y} = 0$ (ver observações do Teorema 9.6). Seja $x \in (0,1)$, então $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{y} = -\int_x^1 \frac{1}{y} < 0$, pois $0 < x < y < 1$ (ver observações do Teorema 9.6 e Teorema 9.5). Além disso, se $x > 1$, temos que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{y} > 0$, porque $0 < 1 < y$ (ver Teorema 9.5).
ii) Vamos provar que ln é crescente. Seja $0 < x < z$, então, pelo Teorema 9.6, concluímos que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{y} < \int_1^x \frac{1}{y} + \int_x^z \frac{1}{y} = \int_1^z \frac{1}{y} = \ln z$, já que $\displaystyle\int_x^z \frac{1}{y} > 0$. Ou seja, ln é crescente (ver definição 5.6).
iii) Como a função $y \mapsto 1/y$ é contínua para $y \in (0,\infty)$, e com o Teorema 9.9, obtemos: $\ln' x = \left(\displaystyle\int_1^x \frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{x}$.
iv) Usando os Teoremas 9.6 e 9.10, temos que: $\ln xz = \displaystyle\int_1^{xz} \frac{1}{y} = \int_1^x \frac{1}{y} + \int_x^{xz} \frac{1}{y} = \int_1^x \frac{1}{y} + \int_1^z \frac{1}{u} = \ln x + \ln z$. Isto é, $\ln xz = \ln x + \ln z$, $\forall\, x, z \in (0,\infty)$. Além disso, usando o item anterior juntamente com indução matemática concluímos que $\ln x^n = n \ln x$, $\forall\, x \in (0,\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $0 = \ln 1 = \ln x^n x^{-n} = \ln x^n + \ln x^{-n} = n \ln x + \ln x^{-n}$. Ou seja, $\ln x^{-n} = -n \ln x, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $x \in (0,\infty)$. Dessa forma, $\ln x^p = p \ln x, \forall\, p \in \mathbb{Z}$ e $x \in (0,\infty)$. Seja $q = p/r \in \mathbb{Q}$. Com isso, $p \ln x = \ln x^p = \ln x^{(p/r)r} = r \ln x^{p/r} = r \ln x^q$. Consequentemente, $\ln x^q = p/r \ln x = q \ln x$, $\forall\, x \in (0,\infty)$. Portanto, $\ln(x/z) = \ln(xz^{-1}) = \ln x + \ln z^{-1} = \ln x - \ln z$. Isto é, $\ln(x/z) = \ln x - \ln z$, $\forall\, x, z \in (0,\infty)$.
v) Como ln é derivável, então ln é contínua (ver Teorema 7.1). Dessa forma, usando o Teorema 6.9, temos que $\ln(0,\infty)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. Afirmamos que este intervalo é $\mathbb{R}$. Com efeito, $\ln 2^n = n \ln 2$ e $\ln 2^{-n} = -n \ln 2$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como $\ln 2 > 0$, então $\lim \ln 2^n = \lim n \ln 2 = \infty$ e $\lim \ln 2^{-n} = \lim -n \ln 2 = -\infty$. Com isso, dado $A > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que $\ln 2^N > A$ (pois $\lim \ln 2^n = \infty$). Mas, $\ln 1 = 0$. Como $\ln(0,\infty)$ é um intervalo, então existe $a \in (0,\infty)$ tal que $\ln a = A$. Ou seja, $A \in \ln(0,\infty)$. Analogamente, se $B < 0$, então $B \in \ln(0,\infty)$ (use $\lim \ln 2^{-n} = -\infty$). Consequentemente, $\ln(0,\infty) = (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$. Ou seja, ln é sobrejetiva. $\square$

Obs 10.1. Como $\lim \ln 2^n = \infty$ e ln é crescente, então $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Como $\lim \ln 2^{-n} = -\infty$ e ln é crescente, então $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Obs 10.2. No Teorema 10.1, vimos que ln é crescente e sobrejetiva. Seja $x \neq z$ em $(0,\infty)$. Suponha que $x < z$, então $\ln x < \ln z$, pois ln é crescente. Isto é, $\ln x \neq \ln z$. Isto nos diz que ln é injetiva. Por conseguinte, ln é uma bijeção.

