AULA 10

# Equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis: Soluções por séries de potências

**META:**

Descrever o método de resolução de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes variáveis por meio de séries de potências.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Resolver uma E.D.O. linear com coeficientes variáveis utilizando séries de potências.

**PRÉ-REQUISITOS**

Os conhecimentos sobre séries: definição, operações, testes de convergência e etc. Além dos conhecimentos das aulas 1, 2 e 6 deste livro.

## 10.1 Introdução

Caros alunos, nesta aula continuaremos a aprender como solucionar equações lineares com coeficientes variáveis. Até agora mostramos vários procedimentos para obter soluções de equações diferenciais em termos de funções elementares, contudo agora, para irmos adiante, é necessário estender nossos procedimentos a soluções além das funções elementares que estamos acostumados a lidar. A principal ferramenta aqui será a representação de funções por meio de séries de potências. Suponharemos que as soluções das equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis tratadas aqui sejam na forma de uma série de potência, o procedimento seguinte é semelhante ao que usamos com o método de coeficientes a determinar. Dessa maneira, começaremos o texto dessa aula com uma pequena revisão sobre séries de potências.

## 10.2 Séries de potências

Seja $a_n, n \geq 0$ uma sequência numérica dada e $x_0$ um número real dado. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

denomina-se série de potências com coeficientes $a_n$, centrada em $x_0$. Se $x_0 = 0$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

**Convergência de séries de potências**

**Raio de convergência:** Dada uma série de potência

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

o raio de convergência desta série é um número $R > 0$ tal que para todo $x$ pertencente ao intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ a série converge. A seguir enunciaremos um teste de convergência denominado **teste da razão**.

**Teste de convergência** Dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, onde $c_n = a_n(x-x_0)^n$, então
a) Se $L < 1$, a série converge absolutamente.
b) se $L > 1$, a série diverge.
Para determinarmos o raio de convergência de uma série, usamos o seguinte teorema

**Teorema 10.1.** *(***Raio de convergencia***) Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e suponha $a_n \neq 0$ para todo $n \geq p$, onde $p$ é um número natural fixo. Então, o raio de convergência $R$ desta série é dado por*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

*quando o limite existe finito ou infinito.*

**Exemplo 10.1.** Dada a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2},$$

decida sobre sua convergência.
Para saber se a série é convergente, devemos calcular o número $L$ descrito acima. Assim, nesse caso, $L = \lim_{n\to\infty}|x|\frac{n+2}{n+3} = |x|$. Portanto, a série converge absolutamente para todo $x$ tal que $|x| < 1$,

ou seja, para todo $x$ pertencente ao intervalo $(-1,1)$. E, claramente, se vê que o raio de convergência é igual a 1. Contudo, para determinarmos todos os pontos de convergência dessa série, nos falta verificar a convergência nos extremos do intervalo $(-1,1)$. Assim, observe que para $x=1$, obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$, a qual pelo teste da integral podemos demonstrar que diverge. Para $x=-1$, temos a série alternada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$, a qual converge uma vez que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$. Assim, a série acima converge para todo $x$ pertencente ao intervalo $[-1,1)$.

**Observação 10.1.** Uma das grandes utilidades das séries de potências é, dada uma função qualquer, podermos escrevê-la em forma de série de potências. Contudo, nem toda função pode ser representada por uma série de potências (somente as funções analíticas). E, uma série de potências define uma função,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

apenas para os valores de $x$ pertencentes ao intervalo de convergência dessa série, ou seja, o domínio da função $f$ dada acima, é exatamente os pontos onde a série que a define é convergente.

A seguir apresentaremos como fazer algumas operações com séries de potências.

### Soma, diferença e produto de séries

Suponha que as séries de potências

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \text{ e } g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

são ambas convergentes, com raio de convergência $R > 0$, então

a) $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$.

b) $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, onde $c_n = (a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0 b_n)$

são séries que convergem para todo $x$ pertencente à $(x_0 - R, x_0 + R)$.

**Integração e derivação de séries**

**Teorema 10.2.** *Se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *tiver raio de convergência* $R > 0$*, então a função* $f$ *definida por*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

*é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *e*

*a)* $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$

*b)* $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(x - x_0)^n dx$*, onde* $f'$ *e* $g$ *tem o mesmo raio de convergência que* $f$.

