AULA

12

Equações diferenciais e a Transformada de Laplace

META:

Descrever como a transformada de Laplace nos ajuda a resolver Equações Diferenciais Ordinárias.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Resolver uma E.D.O. utilizando a transformada de Laplace.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos das aulas 1, 2, 6 e, principalmente, os da aula 11.

12.1 Introdução

Caros alunos, nesta aula finalmente aprenderemos a aplicar nossos conhecimentos sobre a transformada de Laplace na resolução de E.D.O.'s. Começaremos calculando a transformada de uma derivada.

12.2 A transformada de uma derivada

A fim de resolvermos equações diferenciais precisaremos obter expressões para, por exemplo, a transformada $\mathcal{L}\{dy/dx\}$. Assim, nesta seção, estudaremos a transformada de derivadas. Observe que se f' for uma função contínua para $t \geq 0$, obtemos, pela integração por partes, que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0), \end{aligned} \tag{12.66}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.(No cálculo acima assumimos que $e^{-st} f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$). Usando (12.66) e procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

e

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

Continuando o raciocínio, temos o seguinte teorema

Teorema 12.1. *Se $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em*

$[0, \infty)$, *então*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

12.3 Resolvendo equações diferenciais utilizando a transformada de Laplace

Nesta seção mostraremos como aplicamos todo o fundamento teórico estudado sobre a transformada de Laplace para resolvermos equações diferenciais lineares.

Exemplo 12.1. Ache a solução do P.V.I.

$$y'' + 4y = 3, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da equação diferencial acima, temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{3\}.$$

Assim, pelo Teorema 12.1 a igualdade acima se reduz a

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + 4F(s) = \frac{3}{s}, \tag{12.67}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Substituindo as condições iniciais e organizando a equação (12.67), obtemos

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+4)}.$$

Utilizando frações parciais, segue que

$$\frac{3}{s(s^2+4)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4}.$$

Assim, $F(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4}$ e, como $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{s} - \tfrac{3}{4}\tfrac{s}{s^2+4}\} \\ &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\cos 2t \end{aligned}$$

é a solução do P.V.I. dado.

Em geral temos, dado uma E.D.O. linear com coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dt^n} + \cdots + a_0 y = g(t), \tag{12.68}$$

com condições iniciais

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

Pela linearidade da transformada de Laplace segue que

$$a_n \mathcal{L}\{\frac{d^{(n)}y}{dt^n}\} + \cdots + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

e, pelo Teorema 12.1, a igualdade acima se reduz a

$$a_n[s^n F(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)]$$

$$+a_{n-1}[s^{n-1}F(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}] + \cdots + a_0 F(s) = G(s),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Substituindo os valores dados para as condições iniciais, obtemos $P(s)F(s) = Q(s)+G(s)$, donde

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)},$$

onde $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$ e $Q(s)$ é um polinômio na variável s de grau menor ou igual a $n-1$. A solução do P.V.I. (12.68) é dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Exemplo 12.2. Ache a solução do P.V.I.

$$y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos 3t, y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados desta equação e aplicando as condições iniciais dadas, obtemos

$$s^2F(s) + 1 + 4sF(s) + 13F(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9},$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Assim,

$$F(s) = -\frac{1}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}.$$

Agora, devemos achar a transformada inversa de cada termo da soma acima, começemos pelo primeiro termo.

$$\frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+9} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{s^2+4s+13}\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} sen\, 3t.$$

Para o segundo membro da soma usamos frações parciais

$$\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+13}.$$

Resolvendo a igualdade acima, obtemos $A = -8/169, B = 2/13, C = 8/169, D = 6/169$. Portanto,

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{s^2(s^+4s+13)} &= -\tfrac{8}{169}\tfrac{1}{s} + \tfrac{2}{13}\tfrac{1}{s^2} + \tfrac{1}{169}\tfrac{8s+6}{s^2+4s+13} \\ &= -\tfrac{8}{169}\tfrac{1}{s} + \tfrac{2}{13}\tfrac{1}{s^2} + \tfrac{8}{169}\tfrac{s+2}{(s+2)^2+9} - \tfrac{10}{3\cdot 169}\tfrac{3}{(s+2)^2+9}, \end{aligned}$$

e, assim

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\} = -\frac{8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t - \frac{10}{507}e^{-2t} sen\, 3t.$$

E, finalmente a terceira soma pode ser vista como

$$\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} = -\frac{3}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right).$$

Portanto, pelo Teorema 11.6 e pelo item 2 do Teorema 11.5, segue que

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\} = \frac{1}{2}te^{-2t}sen\,3t.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\tfrac{1}{3}e^{-2t}sen\,3t - \tfrac{8}{169} + \tfrac{2}{13}t + \\ &\tfrac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t - \tfrac{10}{507}e^{-2t}sen\,3t + \tfrac{1}{2}te^{-2t}sen\,3t \\ &= -\tfrac{179}{507}e^{-2t}sen\,3t + \tfrac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t + \tfrac{1}{2}te^{-2t}sen\,3t + \tfrac{2}{13}t - \tfrac{8}{169}. \end{aligned}$$

12.4 O teorema da convolução e a transformada de funções periódicas

Nesta seção falaremos sobre mais uma grande propriedade da transformada de Laplace conhecida por fórmula de convolução. Esta fórmula é muito importante para construir inversas para os operadores diferenciais lineares a coeficientes constantes.