Com isto podemos definir a função inversa de ln. Esta está estabelelcida na seguinte

Definição 10.2 (Exponencial)**.** Seja e: $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, dada por $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^x$, a função inversa de ln, isto é, $\ln \mathrm{e}^x = x$ e $\mathrm{e}^{\ln z} = z$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e $z \in (0,\infty)$.

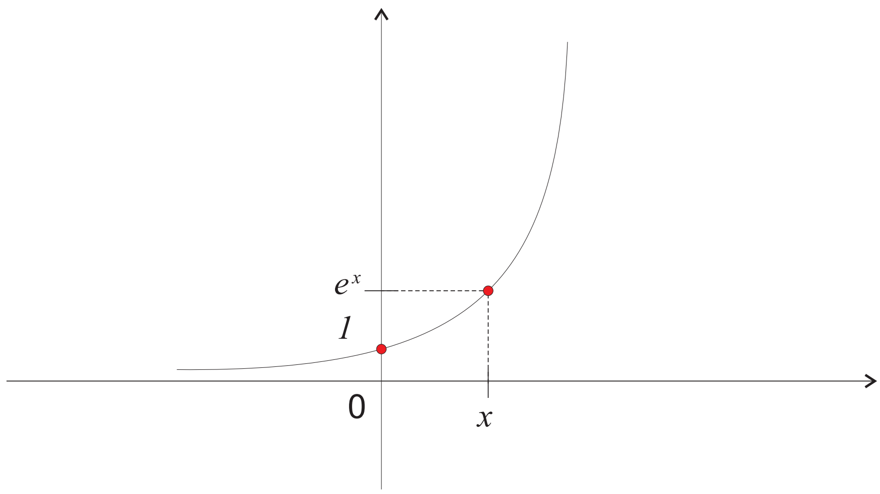

Figura 10.2: Exponencial

Teorema 10.2 (Propriedades da Exponencial)**.** *Os seguintes itens são válidos:*

i) $e^0 = 1$ *e* $e^1 = e$*;*

ii) *e é uma bijeção crescente;*

iii) $e' \equiv e$*;*

iv) $e^{x+y} = e^x e^y$*,* $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. **i)** Vimos no Teorema 9.5 que $\ln 1 = 0$. Assim sendo, $\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{\ln 1} = 1$. Além disso, $1 = \ln \mathrm{e}^1 = 1 \cdot \ln \mathrm{e} = \ln \mathrm{e}$. Ou seja, $\ln \mathrm{e} = 1$. Assim, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
ii) Como e é a inversa de ln, então e é uma bijeção. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Como ln é sobrejetiva, então existem $x, y \in (0, \infty)$ tais que $\ln x = a$ e $\ln y = b$. Como ln é crescente, então $x < y$. Caso contrário, $x > y$, teríamos $a = \ln x > \ln y = b$. Absurdo! Dessa forma, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{\ln x} = x < y = \mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^b$. Ou seja, $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$. Com isso, e é crescente.
iii) Vimos no Teorema 7.4 que $(\mathrm{e}^x)' = \dfrac{1}{\ln'(\ln^{-1} x)} = \dfrac{1}{\ln'(\mathrm{e}^x)} = \mathrm{e}^x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
iv) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Como ln é sobrejetiva, então existem $a, b \in (0, \infty)$ tais que $\ln a = x$ e $\ln b = y$. Portanto, $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln a}\mathrm{e}^{\ln b} = ab = \mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{x+y}$. Isto é, $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$. Note que: $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{y+(-y)} = \mathrm{e}^y\mathrm{e}^{-y}$. Ou seja, $\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^y}$ Além disso, $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^{x+(-y)} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$. □

Obs 10.3. Podemos provar por indução que $\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_1+x_2+\ldots+x_n}$.