**Definição 10.1.** (**Função analítica**) Dizemos que uma dada função $f$ é analítica no ponto $a$ quando ela puder ser representada por uma série de potência centrada em $a$ com um raio de convergência $R > 0$. Quando a função é analítica em todo ponto do seu domínio, dizemos que a função é analítica.

**Exemplo 10.2.** São funções analíticas $e^x, \cos x, sen\, x, \frac{1}{1-x}$, $ln|x - 1|$, etc.

**Observação 10.2.** Para identificarmos se uma dada função é analítica num ponto $a$ sem recorremos a definição, basta verificarmos se essa função é de classe $C^{\infty}$ nesse ponto, ou seja, é só verificarmos se a função é infinitamente diferenciável nesse ponto.

## 10.3 Soluções em série em torno de um ponto ordinário

**Definição 10.2.** Dizemos que um ponto $x = x_0$ é **ponto ordinário** da equação diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

se $P(x), Q(x)$ são analíticas em $x = x_0$. Um ponto é dito **ponto singular** quando ele não for ordinário.

**Exemplo 10.3.** 1) O ponto $x = 0$ é ponto ordinário da equação

$$e^x y'' + (\cos x)y' + (sen\, x)y = 0,$$

uma vez que $P(x) = \frac{\cos x}{e^x}, Q(x) = \frac{sen\, x}{e^x}$ são funções analíticas em $x = 0$. No entanto $x = 0$ não é ponto ordinário, ou seja, é ponto singular da equação

$$xy'' + x(lnx)y' + (sen\, x)y = 0,$$

visto que a função $P(x) = ln(x)$ não é analítica em $x = 0$.

**Exemplo 10.4.** A equação com coeficientes polinomias

$$(x^3 - 1)y'' + 3xy' + 2y = 0$$

possui as raízes de $x^3 - 1$ como pontos singulares, visto que, colocando essa equação em sua forma normal, temos $P(x) = \frac{3x}{x^3-1}, Q(x) = \frac{2}{x^3-1}$ não estão definidas nas raízes de $x^3 - 1$, ou seja, não estão definidas em $x = 1$, logo não podem ser analíticas nesse ponto. Todos os outros pontos, reais ou imaginários, são pontos ordinários dessa equação.

Já com respeito a equação

$$(x^3 - 4x)y'' + 3xy' + 5x(x-2)y = 0$$

nem todas as raízes de $x^3 - 4x$ (as quais são $x = 0, x = 2, x = -2$) são pontos singulares, uma vez que, colocando essa equação em sua forma normal, obtemos $P(x) = \frac{3x}{x^3-4x} = \frac{3}{x^2-4}$ e $Q(x) = \frac{5x(x-2)}{x^3-4x} = \frac{5}{(x+2)}$. Desta maneira, vemos que das raízes de $x^3 - 4x$ apenas $x = 2$ e $x = -2$ são pontos singulares e $x = 0$ é ponto ordinário. Você saberia me explicar a diferença dessa equação e da equação anterior, o que está acontecendo?

**Mãos a obra** Quais são os pontos singulares e ordinários da equação de Cauchy-Euler

$$2x^2y'' + 7xy' - y = 0?$$

A seguir enunciaremos um teorema que nos garante a existência de soluções em forma de série de potência para uma equação diferencial linear desde que certas condições sejam satisfeitas por esta equação. Vamos conhecer quais?

**Teorema 10.3.** *Seja*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (10.57)$$

*uma equação diferencial linear normal de ordem $n$ cujos coeficientes $a_n(x), \cdots, a_0(x)$ e segundo membro $g(x)$ são analíticos num intervalo aberto $I$. Seja $x_0$ um ponto qualquer em $I$ ($x_0$ é ponto* *ordinário), e suponhamos que as expansões em séries de potências de $a_0(x), \cdots, a_n(x)$ e $g(x)$ sejam convergentes no intervalo $|x - x_0| < R, R > 0$. Então, toda solução de (10.57) que é definida no ponto $x_0$ é analítica nesse ponto e sua expansão em série de potências em torno de $x_0$ também converge no intervalo $|x - x_0| < R$.*

Faremos alguns exemplos para aplicarmos concretamente o teorema acima.

