AULA 14

Resolução de sistema de E.D.O. lineares de primeira ordem não homogêneo

META:

Descrever o método de variação de parâmetros para sistemas de equações lineares de primeira ordem.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Resolver completamente um sistema de equações lineares não homogêneo com coeficientes constantes.

PRÉ-REQUISITOS

Resolução de sistemas lineares. Operações com matrizes, cálculo de determinantes e matrizes inversas, além dos conhecimentos das aulas 1, 2, 6, 7, 8 e 13.

14.1 Introdução

Caros alunos, nesta aula, daremos continuidade ao estudo de sistemas de equações lineares de primeira ordem, contudo desta vez abordaremos o caso não homogêneo.

14.2 Resolvendo um sistema de equações lineares de primeira ordem não homogêneo

14.2.1 Variação de parâmetros

Se $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$ for um conjunto fundamental do sistema homogêneo (13.70) num intervalo I, então a solução geral desse sistema homogêneo é dada por

$$Y_c(x) = c_1Y_1(x) + \cdots c_nY_n(x)$$

ou escrevendo de outra forma

$$Y_c(x) = \begin{pmatrix} c_1y_{11} + c_2y_{12} + \cdots + c_ny_{1n} \\ c_1y_{21} + c_2y_{22} + \cdots + c_ny_{2n} \\ \vdots \\ c_1y_{n1} + c_2y_{n2} + \cdots + c_ny_{nn} \end{pmatrix}_{nx1} \Leftrightarrow Y_c(x) = \Phi(x)C,$$

onde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ e $\Phi(x)$ é uma matriz cujas colunas são preenchidas pelos elementos do conjunto fundamental do sistema homogêneo, ou seja, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$. A matriz $\Phi(x)$ é conhecida por **matriz fundamental** do sistema homogêneo (13.70) Abaixo destacamos algumas das propriedades da matriz fundamental $\Phi(x)$.

- Uma matriz fundamental $\Phi(x)$ de (13.70) é não singular, ou seja, $det\Phi(x) \neq 0$. Dessa maneira, Φ possui inversa, Φ^{-1}. Podemos provar tal afirmação observando que $det\Phi(x)$ é exatamente $W(Y_1, \cdots, Y_n)$, onde $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ é um conjunto fundamental do sistema homogêneo. Assim, $det\Phi(x) \neq 0$.

- Seja $\Phi(x)$ uma matriz fundamnetal do sistema $Y' = A(x)Y$, então
$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x).$$
Para provarmos essa igualdade usando o fato de cada uma das colunas de $\Phi(x)$ ser solução de $Y' = A(x)Y$.

O método variação de parâmetros para sistemas é feito semelhantemente ao que foi apresentado para equações lineares, na nossa aula 8. Como só sabemos calcular matriz fundamental para sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes, consideraremos a matriz $A(x)$ do sistema homogêneo formada apenas por coeficientes constantes e desse modo a denotaremos por A, contudo o método de variação de parâmetros pode ser aplicado a um sistema não homogêneo onde a matriz do sistema homogêneo associado é variável. Assim, considere o sistema de equações de primeira ordem linear não homogêneo

$$Y' = AY + B(x) \tag{14.75}$$

e seja $\Phi(x)$ uma matriz fundamental do sistema homogêneo associado. Nesse caminho procuramos uma matriz $U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$ tal que

$$Y_p(x) = \Phi(x)U(x) \tag{14.76}$$

seja uma solução particular de (14.75).

Dessa maneira, derivando com respeito à x a expressão em (14.76) e substituindo em (14.75), temos que

$$\Phi(x)U'(x) + \Phi'(x)U(x) = A\Phi(x)U(x) + B(x).$$

Como $\Phi'(x) = A\Phi(x)$, segue que

$$\Phi(x)U'(x) = B(x)$$

Aplicando a matriz inversa Φ^{-1} a ambos os lados da igualdade temos

$$\Phi^{-1}(x)\Phi(x)U'(x) = \Phi^{-1}(x)B(x) \Leftrightarrow U'(x) = \Phi^{-1}(x)B(x).$$