Obs 10.4. Note que $\lim \mathrm{e}^n = \infty$, pois $\mathrm{e}^n > n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\lim n = \infty$. Como e é crescente, então $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Assim, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = 0$.

Obs 10.5. Observe que $\mathrm{e}' \equiv \mathrm{e} \Rightarrow \mathrm{e}^{(n)} \equiv \mathrm{e}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 10.1. Utilizando o Teorema 9.9, temos que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, pois a primitiva de e é a própria função e (ver Teorema 10.2).

Exemplo 10.2. Veja que $1 = 1/1 = \ln'(1) = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\ln y - \ln 1}{y - 1} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\ln y}{y-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1)^{1/x}$. Consequentemente, como e é contínua (ver Teorema 7.1), então, $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\ln(x+1)^{1/x}} = \lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{1/x}$. Portanto, $\mathrm{e} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Ou equivalentemente, fazendo $z = 1/x$, encontramos: $\mathrm{e} = \lim_{z\to\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$. Em particular, $\mathrm{e} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercícios de Fixação

1. $\ln(\mathrm{e}/2) = 1 - \ln 2$.

2. Se $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - ... + (-x)^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}$. Use isto para mostrar que $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}$.

10.3 Integrais Impróprias

Definição 10.3 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a+\varepsilon, b]$, $\forall\ 0 < \varepsilon < b-a$. A integral imprópria é definida por:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f.$$

Se o limite acima existir dizemos que $\displaystyle\int_a^b f$ é convergente, caso contrário dizemos que esta integral é divergente.

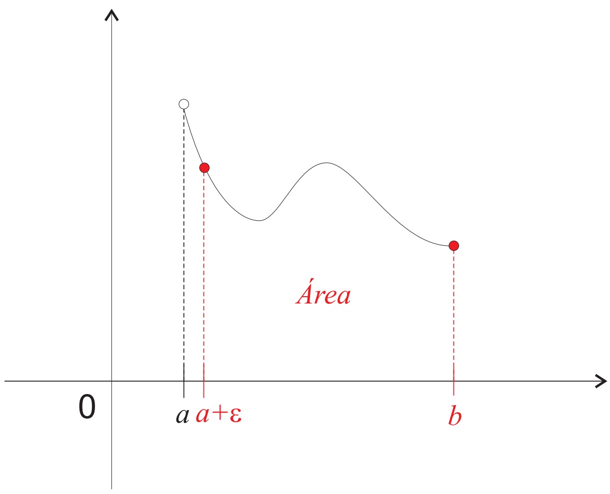

Figura 10.3: Integração imprópria

Exemplo 10.3. Vimos que $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} = -\ln\varepsilon$ e que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln\varepsilon = -\infty$. Seja $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Observe que:

$$\int_0^1 f = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-p} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-1}, & \text{se } p = 1; \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-p}, & \text{se } p \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln(\varepsilon), & \text{se } p = 1; \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_\varepsilon^1, & \text{se } p \neq 1. \end{cases}$$

$= \begin{cases} \infty, & \text{se } p \geq 1; \\ \dfrac{1}{1-p}, & \text{se } p < 1. \end{cases}$. Dessa forma, se $p \geq 1$, então $\displaystyle\int_0^1 f$ diverge, se $p < 1$, então $\displaystyle\int_0^1 f$ converge.

Exemplo 10.4. Usando o Teorema 9.10, concluímos que: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}' x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\operatorname{sen}\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{u}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\operatorname{sen}\varepsilon}^{1} u^{-\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [2\sqrt{\operatorname{sen}\varepsilon} - 2\sqrt{1}] = 2\sqrt{\operatorname{sen} 0} - 2 = -2.$

Dessa forma, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ é convergente.