**Exemplo 10.5.** Ache a solução geral de

$$y'' + xy' + y = 0.$$

Observe que os coeficientes da equação acima são analíticos para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, podemos escolher qualquer ponto em $\mathbb{R}$ como ponto ordinário. Escolhamos o ponto mais simples, $x = 0$. Dessa maneira, pelo Teorema 10.3, cada uma das soluções dessa equação possui uma expansão em torno de $x = 0$ que converge para todos os valores reais de $x$. Vamos calcular a expansão em séries de potências dessa solução?

Seja $y(x)$ uma solução qualquer da equação acima. Pelo Teorema (10.3) essa solução é da forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Assim,

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Substituindo essas expressões na equação diferencial dada temos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

que, por operações entre séries, é equivalente a

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0. \qquad (10.58)$$

Observe que a igualdade acima é válida se, e somente se, a soma dos coeficientes de mesma potência de $x$ forem nulos. Assim, para facilitar a reunião dos termos em (10.58) mudaremos o índice da soma na primeira série. Para isso, façamos $n = k - 2$, assim

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n,$$

Fazendo, $n = k$ nas demais séries, a expressão em (10.58) pode ser reescrita da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Agrupando os coeficientes de mesma potência em $x$, temos

$$a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)[(n+2)a_{n+2} + a_n]x^n = 0,$$

e, como a igualdade acima só é válida se a soma dos coeficientes de mesma potência são nulos, segue

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_2 &= 0, \\ (n+2)a_{n+2} + a_n &= 0, n \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $a_2 = -\frac{a_0}{2}$ e $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}, n \geq 1$, essa última igualdade é conhecida por **relação de recorrência**, uma vez que para obtermos o próximo termo precisamos saber quem é o termo anterior. Desenvolvendo a relação de recorrência acima, segue

| $n$ par | $n$ impar |
|---|---|
| $a_0$ | $a_1$ |
| $a_2 = -a_0/2$ | $a_3 = -a_1/3$ |
| $a_4 = \frac{a_0}{4 \cdot 2}$ | $a_5 = \frac{a_1}{5 \cdot 3}$ |
| $a_6 = -\frac{a_0}{6 \cdot 4 \cdot 2}$ | $a_7 = -\frac{a_1}{7 \cdot 5 \cdot 3}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}$ | $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3}$ |

Substituindo os valores dos coeficientes encontrados na expressão da solução $y(x)$, obtemos

$$\begin{array}{c} y(x) = a_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2} - \frac{x^6}{6 \cdot 4 \cdot 2} + \cdots \right] \\ +a_1 \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 3} - \frac{x^7}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \cdots \right] \end{array},$$

onde $a_0, a_1$ são constantes quaisquer.

Note que as séries acima

$$y_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2} - \frac{x^6}{6 \cdot 4 \cdot 2} + \cdots$$

e

$$y_1(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 3} - \frac{x^7}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \cdots$$

são convergentes para todo $x$ pertencente ao intervalo $(-\infty, \infty)$ (aplique o teste da razão). Além disso, as funções $y_0, y_1$ são L.I. e, dessa maneira, a expressão acima é a expressão da solução geral da E.D.O. dada.

Nem sempre é fácil, após desenvolvermos a relação de recorrência, acharmos uma expressão geral para os termos, como aconteceu no exemplo acima. Quando não for possível acharmos tal expressão geral, calculemos alguns primeiros termos apenas. No exemplo abaixo, vamos tentar achar a expressão geral dos termos da solução?

**Exemplo 10.6.** Resolva o P.V.I.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2,$$

onde $\lambda$ é uma constante não negativa e cuja equação diferencial associada é conhecida por **equação de Legendre de ordem $\lambda$.** Neste exemplo temos dois pontos singulares, a saber, $x = \pm 1$ da equação de Legendre. Assim, o Teorema 10.3 nos garante que existe uma expressão em séries de potências para a solução da equação de Legendre em torno, por exemplo, de $x = 0$ que converge no intervalo $(-1, 1)$. Portanto, seja $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ a solução procurada. Assim, derivando essa expressão e substituindo na equação diferencial, temos

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \lambda(\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

que é equivalente a

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1)a_k x^k = 0.$$

Mudando o índice de soma na primeira série, fazendo $k-2 = n$, e nas demais somas, fazendo $k = n$, a igualdade acima torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_k x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1)a_n x^n = 0.$$