Portanto, $U(x) = \int \Phi^{-1}(x)B(x)dx$ (sem perda de generalidade omitimos a constante de integração nesse caso). Logo, $Y_p(x) = \Phi(x)U(x)$ é dada por

$$Y_p(x) = \Phi(x) \int \Phi^{-1}(x)B(x)dx. \tag{14.77}$$

e, assim, uma solução geral para o sistema não homogêneo (14.75) é

$$Y(x) = Y_c(x) + Y_p(x) = \Phi(x)C + \Phi(x) \int \Phi^{-1}(x)B(x)dx.$$

Exemplo 14.1. Ache a solução do P.V.I.

$$Y' = AY + B(x), Y(1) = Y_0,$$

onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x \end{pmatrix}$ e $Y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nosso primeiro passo é achar a matriz fundamental $\Phi(x)$. Dessa maneira calculando as raízes da equação característica $det(A - \lambda Id) = 0$, obtemos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Para $\lambda_1 = 1$, temos que achar o autovetor associado $K_1 = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$.

Assim, precisamos resolver o sistema

$$(A - \lambda_1 Id)K_1 = 0,$$

que é o mesmo que

$$\kappa_1 - \kappa_2 = 0, \;\; 3\kappa_1 - 3\kappa_2 = 0.$$

Resolvendo o sistema (o sistema tem um grau de liberdade), obtemos que $\kappa_1 = \kappa_1$ e $\kappa_2 = \kappa_1$, escolhendo $\kappa_1 = 1$, temos

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -1$, o autovetor associado a λ_2, $K_2 = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$ será dado pela solução do sistema

$$(A - \lambda_2 Id)K_2 = 0,$$

o qual pode ser escrito na forma $3\kappa_1 - \kappa_2 = 0 \;\; 3\kappa_1 - \kappa_2 = 0$. Esse sistema tem um grau de liberdade e sua solução é da forma $\kappa_1 = \kappa_1$ e $\kappa_2 = 3\kappa_1$. Assim, escolhendo $\kappa_1 = 5$, obtemos $K_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Portanto, a solução geral do sistema homogêneo associado é dada por

$$Y_c(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Tratemos agora do sistema não homogêneo.

Vimos que uma solução particular do sistema não homogêneo é dada por (14.77), assim como $\Phi(x)$ é a matriz cujas colunas são formadas pelo conjunto fundamental $\{Y_1, Y_2\}$ do sistema homogêneo associado, onde $Y_1 = K_1 e^x = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$ e $Y_2 = K_2 e^{-x} = \begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ 15e^{-x} \end{pmatrix}$, segue que

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 3e^{-x} \\ e^x & 15e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 15e^{-x} & -3e^{-x} \\ -e^x & e^x \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Y_p(x) &= \begin{pmatrix} e^x & 3e^{-x} \\ e^x & 15e^{-x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -xe^{-x} \\ xe^x/3 \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 3e^{-x} \\ e^x & 15e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int -xe^{-x} dx \\ \int xe^x/3 dx \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que resulta em

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} (x+1)(1-e^{-2x}) \\ (x+1)(1-5e^{-2x}) \end{pmatrix}.$$

Portanto, uma solução geral do sistema dado é

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} (x+1)(1-e^{-2x}) \\ (x+1)(1-5e^{-2x}) \end{pmatrix}.$$

14.3 Conclusão

Na aula de hoje, concluímos que podemos resolver sistemas de equações lineares de primeira ordem não homogêneo utilizando o método de variação de parâmetros.

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos como resolver um sistema linear não homogêneo utilizando o método de variação de parâmetros. Esse método é semelhante ao aprendido na aula 8.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula faremos várias aplicações envolvendo sistemas de equações lineares.

ATIVIDADES

..

Atividade. 14.1. Resolva o sistema

$$Y' = AY + B(t),$$

onde

a)$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $B(t) = \begin{pmatrix} sen\, 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} e^{2t}$

b)$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ e $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{e^{2t}}{t}$

Atividade. 14.2. Resolva o P.V.I.

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad Y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lembrem-se que a condição inicial só deve ser substituída depois que você achar uma solução geral para o sistema não homogêneo dado.

LEITURA COMPLEMENTAR

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

14.4 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.