Definição 10.4 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, b-\lambda]$, $\forall\ 0 < \lambda < b - a$, definimos a integral imprópria:

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_a^{b-\lambda} f.$$

Se este limite existe dizemos que a integral $\displaystyle\int_a^b f$ é convergente, caso contrário esta é chamada divergente.

Exemplo 10.5. Sabemos que $\displaystyle\int_1^{\lambda} \frac{1}{u} = \ln\lambda$ e que $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0} \ln\lambda = -\infty$. Usando o Teorema 9.10, concluímos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_0^{1-\lambda} \frac{1}{x-1} = \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{-1}^{-\lambda} \frac{1}{u} = \lim_{\lambda\to 0^+} \ln\lambda = -\infty.$$

Dessa forma, a integral imprópria $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-1}$ é divergente.

Definição 10.5 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a, c-\lambda]$ e $[c+\varepsilon, b]$, onde $c \in (a, b)$, $0 < \lambda < c - a$ e $0 < \varepsilon < b - c$. Definimos a integral imprópria:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dizemos que a integral $\displaystyle\int_a^b f$ converge se $\displaystyle\int_a^c f$ e $\displaystyle\int_c^b f$ são convergentes. Caso contrário, dizemos que $\displaystyle\int_a^b f$ é divergente.

Exemplo 10.6. A integral imprópria $\displaystyle\int_1^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}}$ é convergente? Usando o Teorema 9.10, concluímos que:

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_1^{3-\lambda} \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{-2}^{-\lambda} u^{-\frac{2}{3}} = \lim_{\lambda\to 0^+}[3\sqrt[3]{-\lambda} - 3\sqrt[3]{-2}] = 3\sqrt[3]{2}.$$

Além disso,

$$\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{3+\varepsilon}^{6} \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{3} u^{-\frac{2}{3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{\varepsilon}] = 3\sqrt[3]{3}.$$

Dessa forma, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^6 \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}$ é convergente.

Definição 10.6 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Definimos a integral imprópria de f por:

$$\int_a^\infty f = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f.$$

Se este limite existe dizemos que $\displaystyle\int_a^\infty f$ é convergente, caso contrário dizemos que $\displaystyle\int_a^\infty f$ é divergente.

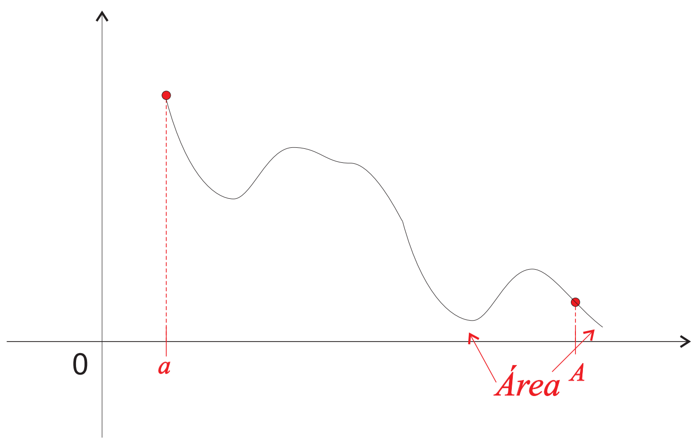

Figura 10.4: Integração imprópria

Exemplo 10.7. É sabido que $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{x} = \ln A$ e que $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$. Seja $f : (1,\infty] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Observe que: $\displaystyle\int_1^\infty f = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A x^{-p} =$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A x^{-1}, & \text{se } p=1; \\ \displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A x^{-p}, & \text{se } p\neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{A\to\infty} \ln A, & \text{se } p=1; \\ \displaystyle\lim_{A\to\infty}\left[\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right], & \text{se } p\neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \text{se } p\leq 1; \\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p>1. \end{cases}.$$

Dessa forma, se $p \leq 1$, então $\displaystyle\int_1^\infty f$ diverge, se $p > 1$, então $\displaystyle\int_1^\infty f$ converge.