Reunindo as três últimas séries, temos

$$-2a_1x + \lambda(\lambda+1)[a_0 + a_1x] + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}[-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1)]a_nx^n = 0. \tag{10.59}$$

Observe que

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1) = (\lambda+n+1)(\lambda-n),$$

assim a expressão em (10.59) pode ser reescrita na forma

$$2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 + [(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3]x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n]x^n = 0.$$

Igualando os coeficientes a zero, obtemos

$$2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 = 0,\ (\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3 = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n = 0, n \geq 2.$$

Desenvolvendo a relação de recorrência, obtemos

| $n$ par | $n$ impar |
|---|---|
| $a_0$ | $a_1$ |
| $a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}a_0$ | $a_3 = -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}a_1$ |
| $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}a_0$ | $a_5 = \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}a_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_{2n} =???$ | $a_{2n+1} =???$ |

Substituindo os valores dos coeficientes na expressão da solução $y(x)$, temos que

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \cdots\right] +$$

$$a_1\left[x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \cdots\right].$$

E, como $y(0) = a_0 = 1$ e $y'(0) = a_1 = 2$, temos que a solução do P.V.I. dado é

$$y(x) = \left[1 - \tfrac{\lambda(\lambda+1)}{2!}x^2 + \tfrac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \cdots\right] +$$

$$2\left[x - \tfrac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}x^3 + \tfrac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \cdots\right], x \in (-1, 1).$$

Para quem tentou achar os termos gerais $a_{2n}$ e $a_{2n+1}$, aí está a resposta

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda + 2n - 1)(\lambda + 2n - 3)\cdots(\lambda + 1)\lambda(\lambda - 2)\cdots(\lambda - 2n + 2)}{(2n)!} a_0$$

e

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\lambda + 2n)(\lambda + 2n - 2)\cdots(\lambda + 2)(\lambda - 1)\cdots(\lambda - 2n + 1)}{(2n + 1)!} a_1$$

## 10.4 Soluções em série em torno de pontos singulares-Método de Frobenius

Antes de enunciarmos o teorema devido a Frobenius, definiremos alguns conceitos importantes. Considere a equação diferencial linear de segunda ordem normal

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (10.60)$$

**Definição 10.3.** (**Ponto singular regular e irregular**) Um ponto singular $x_0$ é dito **ponto singular regular** da equação (10.60) se as funções $(x - x_0)P(x)$ e $(x - x_0)^2Q(x)$ forem ambas analíticas em $x_0$. Um ponto singular que não seja regular é dito **ponto singular irregular** da equação (10.60).

**Exemplo 10.7.** Classifique os pontos singulares da equação diferencial

$$x^2(x + 1)^3(x - 1)y'' + xy' - 2y = 0.$$

Pela definição vemos que os pontos $x = 0, x = 1$ e $x = -1$ são pontos singulares, destes os regulares são $x = 0$ e $x = 1$, pois as funções $xP(x) = x\frac{x}{x^2(x+1)^3(x-1)}$ e $x^2Q(x) = -x^2\frac{2}{x^2(x+1)^3(x-1)}$ são analíticas em $x = 0$ e as funções $(x-1)P(x) = (x-1)\frac{x}{x^2(x+1)^3(x-1)}$ e $(x-1)^2Q(x) = -(x-1)^2\frac{2}{x^2(x+1)^3(x-1)}$ são analíticas em $x = 1$.

**Mãos a obra** Classifique todos os pontos da equações abaixo em ordinários, singulares, singulares regulares ou singulares irregulares.

a) (**Equação de Legendre**)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0.$$

b) (**Equação de Bessel**)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0.$$

c)(**Equação de Laguerre**)

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

**Teorema 10.4.** *Se $x = x_0$ for um ponto singular regular da equação*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

*então existirá pelo menos uma solução da forma*

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

*onde o número $r$ é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < x - x_0 < R$.*

**Exemplo 10.8.** Resolva a equação

$$x^2y'' + x(x-1/2)y' + y/2 = 0, x \in (0, \infty). \qquad (10.61)$$

Observe que $x = 0$ é ponto singular regular desta equação, assim pelo Teorema 10.4, a equação acima possui pelo menos uma solução na forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}.$$