Teorema 12.2. *Sejam f e g funções contínuas por partes e de ordem exponencial e suponhamos que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s).$$

Então,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi\right\} = F(s)G(s).$$

O resultado do teorema acima escrito em termos da transformada inversa é

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi,$$

e assim, observamos que, se conhecermos as transformadas inversas f e g das funções F e G, então podemos exprimir a transformada inversa do produto $F(s)G(s)$ como uma integral envolvendo f e g. A integral

$$\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi$$

chama-se **a convolução de** f **e** g e denotamos por $f * g$.

Exemplo 12.3. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$. Uma maneira de calcular essa transformada inversa seria usando frações parcias, contudo esse cálculo pode ser simplificado se usarmos a fórmula da convolução. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+1)}\right\}\\ &= \int_0^t 1 \cdot sen\,\xi d\xi = 1-\cos t.\end{aligned}$$

Para encerrarmos essa seção enunciaremos um resultado que nos diz como calcular a transformada de funções periódicas

Teorema 12.3. *Se $f(t)$ for uma função contínua por partes em $[0,\infty)$, de ordem exponencial e periódica com período T, então*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

No exemplo a seguir, ilustraremos o caso de resolução de uma equação linear onde o termo independente não é contínuo. Veremos que o cálculo da solução dessa equação usando transformada de Laplace é bem mais imediato do que usando as técnicas convencionais de resolução de equações lineares com coeficientes constantes.

Exemplo 12.4. Resolva o seguinte P.V.I.

$$y'' + 4y = h(t), y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} 0, 0 < t \leq 1 \\ \\ 1, t > 1 \end{cases}$$

Nesse caso apicando a transformada de Laplace a ambos os lados, substituindo as condições iniciais e organizando a equação, obtemos

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+4)},$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Assim, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{(\frac{1}{2s})(e^{-s}\frac{2}{s^2+4})\}$. Usando a propriedade de translação, temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}\frac{2}{s^2+4}\} = sen\, 2(t-1)\mathcal{U}(t-1)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2s}\} = 1/2.$$

Assim, usando a fórmula de convolução, obtemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(\tfrac{1}{2s})(e^{-s}\tfrac{2}{s^2+4})\} = \int_1^t \tfrac{1}{2} sen\,(2\xi - 2)d\xi \\ &= \tfrac{1}{4}[1 - \cos(2t-2)]. \end{aligned}$$

12.5 Conclusão

Na aula de hoje, concluímos que existe um método alternativo de se resolver equações diferencias lineares com coeficientes constantes. Esse método consiste basicamente em usar convenientemente a transformada de Laplace. Com esse método podemos resolver, de maneira mais simples, equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em que a função independente não é contínua no intervalo considerado o que, em alguns casos, é muito enfadonho resolver com os métodos vistos nas aulas 7 e 8.

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos como usar a transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula começaremos a ver o conteúdo final do nosso curso: sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Veremos que podemos simplificar muito os cálculos para obter soluções de equações diferenciais de ordem superior apenas enxergando essas equações como um sistema de equações de primeira ordem.

ATIVIDADES

..

Atividade. 12.1. Utilizando a transformada de Laplace, resolva cada um dos P.V.I.'s abaixo:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 4$

b)$y'' + y = t, y(0) = -1, y'(0) = 3$

c)$y'' - y' - 6y = 3t^2 + t - 1, y(0) = -1, y'(0) = 6$

Atividade. 12.2. Resolva o P.V.I.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), i(0) = 0$$

que descreve como a corrente num circuito em série RL simples varia com o tempo. Considere $R = 1\ Ohm; L = 1\ henry$ e $E(t)$ é uma função quadrada de período $T = 2a$, onde

$$E(t) = \begin{cases} 1, 0 < t \leq a \\ \\ -1, a < t \leq 2a \end{cases}$$

(dica: Use a transformada de uma função periódica na hora de calcular a transformada da função $E(t)$.)

Atividade. 12.3. Use a fórmula da convolução para achar a transformada inversa das funções

a) $\frac{s}{(s^2+1)^2}$

b) $\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}$

Atividade. 12.4. Usando transformada de Laplace, resolva

$$y'' + 9y = \cos 3t, y(0) = 2, y'(0) = 5.$$

LEITURA COMPLEMENTAR

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

12.6 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.