Definição 10.7 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[A, b]$, $\forall\ A < 0$. Definimos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f.$$

Se este limite existe dizemos que a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$ é convergente, caso contrário dizemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$ é divergente.

Exemplo 10.8. Vimos que $\displaystyle\int_{-A}^0 \mathrm{e}^u = 1 - \mathrm{e}^{-A}$. Assim sendo, pelo Teorema 9.10, obtemos:

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x} = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \mathrm{e}^{-x} = \lim_{A\to-\infty} -\int_{-A}^0 \mathrm{e}^u = \lim_{A\to-\infty} -[1-\mathrm{e}^{-A}] = \infty.$$

Ou seja, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x}$ é divergente.

Definição 10.8 (Integral Imprópria)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Considere que $\displaystyle\int_0^\infty f$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f$ sejam convergentes. Definimos a integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f.$$

Se $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f$ ou $\displaystyle\int_0^\infty f$ é divergente, dizemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f$ é divergente.

Exemplo 10.9. Veja que $\displaystyle\int_0^\infty x = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x = \lim_{A\to\infty}\frac{A^2}{2} = \infty$. Dessa forma, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x$ é divergente.

Exemplo 10.10. Olhe que, pelo Teorema 9.10, encontramos:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int_1^{A^2+1}\frac{1}{u^2} = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{A^2+1}-1\right] = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+1)^2} = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\int_{A^2+1}^{1}\frac{1}{u^2} = \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A^2+1}-1\right] = -\frac{1}{2}.$$

Com isso, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}$ é convergente e $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0.$

Teorema 10.3 (Teste da Integral)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $[1,\infty) \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $\forall\ x \in [1,\infty)$, e f é decrescente em $[1,\infty)$. Então:*

$$\int_1^\infty f \text{ é convergente } \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ é convergente }.$$

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$. Como f é decrescente em $[1,\infty)$, então f também é decrescente em $[k.k+1] \subseteq [1,\infty)$. Com isso, $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, $\forall\ x \in [k,k+1]$. Portanto, usando os Teoremas 9.5 e 9.8, concluímos que: $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq \int_k^{k+1} f(k)$. Ou seja, $(k+1-k)f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f \leq (k+1-k)f(k)$. Isto é, $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f \leq f(k)$. Somando $k = 1,2,3,...,n$. Chegamos ao seguinte resultado: $\displaystyle\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f = \int_1^2 f + \int_2^3 f + ... + \int_n^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k)$. Lembre que a n-ésima soma parcial da série $\sum f(n)$ é dada por $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(k)$ (ver definição 3.2). Dessa forma, pelo Teorema 9.6, obtemos: $s_{n+1} - f(1) \leq \displaystyle\int_1^{n+1} f \leq s_n$ (ver Teorema 9.6).

$\Rightarrow$) Suponha que $\displaystyle\int_1^\infty f$ é convergente. Assim, $\lim \displaystyle\int_1^{n+1} f = \int_1^\infty f$. Como $f(x) > 0$, $\forall\ x \in [1,\infty)$, então $\displaystyle\int_1^{n+1} f \leq \int_1^\infty f$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $s_{n+1} - f(1) \leq \displaystyle\int_1^{n+1} f \leq \int_1^\infty f$. Ou seja, $s_{n+1} \leq f(1) + \displaystyle\int_1^\infty f$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que (s_n) é limitada. Além disso, $s_{n+1} = f(1) + f(2) + ... + f(n) + f(n+1) = s_n + f(n+1) > s_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (pois $f > 0$). Portanto, (s_n) é monótona e limitada. Pelo Teorema 2.4, (s_n) é convergente. Com a definição

3.3, concluímos que $\sum f(n)$ é convergente.