O próximo passo é determinar os coeficientes $a_k, k = 0, 1, 2, \cdots$ tais que $a_0 \neq 0$ e a constante $r$ dessa solução. Derivando a expressão de $y(x)$ e substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2} \\ +x(x-1/2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k+r-1} + \\ \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k+r+1} \\ -\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k+r} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente a seção anterior, troquemos o índice das séries acima, a fim de facilitarmos o agrupamento dos termos. Para isso, façamos $n+r = k+r$, na primeira, terceira e quarta soma e $n+r = k+r+1$ na segunda soma. Dessa maneira, a igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(k+r)a_{n-1} x^{n+r} \\ -\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

e, agrupando os termos de mesma potência, temos

$$[r(r-1)-\tfrac{1}{2}r+\tfrac{1}{2}]a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-\frac{1}{2}(n+r)+\frac{1}{2}\right]a_nx^{n+r}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}=0.$$

Portanto, uma vez que $a_0\neq 0$ ao igualarmos os coeficientes de mesma potência de $x$ a zero, obtemos

$$r(r-1)-\tfrac{1}{2}r+\tfrac{1}{2} \quad =0 \tag{10.62}$$

$$\left[(n+r)(n+r-1)-\tfrac{1}{2}(n+r)+\tfrac{1}{2}\right]a_n+(n+r-1)a_{n-1} \quad =0, n\geq 1. \tag{10.63}$$

A equação (10.62) é conhecida por **equação indicial** associada a (10.61). Ela é obtida quando igualamos o coeficiente da potência de menor ordem de $x$ a zero. Suas raízes são $r_1=1/2, r_2=1$ são chamadas **raízes indiciais**.

Observe que para resolvermos o sistema acima devemos para cada valor das raízes de (10.62) solucionar a equação (10.63). Assim, para $r_1=1/2$, a equação (10.63) torna-se

$$a_n=-\frac{1}{n}a_{n-1}.$$

Portanto,

$$a_1=-a_0, a_2=\frac{a_0}{2!}, a_3=-\frac{a_0}{3!},\cdots, a_n=(-1)^n\frac{a_0}{n!}.$$

E, para $r_2=1$, a equação (10.63) torna-se

$$a_n=-\frac{2}{2n+1}a_{n-1}.$$

Logo,

$$a_1=-\tfrac{2}{3}a_0, a_2=\tfrac{2^2}{5\cdot 3}a_0, a_3=-\tfrac{2^3}{7\cdot 5\cdot 3}a_0,\cdots,$$

$$a_n=(-1)^n\tfrac{2^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}a_0.$$

Escolhendo $a_0 = 1$ e substituindo os valores dos coeficientes encontrados nos dois casos analisados, obtemos duas soluções da equação (10.61), a saber

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \tag{10.64}$$

e

$$y_2(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3}. \tag{10.65}$$

Observe que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independente uma vez que nenhuma das séries é múltiplo constante da outra, logo para completar a resolução basta encontramos o intervalo de convergência de cada série dessa. Usemos o teste da razão.

Aplicando o testa da razão para a primeira série obtemos

$$\rho_1 = \left| \frac{x^{n+3/2}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{x^{n+1/2}} \right| = \frac{|x|}{n+1},$$

e para a segunda série

$$\rho_2 = \left| \frac{2^{n+1} x^{n+2}}{(2n+3)\cdots 5 \cdot 3} \right| \left| \frac{(2n+1)\cdots 5 \cdot 3}{2^n x^{n+1}} \right| = \frac{2|x|}{2n+3}.$$

Então,

$$\lim_{n \to \infty} \rho_1 = \lim_{n \to \infty} \rho_2 = 0,$$

portanto as séries acima convergem para todo $x \in (0, \infty)$. Além disso, as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são L.I., uma vez que não tem como uma função ser múltiplo constante da outra função. Portanto, a solução geral de (10.61) é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

para todo $x \in (0, \infty)$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes quaisquer.

### A equação indicial

Como falamos anteriormente, a equação indicial associada a uma equação é obtida quando igualamos o coeficiente da potência de ordem mais baixa de $x$ a zero. Estudando a equação indicial percebemos que teremos os seguintes casos a considerar:

Sejam $r_1, r_2$ as raízes indiciais tais que $r_1 > r_2$, então

1)$r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

2) $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, ainda podemos subdividir em :

2.1)$r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ e $r_1 \neq r_2$.