$\Leftarrow$) Considere que $\displaystyle\int_1^\infty f$ é divergente. Vamos provar que $\sum f(n)$ é divergente. Assim sendo, $\displaystyle\infty = \lim \int_1^{n+1} f \leq \lim s_n$. Com isso, $\lim s_n = \infty$. Ou seja $\sum f(n)$ é divergente. Portanto, se $\sum f(n)$ é convergente, então $\displaystyle\int_1^\infty f$ é convergente. $\square$

Obs 10.6. O Teorema 10.3 não diz que $\displaystyle\int_1^\infty f = \sum f(n)$, se $\displaystyle\int_1^\infty f$ ou $\sum f(n)$ é convergente. Esta afirmação é falsa.

Obs 10.7. A função f descrita no Teste da integral não precisa ser decrescente em $[1,\infty)$, basta ser decrescente e positiva em $[x,\infty)$, onde $x \geq 1$ é uma constante real. Este fato é devido a Proposição 2.1.

Exemplo 10.11 (Série p-harmônica)**.** A série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^p}$, onde $p > 0$, é chamada série p-harmônica. No caso em que $p = 1$ denominamos a série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ de série harmônica. Vamos mostrar que esta série é convergente quando $p > 1$ e é divergente se $p \leq 1$. Usaremos o Teorema 10.3 para isto. Seja $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Olhe que $f(x) = \dfrac{1}{x^p} > 0$, $\forall\ x \in [1,\infty)$. Além disso, se $1 \leq x < y$ então $x^p < y^p$. Com isso, $f(x) = \dfrac{1}{x^p} > \dfrac{1}{y^p} = f(y)$. Ou seja, f é decrescente em $[1,\infty)$. Note que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}, & \text{se } p = 1; \\ \displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{1}{-p+1}[b^{-p+1} - 1], & \text{se } p \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln 1], & \text{se } p = 1; \\ \infty, & \text{se } p < 1. \\ \dfrac{-1}{-p+1}, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

$= \begin{cases} \infty, & \text{se } p \leq 1. \\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1. \end{cases}$ Ou seja, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ converge para $\dfrac{1}{p-1}$ quando $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Pelo Teorema 10.3, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 10.12. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$. Vamos utilizar o Teorema 10.3 para mostrar que tal série é divergente. Com efeito, defina $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$, pondo $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$. Verifique que $f(x)$ é decrescente. Assim sendo, pelo Teorema 9.10, concluímos que: $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u} = \lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln(\ln 2)] = \infty$. Portanto, pelo Teorema 10.3, $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$ é divergente.

Exercícios de Fixação

1. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são divergentes.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-\omega}}$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}$;

d) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}$.

2. Determine, usando o Teste da Integral, se as séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+4}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\mathrm{e}^n}$;

c) $\displaystyle\sum \frac{3n+2}{n(n+1)}$.

10.4 Leitura Complementar

Definição 10.9 (Medida Nula)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. X é dito ter medida nula, e escrevemos $m(X) = 0$, se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe uma coleção de intervalos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $\sum |X_n| < \varepsilon$. Aqui $|X_n|$ representa o comprimento do intervalo X_n.

Exemplo 10.13 ($\mathbb{Q}$ tem Medida Nula)**.** Seja X um conjunto enumerável. Assim, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X. Logo, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $X_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$. Assim, $|X_n| = x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \frac{\varepsilon}{2^n}$ e $X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Além disso, $\sum |X_n| = \sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Portanto, $m(X) = 0$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, então $m(\mathbb{Q}) = 0$.

Exemplo 10.14. Todo subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula. Seja X um conjunto de medida nula e $Y \subseteq X$. Então existe uma coleção de intervalos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $\sum |X_n| < \varepsilon$. Mas, $Y \subseteq X$. Dessa forma, existe uma coleção de intervalos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $\sum |X_n| < \varepsilon$. Ou seja, $m(Y) = 0$.

Exemplo 10.15. Seja $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos de medida nula. Vamos mostrar que $m(Y) = 0$, onde $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe (X_{n_j}) coleção de intervalos tais que $Y_n \subseteq \cup_{j\in\mathbb{N}} X_{n_j}$ e $\sum_{j\in\mathbb{N}} |X_{n_j}| < \varepsilon/2^{n+1}$. Assim sendo, $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subseteq \cup_{n,j\in\mathbb{N}} X_{n_j}$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |X_{n_j}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Ou seja, $m(Y) = 0$.

O Teorema a seguir nos dá uma maneira equivalente de definirmos integral de Riemann.

Teorema 10.4 (Teorema de Lebesgue)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Seja $D_f = \{x \in [a,b] :$ f é descontínua em $x\}$ o conjunto dos pontos de descontinuidades de f. Então f é integrável $\Leftrightarrow m(D_f) = 0$.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Suponhamos que $m(D_f) = 0$. Usando a definição 10.9, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção de intervalos abertos limitados $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $D_f \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} X'_n$ e $\sum |X'_n| < \varepsilon/2(M_f - m_f)$ (ver definição 9.4). Para cada ponto $x \in [a,b] \setminus D_f$ (isto é, f é contínua em x) seja X''_x um intervalo limitado aberto contendo x, tal que $\omega(f; \overline{X''_x}) = \sup\{f(c) : c \in \overline{X''_x}\} - \inf\{f(c) : c \in \overline{X''_x}\} < \varepsilon/(2(b-a))$. Como $[a,b]$ é compacto, então a cobertura aberta $[a,b] = D_f \cup ([a,b] \setminus D_f) \subseteq (\cup_{n\in\mathbb{N}} X'_n) \cup (\cup_{x\in[a,b]\setminus D_f} X''_x)$ admite uma subcobertura finita, i.e, $[a,b] \subseteq X'_1 \cup ... \cup X'_r \cup X''_1 \cup ... \cup X''_s$ (ver Teorema 4.11). Seja $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a,b]$ tal que cada intervalo $(t_{i-1}, t_i) \subseteq X'_n$, para algum $n = 1, 2..., r$ ou $(t_{i-1}, t_i) \subseteq X''_j$, para algum $j = 1, 2, ..., s$. Podemos tomar P formada pelos pontos a, b mais os extremos dos intervalos X'_n ou X''_j que pertençam ao intervalo $[a,b]$. Denotaremos os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de P contidos em algum X'_n por I' e os demais intervalos de P (que estão contidos em algum X''_j) por I''. Assim, $\sum |I'| \leq \sum |X'_n| < \varepsilon/2(M_f - m_f)$ e $\omega(f; I'') \leq \omega(f; \overline{X''_j}) \leq \varepsilon/(2(b-a))$. Portanto $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) = \sum \omega(f; I')|I'| + \sum \omega(f; I'')|I''| \leq (M_f - m_f) \sum |I'| + \varepsilon/2(b-a) \sum |I''| < (M_f - m_f)\varepsilon/(2(M_f - m_f) + \varepsilon/(2(b-a))(b-a) = \varepsilon$. Segue-se que f é integrável (ver Teorema 9.4).

$\Rightarrow$) Agora, suponhamos que f integrável. Seja $D_m = \{x \in [a,b] : \omega(f; x) = 1/m\}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Logo $D_f = \cup_{m\in\mathbb{N}} D_m$. Vamos mostrar que $m(D_m) = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é integrável, usando o Teorema 9.4, temos que existe uma partição $P : a = t_0 < ... < t_n = b$ de $[a,b]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/m$. Denote por I' os intervalos de P tais que $\text{int} I' \cap D_m \neq \emptyset$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Com isso, $\omega(f; I') \geq \omega(f; x) = 1/m$, onde $x \in \text{int} I' \cap D_m$. Portanto $1/m \sum |I'| \leq \sum \omega(f; I')|I'| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/m$. Logo, $\sum |I'| < \varepsilon$. Como $D_m \subseteq$

$(\cup I') \cup X$, onde X é o conjunto dos extremos dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$. Assim, $m(X) = 0$ (ver exemplo 10.13). Concluímos que $m(D_m) = 0$. Pelo exemplo 10.15, $m(D_f) = 0$. $\square$

Exemplo 10.16. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 3$, $\forall\, x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$. Assim, $D_f = \{0, 1, 2\}$. Logo, pelo exemplo 10.13, $m(D_f) = 0$. Do Teorema 10.4, f é integrável.