2.2)$r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ e $r_1 = r_2$.

No primeiro caso, teremos duas soluções L.I.. Este foi o caso do exemplo acima. No segundo caso, podemos ter ou não duas soluções L.I. da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. Isso é algo que descobriremos quando analisarmos as relações de recorrência para cada valor das raízes indiciais. Há casos que em analisando as relações descobrimos que as duas raízes indiciais, as quais diferem por um inteiro, embora distintas produzem a mesma solução. Nesse caso achamos a segunda solução usando redução de ordem. No caso em que $r_1 = r_2$, temos claramente uma única solução, $y_1$, a segunda solução, $y_2$, é obtida por redução de ordem, ou seja, é obtida pela fórmula

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

Então, resumindo se ocorrer o caso 2.1) a equação diferencial terá duas soluções L.I. da forma

$$\begin{aligned} y_1(x) = & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = & Cy_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, b_0 \neq 0, \end{aligned}$$

onde $C$ é uma constante a ser determinada a qual pode ser até nula.

Se ocorrer o caso 2.2) ($r_1 = r_2$) a equação diferencial terá duas soluções L.I. da forma

$$\begin{aligned} y_1(x) = & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, a_0 \neq 0 \\ y_2(x) = & y_1(x)lnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1}. \end{aligned}$$

## 10.5 Conclusão

Na aula de hoje, concluímos que as séries de potências contribuíram para que mais equações diferenciais pudessem ser resolvidas, contudo ainda estamos longe de resolvermos analiticamente todas as equações diferenciais ordinárias. Esse método de resolução por séries de potências exige um pouco mais de cuidado e concentração, uma vez que envolve muitos cálculos, contudo é um método eficaz e já há bastante tempo usado nas ciências ditas exatas.

## RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos uma técnica para resolução de equações lineares com coeficientes variáveis. Aprendemos que podemos achar soluções em forma de séries de potências em torno de pontos ordinários para equações diferenciais. Ademais, aprendemos que além de obtermos soluções em forma de séries de potências em torno de pontos ordinários, podemos obter em torno de pontos singulares, usando para isso o método de Frobenius.

## PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula veremos o fundamento teórico a cerca da transformada de Laplace, a qual é uma ferramenta muito utilizada, principalmente pelos físicos, para resolução de equações diferenciais ordinárias.

## ATIVIDADES

..

**Atividade. 10.1.** Determine os pontos singulares de cada equação diferencial. Classifique cada ponto como regular ou irregular.

a) $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$

b) $(x^2 - 9)^2y'' + (x + 3)y' + 2y = 0$

c) $(x^3 + 4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$

**Atividade. 10.2.** Encontre duas soluções L.I. em série de potências em torno do ponto ordinário $x = 0$

a) $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

**Atividade. 10.3.** Use o método de séries de potências para resolver

a) o P.V.I. $y'' - 2xy' + 8y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.

b) $y'' - xy = 1$

**Atividade. 10.4.** A equação diferencial $y'' - 2xy + 2ny = 0$ é conhecida como **equação de Hermite**. Quando $n \geq 0$ é um número inteiro, a equação de Hermite apresenta uma solução polinomial. Os polinômios de Hermite têm alguma importância no estudo de mecânica quântica. Obtenha as soluções polinomiais correspondentes a $n = 1$ e $n = 2$.

**Atividade. 10.5.** Nos problemas abaixo mostre que as raízes indiciais não diferem por um inteiro. Use o método de Frobenius para obter duas soluções seriais linearmente independentes em torno do ponto singular regular $x_0 = 0$. Encontre a solução geral em $(0, \infty)$.

a)$2xy'' - y' + 2y = 0$

b) $4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$

**Atividade. 10.6.** No problema abaixo mostre que as raízes indiciais diferem por um inteiro. Use o método de Frobenius para obter duas soluções seriais L.I. em torno da singularidade regular $x_0 = 0$. Encontre a solução geral em $(0, \infty)$.

a)$xy'' + 2y' - xy = 0$

## LEITURA COMPLEMENTAR

..

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

## 10.6 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.