10.5 Conclusão

Caro aluno, ao final desta aula, é importante ressaltar que a definição dada para logaritmo neperiano pode ser facilmente estendida para logaritmo em uma base positiva qualquer (ver Exercícios Propostos abaixo). Portanto, por integração, verificamos que as propriedades da função logarítmica são legítimas.

10.6 Resumo

Nesta aula, apresentamos ao aluno como trabalhar, utilizando integração a Riemann, com o logaritmo. Além disso, estendemos nossos conceitos de integrais, criando uma nova categoria de integrabilidade, as integrais impróprias. Por fim, através destas, mostramos como utilizar um novo teste de convergência para série de números reais.

10.7 Exercícios Propostos

Exercícios:

1. Defina a seguinte função: $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, onde $a > 0$. Encontre a derivada de f e estude-a. Defina o logaritmo na base a e encontre sua derivada.

2. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita convexa se $f(x) \leq f(b) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$, para $x \in (a, b)$ e $a, b \in I$. Uma função $g : I \to \mathbb{R}$ diz-se côncava se $-g$ é uma função convexa. Encontre exemplos de funções convexas e côncavas.

3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funções contínuas, não identicamente nulas, tais que $f(x + y) = f(x)f(y)$ e $g(uv) = g(u) + g(v)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}+$. Prove que existem $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = b \ln x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$.

4. Prove que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Conclua que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

5. Verifique a convergência ou divergência das integrais $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1 - \mathrm{e}^x}$, $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{x^2}$.

6. Mostre que se $r > 1$ a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\ln n)^r$ converge.

10.8 Exercícios Resolvidos

Questões Resolvidas:

Ex1. Prove que, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Faça $y_n = x/n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim, se $n \to \infty$, tem-se $y_n \to 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (1 + y_n)^{(1/y_n)x} = \left[\lim_{n\to\infty} (1 + y_n)^{1/y_n}\right]^x = \mathrm{e}^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. □

Ex2. Verifique a convergência ou divergência da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 - \cos x}$.

Demonstração. Pelo Teorema 7.12, existe $a \in (0, x)$ tal que $\cos x - \cos 0 = \mathrm{sen} a(x - 0)$, $\forall\ x \in [0, 1]$. Consequentemente, $1 - \cos x = |\cos x - 1| = |\mathrm{sen} a||x| \leq |x| = x$, $\forall\ x \in$

$[0,1]$. Com isso, $\dfrac{1}{1-\cos x} \geq \dfrac{1}{x}$, $\forall\ x \in (0,1]$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, temos que: $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{1-\cos x} \geq \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} = -\ln\varepsilon$ (ver definição 10.1). Por fim, com um abuso de notação, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1-\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{1-\cos x} \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\ln\varepsilon) = \infty$, pois $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln\varepsilon = -\infty$. Ou seja, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1-\cos x}$ é divergente.

$\square$

Auto-Avaliação

Sou capaz de aplicar corretamente o Teste da Integral e as propriedades das funções logaritmo e exponencial?

Proxima Aula

Caro aluno, espero que você tenha encontrado estímulo e divertimento no nosso material. Além disso, recomendo aos alunos mais curiosos, sobre o prosseguimento deste texto, o estudo do curso Cálculo Avançado. Neste, veremos estensões dos conteúdos abordados aqui.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introdution to Real Analysis*, Third Edition, New York, JohnWiley and Sons,Inc., 2000. 399p.

[2] Figueiredo, D., *Análise I*, Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2008. 266p.

[3] Lages, E., *Curso de Análise vol. 1*, Décima Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 431p.

[4] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, New York, McGraw-Hill, Inc., 1976. 351p.

Professor Revisor

Professor Wilberclay Gonçalves Melo